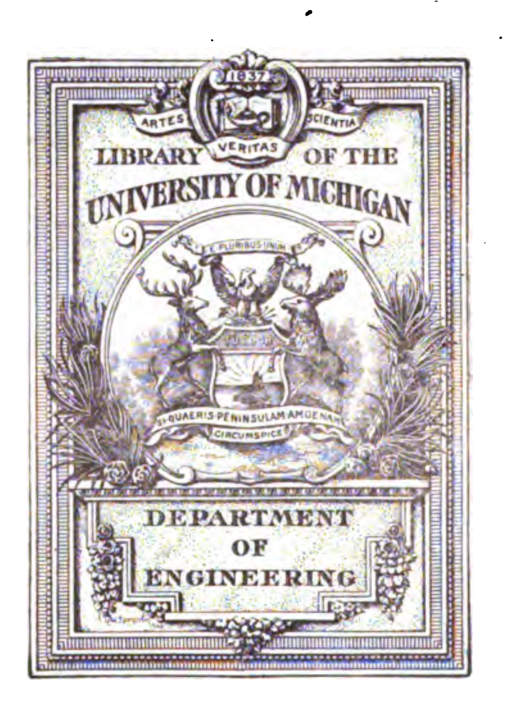



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



LEHRBUCH

DER

HÖHEREN MECHANIK

VON

AUGUST RITTER, Dr. phil.,

GEH. REG.-RATH UND PROFESSOR AN DER KGL. TECHN. HOCHSCHULE
ZU AACHEN.

ZWEITE AUFLAGE.

ZWEITER THEIL.

INGENIEUR-MECHANIK.

MIT 592 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG, 1885.

BAUMGÄRTNER'S BUCHHANDLUNG.

LEHRBUCH

DER

INGENIEUR-MECHANIK

VON

A. RITTER, Dr. PHIL.,

GEH. REG.-RATH UND PROFESSOR AN DER KGL. TECHN. HOCHSCHULE ZU AACHEN.

ZWEITE AUFLAGE.

MIT 592 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG, 1885.

BAUMGÄRTNER'S BUCHHANDLUNG.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik bildet den zweiten Theil des Lehrbuches der höheren Mechanik und enthält, als Ergänzung des die analytische Mechanik behandelnden ersten Theiles, eine Reihe von solchen Untersuchungen, deren Resultate bei den Fachstudien der Ingenieurwissenschaften zur Anwendung kommen.

In der neuen Auflage wurde den vielfach in das Gebiet der Mechanik eingreifenden Untersuchungen der mechanischen Wärmetheorie ein grösserer Raum gewidmet, und zu den in der ersten Auflage bereits enthaltenen, ausschliesslich die permanenten Gase betreffenden, Untersuchungen noch die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Wasserdampf, sowie auf die dampfhaltige atmosphärische Luft, hinzugefügt. Mit Rücksicht auf die hierdurch bedingte erhebliche Erweiterung des Umfangs erschien es rathsam, alle diejenigen Untersuchungen, welche auf die Wirkung der Wärme sich beziehen, der leichteren Uebersicht wegen in einem besonderen Abschnitte zusammenzustellen.

Aachen, den 14. Mai 1885.

A. Ritter.

Inhaltsverzeichniss.

ERSTER ABSCHNITT.

Theorie der elastischen Linie.

ZWEITER ABSCHNITT.

Theorie der Abscheerungskräfte.

DRITTER ABSCHNITT.

Berechnung des Material-Aufwandes für Blech- und Gitter-Brücken.

VIERTER ABSCHNITT.

Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Biegungstheorie krummer Balken.

SECHSTER ABSCHNITT.

Theorie des Erddruckes und Berechnung der Futtermauern.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Theorie der Stützlinien und Berechnung der Gewölbe.

ACHTER ABSCHNITT.

Hydraulik.

NEUNTER ABSCHNITT.

Mechanische Wärmetheorie.

Druckfehler:

In Fig. 386 muss statt 12,09 gesetzt werden: 13,09.

ERSTER ABSCHNITT.

Theorie der elastischen Linie.

---

§ 1.

Zug- und Druck-Spannungen.

Nach dem Elasticitätsgesetze wächst die Verlängerung einer prismatischen Stange, welche in ihrer Längenrichtung gezogen wird, proportional der verlängernden Kraft — so lange die Spannung innerhalb der Elasticitätsgrenzen bleibt. Wenn mit $\frac{1}{E}$ das Verlängerungs-Verhältniss bezeichnet wird, welches in einer am oberen Endpunkte aufgehängten Stange von 1□mm Querschnitt durch ein unten angehängtes Gewicht von 1 Kil. hervorgebracht wird, so ist das Verlängerungs-Verhältniss, welches in derselben Stange bei einer Belastung von S Kilogrammen eintritt, zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1)\quad \delta = \frac{S}{E}.$$

Um das Verlängerungs-Verhältniss zu berechnen, welches einer aus demselben Materiale bestehenden Stange vom beliebigen Querschnitte F durch eine beliebige verlängernde Kraft K ertheilt wird, hat man nach der Gleichung:

$$2)\quad S = \frac{K}{F}$$

zunächst die Spannung pro Quadratmillimeter des Querschnitts zu berechnen, worauf dann wiederum nach Gleichung 1) das hervorgebrachte Verlängerungs-Verhältniss bestimmt werden kann.

Die Zahl E wird der Elasticitäts-Modulus (oder Elasticitäts-Coefficient) des betreffenden Materials genannt.

Diejenige Grösse, bis zu welcher die Spannung einer Stange von 1□mm Querschnitt höchstens gesteigert werden kann, ohne dass ein sofortiges Zerreissen derselben eintritt, wird der Festigkeits-Coefficient des betreffenden Materials genannt.

Unter Elasticitätsgrenze versteht man diejenige Grenze, bis zu welcher die Spannung jener Stange von 1□mm Querschnitt höchstens gesteigert werden darf, wenn nicht eine bleibende Verlängerung in derselben hervorgebracht werden soll, d. h. eine Verlängerung, welche nach Beseitigung der verlängernden Kraft nicht wieder verschwindet.

Verkürzungen können als negative Verlängerungen, und Druck-Spannungen als negative Zug-Spannungen aufgefasst werden. Man kann daher die obigen Gleichungen auch benutzen zur Berechnung der Verkürzung einer Stange, welche in ihrer Längenrichtung gedrückt wird. Der Elasticitäts-Modulus hat für Druck-Spannungen stets dieselbe Grösse wie für Zug-Spannungen. Was dagegen die Grösse des Festigkeits-Coefficienten und der Spannung an der Elasticitätsgrenze betrifft, so findet bei einigen Körpern ein Unterschied statt zwischen ihrer Widerstandsfähigkeit gegen Druck-Spannungen und ihrer Widerstandsfähigkeit gegen Zug-Spannungen, wie aus der nachfolgenden Tabelle zu ersehen, in welcher die für die Druck-Spannungen geltenden Zahlenwerthe in Klammern eingeschlossen sind.

	Elasticitäts-Modulus.	Spannung an der Elasticitätsgrenze.	Festigkeits-Coefficient.
Gusseisen	10 000	7,5 [15]	12 [70]
Schmiedeisen	20 000	15 [15]	40 [30]
Eisendraht	20 000	30	70
Stahl	20 000	25	80
Gussstahl	30 000	65	100
Kupfer	10 000	3	25 [50]
Kupferdraht	10 000	12	40
Zink	9500	—	4
Zinn	3500	—	3
Messing	6500	5	12 [100]
Messingdraht	10 000	13	35
Bronze	6000	3	25
Blei	600	1	1,5
Aluminium	6750	—	20
Silber	7300	11	29
Gold	8000	13	27
Platin	16 000	27	34
Glas	7000	—	3
Holz	1000	2 [1,8]	8 [5]
Hanfseil	—	—	5
Lederriemen	700	—	2,5
Stein	—	—	[5]
Ziegelstein	—	—	[0,6]
Mörtel	—	—	[0,4]

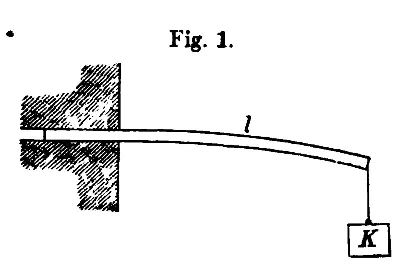
§ 2.

Biegungs-Spannungen.

Die Spannungen, welche durch rechtwinkelig zur Längenrichtung eines Balkens wirkende Kräfte im Inneren desselben hervorgebracht werden, sind ungleichförmig vertheilt, sowohl über die Länge des Balkens, als auch über die Fläche eines jeden Querschnitts, und das Gesetz dieser Vertheilung lässt sich auf folgende Weise ermitteln.

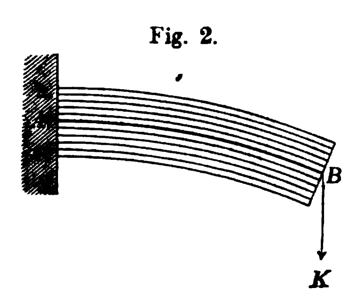
Denkt man sich das eine Ende eines prismatischen Balkens in horizontaler Lage eingespannt und das andere Ende mit einem Gewichte K belastet, so erkennt man zunächst, dass durch diese Belastung jedenfalls eine Biegung des Balkens hervorgebracht wird.

Fig. 1.



Der vorher geradlinige Balken nimmt eine krummlinige Form an, und die convexe Seite der Krümmung ist nach oben gerichtet (Fig. 1). Betrachtet man den Balken als ein Bündel von parallel neben einander liegenden, in unverschiebbarer Lage an einander befestigten Fasern, so erkennt man ferner, dass beim Eintreten dieser Biegung nothwendig die oben liegenden Fasern sich verlängern, die unten liegenden sich verkürzen müssen. Zwischen der obersten und untersten Faserschicht muss irgendwo eine mittlere Faserschicht sich befinden, welche weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erleidet; diese mittlere Faserschicht AB (Fig. 2) wird die neutrale Faser genannt.

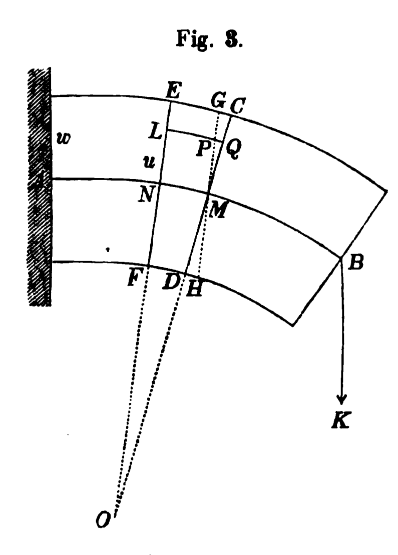
Fig. 2.



Die Verlängerungen der oberen und die Verkürzungen der unteren Fasern sind um so grösser, je weiter die Fasern von der neutralen Faser entfernt liegen. Man darf annehmen, dass die einzelnen Querschnitts-Ebenen des Balkens, welche vor dem Eintreten der Biegung rechtwinkelig zur geradlinigen Achse des Balkens standen, annäherungsweise auch nach eingetretener Biegung noch ihre ebene Form und ihre rechtwinkelige Lage zu

der nunmehr gekrümmten Achsenlinie des Balkens überall beibehalten. Die beiden unendlich nahe bei einander liegenden Querschnitts-Ebenen M und N, welche vorher einander parallel waren, nehmen beim Eintreten der Biegung die gegen einander convergirenden Lagen CD und EF an (Fig. 3). Die zwischen diesen beiden Querschnitts-Ebenen liegenden Fasern-Abschnitte hatten vor dem Eintreten der Biegung sämmtlich die gleiche Länge MN. Die Längenänderungen, welche diesen Fasern-Abschnitten durch die Biegung ertheilt werden, kann man finden, indem man jene ursprüngliche Länge MN von der einen Ebene EF aus auf den Fasernrichtungen abträgt, oder indem man durch den Punkt M eine Ebene GH legt, welche der Ebene EF parallel ist. Die zwischen den beiden Ebenen CD und GH liegenden Theile stellen die Längenänderungen der einzelnen Fasern-Abschnitte dar. Nach Fig. 3 ist:

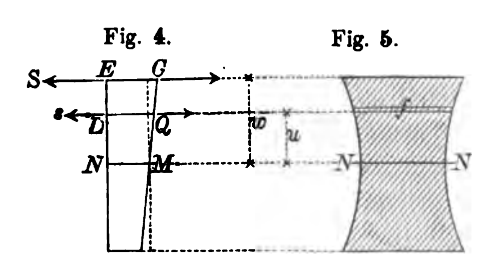
Fig. 3.



$$1)\quad \frac{PQ}{GC} = \frac{u}{w}.$$

Aus der obigen Annahme folgt also, dass die Längenänderungen der beiden Fasern-Abschnitte LQ und EC sich verhalten, wie ihre Abstände von der neutralen Faser, und da nach dem Elasticitätsgesetze die Spannung der Längenänderung proportional ist, so verhalten sich auch die Spannungen der einzelnen Fasern-Abschnitte wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Fig. 4. Fig. 5.



Wenn also mit s die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für den im Abstande u von der Neutralen befindlichen Fasern-Abschnitt LQ bezeichnet wird (Fig. 4), und mit S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Quer-

schnitts) für den im Abstande w befindlichen Fasern-Abschnitt EC, so ist:

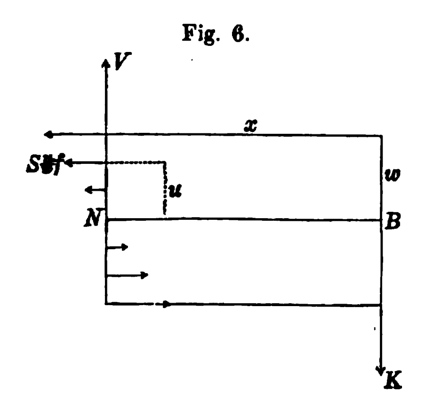
$$2)\quad \frac{s}{S} = \frac{u}{w}, \quad \text{oder:} \quad s = S\frac{u}{w}.$$

Um die totale Spannung irgend einer Faser zu bestimmen, hat man die pro Quadratmillimeter ihrer Querschnittsfläche gefundene Spannung zu multipliciren mit der Anzahl der Quadratmillimeter, welche ihre Querschnittsfläche enthält. Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche des Balkens zerlegt in unendlich schmale parallel zur neutralen Faserschicht liegende Streifen, und sieht man den Flächeninhalt f des in der Entfernung u von der Neutralen befindlichen Streifens als Querschnitts-Fläche jener im Abstande u von der Neutralen NN liegenden Fasernschicht an (Fig. 5), so erhält man für die totale Spannung derselben die Grösse:

$$3)\quad s.f = S\frac{u}{w}\cdot f.$$

Diese Spannung ist als eine Zug-Spannung (positive Spannung) anzusehen, wenn die betreffende Faser oberhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u positiv ist; als eine Druck-Spannung (negative Spannung) dagegen, wenn dieselbe unterhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u negativ ist. Der obige Ausdruck kann daher (für positive sowohl als für negative Werthe von u) als allgemein gültiger Ausdruck für die Spannung irgend eines im Abstande u von der Neutralen befindlichen Fasern-Abschnitts betrachtet werden.

Fig. 6.



Wenn man sich durch eine an der Stelle N hindurchgelegte Querschnittsebene den Balken in zwei Theile zerschnitten denkt, und untersucht, welche Kräfte zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes für das Stück BN an der Schnittfläche desselben angebracht werden müssten, so findet man: dass zunächst an der Schnittstelle jeder einzelnen Faser eine in die Längenrichtung derselben fallende Kraft anzubringen ist von gleicher Grösse mit der Spannung, welche vorher in der Faser an dieser Stelle

vorhanden war (Fig. 6). Diese Spannungswiderstände der einzelnen Fasern können, wenn die Biegung — wie vorausgesetzt werden soll — eine sehr geringe ist, als Horizontalkräfte angesehen werden. Ausserdem ist an der Schnittfläche noch eine vertical aufwärts wirkende Kraft V anzubringen, da jene Horizontalkräfte für sich allein nicht ausreichen würden, um der vertical abwärts wirkenden Kraft K das Gleichgewicht zu halten. Diese Kraft V darf — bei der vorausgesetzten geringen Abweichung der Schnittfläche von der Verticalebene — als eine längs der Trennungsfläche aufwärts wirkende Widerstandskraft angesehen werden, welche einer Verschiebung des Stückes BN längs jener Fläche entgegenwirkt, und wird der Widerstand gegen Abscheerung genannt. Da die Kräfte V und K die einzigen Verticalkräfte sind, welche auf das Stück BN wirken, so ist nach den allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen:

$$4)\quad V = K.$$

In der Querschnittsfläche ist also ausser den Spannungswiderständen der horizontalen Fasern noch ein Widerstand gegen Abscheerung thätig von gleicher Grösse mit derjenigen Kraft (K), welche ohne das Vorhandensein dieses Widerstandes eine Verschiebung längs der Querschnittsfläche hervorbringen würde.

Die einzigen Horizontalkräfte, welche auf das Stück BN wirken, sind die Spannungswiderstände der einzelnen Fasern. Oberhalb der Neutralen wirken diese Kräfte von rechts nach links, unterhalb derselben von links nach rechts. Die algebraische Summe dieser Horizontalkräfte muss gleich Null sein. Nach Gleichung 3) ist also:

$$5)\quad \Sigma\left(\frac{S}{w}\,uf\right) = 0.$$

Wenn man die Grösse $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlichen Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder fortlässt, so erhält man die Gleichung:

$$6)\quad \Sigma\,(fu) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Momenten-Summe sämmtlicher Flächentheilchen der Querschnittsfläche (Fig. 5) in Bezug auf den in der neutralen Faserschicht liegenden Horizontal-Durchmesser NN, welcher die neutrale Achse genannt wird, gleich Null ist. Nach der Lehre vom Schwerpunkte*) kann statt dieser Momenten-

*) „Analytische Mechanik“ (2. Aufl.) § 73.

Summe auch das Product aus der ganzen Querschnittsfläche in den Abstand ihres Schwerpunktes von jener Achse gesetzt werden, und da dieses Product gleich Null ist, so folgt hieraus, dass der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in der neutralen Achse NN selbst liegt. Durch Gleichung 7) wird also die Lage der neutralen Achse bestimmt; diese Gleichung drückt aus: dass die neutrale Fasernschicht diejenige ist, welche durch die Schwerpunkte sämmtlicher Querschnittsflächen hindurchgeht.

Die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen erfordern ausserdem noch: dass die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf das Stück BN wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige Achse, z. B. in Bezug auf die in Fig. 6 rechtwinkelig zur Bildfläche stehende neutrale Achse N, gleich Null ist. Es muss also das statische Moment der Kraft K, welche für sich allein eine von links nach rechts gerichtete Drehung hervorbringen würde, gleich der Summe der statischen Momente aller Spannungswiderstände sein, deren jeder für sich allein eine von rechts nach links gerichtete Drehung um die Achse hervorbringen würde. Das statische Moment des Spannungswiderstandes der im Abstande u von der Neutralen befindlichen Faser ist gleich $\frac{Suf}{w} \cdot u$; folglich ist:

$$7)\quad \Sigma\left(\frac{Suf}{w} \cdot u\right) = K \,.\, x,$$

oder in Worten ausgedrückt: das Widerstandsmoment der Fasern-Spannungen ist gleich dem Momente der biegenden Kraft.

Die Grösse $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder kann auch vor das Summationszeichen gesetzt werden, also ist:

$$8)\quad \frac{S}{w}\, \Sigma\,(f u^2) = Kx.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\Sigma\,(f u^2)$ die Summe aller Producte aus den einzelnen Flächentheilchen der Querschnittsfläche in die Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Achse, oder das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf den horizontalen Schwerpunktsdurchmesser derselben. Wenn man dieses Trägheitsmoment mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet, so nimmt die obige Gleichung die einfachere Form an:

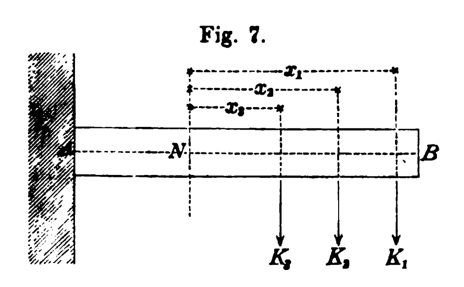
$$9)\quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = Kx.$$

Für den Fall, in welchem statt der einen Kraft K mehrere biegende Verticalkräfte K_1, K_2, K_3 auf das Stück BN wirken (Fig. 7), würde man statt Kx die Grösse:

$$10)\quad \mathfrak{M} = K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3$$

als Summe der statischen Momente aller dieser biegenden Kräfte in Bezug auf den Punkt N zu setzen haben. Wenn man also allgemein mit $\mathfrak{M}$ die Momenten-Summe aller rechts von der Stelle N wirkenden Verticalkräfte in Bezug auf die neutrale Achse dieses Querschnitts oder das **Biegungsmoment** an dieser Stelle bezeichnet, so kann man der obigen Gleichung die noch einfachere und allgemeinere Form geben:

Fig. 7.



$$11)\quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \mathfrak{M}.$$

In dieser Gleichung bedeutet S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für die im Abstande w von der Neutralen befindliche Faser, also — wenn man, wie hier vorausgesetzt werden soll, unter w die Entfernung der am **weitesten** von der Neutralen entfernt liegenden Faser versteht — zugleich die **stärkste** Spannung (pro $\square^{mm}$), welche in der **ganzen** Querschnittsfläche vorkommt. Die obige Gleichung kann daher in der Form:

$$12)\quad S = \frac{w}{\mathfrak{T}}\mathfrak{M}$$

benutzt werden, um die Spannung der am stärksten gespannten Faser zu berechnen, sobald das Trägheitsmoment:

$$13)\quad \mathfrak{T} = \Sigma(fu^2)$$

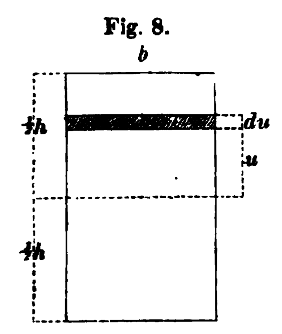
für die betreffende Querschnittsform zuvor bestimmt wurde.*)

Nach der Bezeichnungsweise der Integral-Rechnung würde man dem obigen Ausdrucke für das Trägheitsmoment die Form zu geben haben:

*) S. „Analytische Mechanik“ (2. Aufl.) § 91 und „Technische Mechanik“ (5. Aufl.) § 109 und § 134.

$$14)\quad \mathfrak{T} = \int dF \,.\, u^2,$$

indem man mit F die ganze Querschnittsfläche und mit dF den unendlich kleinen Flächeninhalt des im Abstande u von der neutralen Achse parallel zu derselben liegenden Flächenstreifens bezeichnet.


Fig. 8.

Für den in Fig. 8 dargestellten rechteckigen Querschnitt z. B. würde man $dF = b\,du$ zu setzen haben, und man erhält durch Ausführung der Integration für das Trägheitsmoment der rechteckigen Querschnittsfläche von der Breite b und der Höhe h die Gleichung:

$$15)\quad \mathfrak{T} = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} b\,du \,.\, u^2 = b\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} u^2\,du = \frac{b\,h^3}{12}.$$

Nach Gleichung 11) würde also für den rechteckigen Querschnitt die grösste Biegungs-Spannung zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$16)\quad \frac{S\,b\,h^2}{6} = \mathfrak{M}.$$

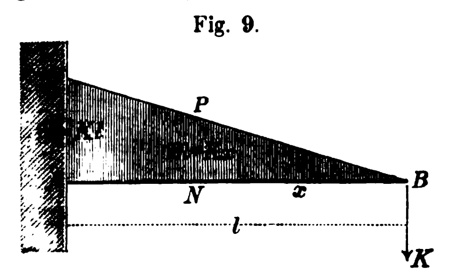
§ 3.

Graphische Darstellung der Biegungsmomente.

Bei dem prismatischen Balken hat das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ für alle Querschnitte dieselbe Grösse; ebenso auch der Abstand w der am stärksten gespannten Faser von der Neutralen. Nach Gleichung 12) des vorigen Paragraphen ist also bei dem prismatischen Balken die grösste Biegungs-Spannung S stets proportional der Grösse des Biegungsmoments $\mathfrak{M}$. Wenn man an den einzelnen Punkten der horizontalen Achsenlinie des Balkens Perpendikel errichtet, deren Längen die Grössen der Biegungsmomente an diesen Stellen darstellen, so bilden die Endpunkte dieser Ordinaten eine Linie, deren Form das Gesetz veranschaulicht, nach welchem das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ mit dem Abstande vom Endpunkte des Balkens sich ändert; und dieselbe Linie kann zugleich gelten als graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die grösste Biegungs-Spannung S von einem Endpunkte des Balkens bis zum andern sich ändert.

Bei dem ursprünglich angenommenen Falle, in welchem nur eine biegende Kraft am freien Endpunkte des Balkens vorausgesetzt wurde, führt die graphische Darstellung der Biegungsmomente zu der geraden Linie BPC (Fig. 9); denn man erhält für das Verhältniss der Biegungsmomente an den beiden Stellen N und A die Gleichung:

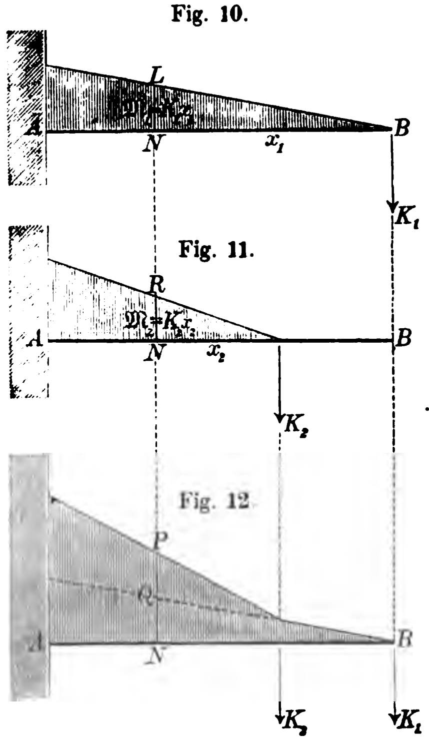
Fig. 9.



$$1)\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1} = \frac{Kx}{Kl} = \frac{x}{l}.$$

Wenn gleichzeitig zwei vertical abwärts gerichtete biegende Kräfte K_1 und K_2 auf den Balken wirken, so kann man die graphische Darstellung der Biegungsmomente in der Weise ausführen, dass man zunächst für jede der beiden Kräfte einzeln genommen die graphische Darstellung der Biegungsmomente auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Falle construirt, und nachher an jedem Punkte der horizontalen Achsenlinie die beiden Ordinaten summirt, welche für diese Stelle in jenen beiden Figuren sich ergeben hatten. Man erhält auf diese Weise aus den beiden Figuren 10 und 11 die Fig. 12, in welcher letzteren z. B. die Ordinate $\overline{NP} = \mathfrak{M}$ zusammengesetzt ist aus den beiden Stücken:

Fig. 10.



$$2)\quad \overline{NQ} = \mathfrak{M}_1 = \overline{NL} = K_1 x_1 \quad \text{(Fig. 10)}$$

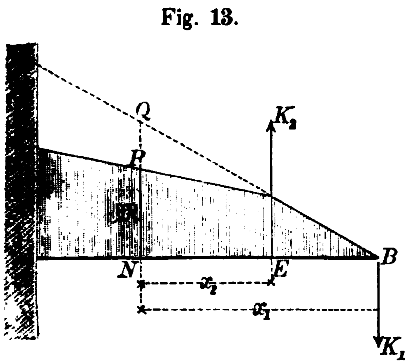
und

$$3)\quad \overline{QP} = \mathfrak{M}_2 = \overline{NR} = K_2 x_2 \quad \text{(Fig. 11)}.$$

Wenn die Kraft K_2 vertical **aufwärts** wirkt (statt vertial abwärts), so ist der Beitrag, welchen dieselbe zu dem Biegungsmomente

$\mathfrak{M}$ liefert, eine negative Grösse. Man würde dem entsprechend für diesen Fall die Ordinaten, welche die von der Kraft K_2 allein hervorgebrachten Biegungsmomente darstellen, sämmtlich von der Horizontalen aus nach unten hin abzutragen und nachher bei der Zusammensetzung der beiden Ordinaten für jede einzelne Stelle die zweite von der ersten zu subtrahiren haben (Fig. 13). Für das Biegungsmoment an irgend einer links von dem Angriffspunkte E gelegenen Stelle N erhält man nach Fig. 13 die Gleichung:

Fig. 13.



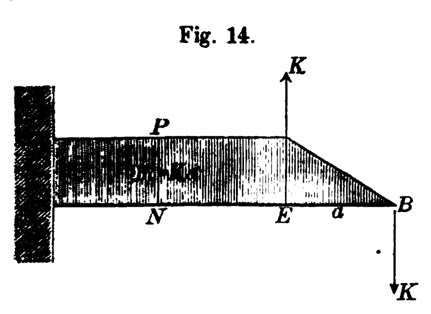
$$4)\quad \mathfrak{M} = K_1 x_1 - K_2 x_2.$$

In dem speciellen Falle, wenn die beiden Kräfte K_1, K_2 ein Kräftepaar bilden, wird das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ an allen Stellen zwischen A und E gleich gross. Denn man erhält aus der obigen Gleichung, indem man darin $K_1 = K_2 = K$ und $x_1 - x_2 = a$ setzt, für alle Biegungsmomente der Strecke AE den constanten Werth:

$$5)\quad \mathfrak{M} = Ka,$$

welcher zugleich das Moment jenes Kräftepaares bildet. Die graphische Darstellung der Biegungsmomente ergiebt daher für die Strecke AE eine horizontale Linie (Fig. 14). Indem man das in Bezug auf Fig. 12 erklärte Verfahren anwendet auf den Fall, in welchem mehr als zwei biegende Kräfte vorhanden sind, erkennt man, dass die graphische Darstellung der Biegungsmomente immer zu einer gebrochenen Linie führt,

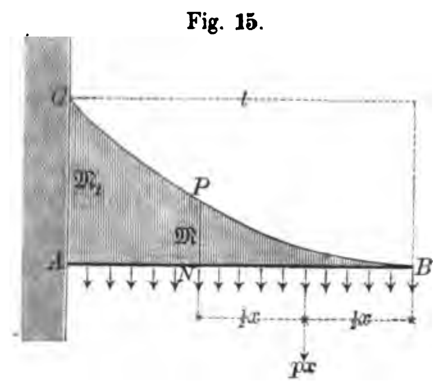
Fig. 14.



und dass die Anzahl der geradlinigen Stücke, aus welchen diese gebrochene Linie sich zusammensetzt, übereinstimmt mit der Anzahl der biegenden Kräfte. Wenn also diese Anzahl unendlich gross und zugleich der Abstand zwischen zwei benachbarten Kräften unendlich klein wird, so geht die gebrochene Linie über in eine krumme Linie.

Für eine stetig und gleichförmig über die Länge des Balkens vertheilte Belastung von der Grösse p pro Längeneinheit nimmt daher die graphische Darstellung die in Fig. 15 angegebene Form an. Das Verhältniss der beiden Biegungsmomente an den Stellen N und A hat die Grösse:

Fig. 15.

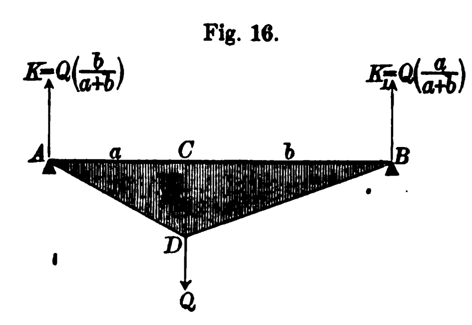


$$6)\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1} = \frac{\frac{1}{2} p x^2}{\frac{1}{2} p l^2} = \frac{x^2}{l^2}.$$

Die krumme Linie BPC ist daher eine Parabel, deren Scheitelpunkt mit dem Punkte B, und deren Achse mit der durch diesen Punkt gelegten Verticalen zusammenfällt.

Denkt man sich bei dem in Fig. 16 dargestellten Balken AB, welcher an beiden Endpunkten unterstützt und an irgend einer Zwischenstelle C mit einem Gewichte Q belastet ist, den Theil AC in eine feste Wand eingeschlossen, so erkennt man, dass für den Theil BC die graphische Darstellung der Biegungsmomente auf dieselbe Weise wie in Fig. 9 auszuführen ist, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Ordinaten sämmtlich nach unten hin von der Horizontalen aus abzutragen sind. Für das Biegungsmoment an der Stelle C erhält man die Gleichung:

Fig. 16.



$$7)\quad \mathfrak{M}_1 = \overline{CD} = K_1 b = K a,$$

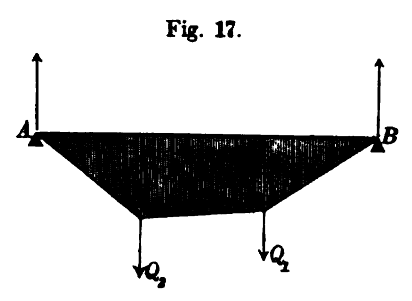
welche nach Substitution des für K (oder K_1) aus dem Gesetze des Hebels sich ergebenden Werthes die Form annimmt:

$$8)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{Q a b}{a + b}.$$

Indem man auf den Fall, in welchem der Balken mit zwei oder mehreren Gewichten belastet ist, wiederum das in Bezug auf die Figuren 10, 11, 12 erklärte Verfahren anwendet, gelangt

man zu den Figuren 17 und 18, in welcher letzteren eine stetig über die ganze Balkenlänge vertheilte Belastung vorausgesetzt ist.

Fig. 17.

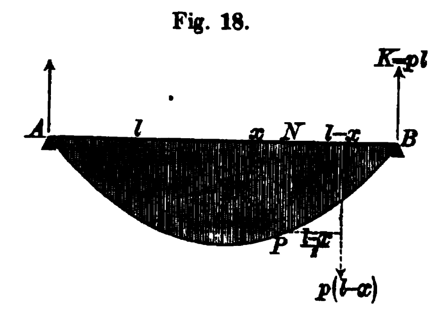


Wenn zugleich angenommen wird, dass diese Belastung **gleichförmig** über die Länge AB vertheilt ist und die Grösse p pro Längeneinheit hat, so ergiebt sich für das Biegungsmoment an der im Abstande x von der Mitte befindlichen Stelle N die Gleichung:

$$9)\quad \mathfrak{M} = \overline{NP} = K(l-x) - \frac{p(l-x)^2}{2},$$

welche nach Substitution des Werthes $K = pl$ die Form annimmt:

Fig. 18.



$$10)\quad \mathfrak{M} = \frac{p(l^2-x^2)}{2}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man für das Biegungsmoment in der Mitte des Balkens, indem man $x=0$ setzt, den Werth:

$$11)\quad \mathfrak{M}_0 = \frac{pl^2}{2}.$$

Für das Verhältniss dieser beiden Biegungsmomente ergiebt sich demnach die Gleichung:

$$12)\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} = \frac{\frac{1}{2}p(l^2-x^2)}{\frac{1}{2}pl^2} = \frac{l^2-x^2}{l^2},$$

welche zeigt, dass die Curve BPA eine Parabel ist, deren Achse mit der durch den Mittelpunkt des Balkens gelegten Verticalen zusammenfällt.

§ 4.

Allgemeine Differenzial-Gleichung der elastischen Linie.

Die krumme Linie, in welche bei der Biegung des Balkens die vorher geradlinige Achse desselben übergeht, wird die **elastische Linie** genannt. Das unendlich kleine Bogenstück $\widehat{MN}$ (Fig. 3) dieser elastischen Linie kann als ein Kreisbogen angesehen

werden, dessen Mittelpunkt O mit dem Convergenzpunkte der beiden Normalen $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ zusammenfällt, und dessen Halbmesser $\overline{OM} = \varrho$ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für diese Stelle bildet. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CGM und MNO in Fig. 3 ergiebt sich die Proportion:

$$1)\quad \frac{\overline{CG}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{ON}}.$$

Der Quotient auf der linken Seite ist das Verlängerungs-Verhältniss desjenigen Fasernabschnitts, dessen Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) mit S bezeichnet wurde, also (nach § 1, Gleichung 1) gleich $\frac{S}{E}$. Wenn man ferner $\overline{MG} = w$ und $\overline{ON} = \varrho$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$2)\quad \frac{S}{E} = \frac{w}{\varrho}, \quad \text{oder:} \quad \frac{S}{w} = \frac{E}{\varrho}.$$

Nach Substitution dieses Werthes nimmt die in § 2 gefundene allgemeine Gleichung 11) die Form an:

$$3)\quad \frac{E\mathfrak{T}}{\varrho} = \mathfrak{M}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Krümmungshalbmesser ϱ dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ umgekehrt proportional ist, und dass an den Stellen, wo $\mathfrak{M} = 0$ ist, der Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$ wird.

Wenn mit φ der Winkel bezeichnet wird, welchen die elastische Linie an der Stelle M, deren Coordinaten x, y sind, mit der Horizontalen einschliesst, oder der Winkel, welchen die an dieser Stelle errichtete Normale $\overline{MO}$ mit der Verticalen einschliesst (Fig. 19), so ist der unendlich kleine Winkel, welchen die in den benachbarten Punkten M und N errichteten beiden Normalen mit einander einschliessen, mit $d\varphi$ zu bezeichnen; man erhält also für das zu diesem Winkel gehörige Bogenelement die Gleichung:

$$4)\quad \widehat{MN} = \varrho\, d\varphi.$$

Da eine sehr geringe Grösse der Durchbiegung vorausgesetzt wird, so darf für den Winkel φ als einen sehr kleinen Winkel die Tangentenzahl an die Stelle der Winkelzahl gesetzt werden; auch darf man das Bogenelement $\widehat{MN}$ vertauschen mit dessen

Horizontal-Projection $\overline{MQ} = dx$. Die vorige Gleichung nimmt alsdann die Form an:

5) $dx = \varrho \, d(\operatorname{tg} \varphi)$.

Fig. 19.

Für die Grösse $\operatorname{tg} \varphi$ ergiebt sich aus dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreieck MNQ der Ausdruck:

6) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$,

folglich ist der Krümmungshalbmesser ϱ zu bestimmen aus der Gleichung:

7) $dx = \varrho \, d\left(\frac{dy}{dx}\right)$,

oder:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Wenn man diesen letzteren Werth für $\frac{1}{\varrho}$ in Gleichung 3) substituirt, so erhält man die folgende allgemeine Differenzial-Gleichung der elastischen Linie:

8) $E\mathfrak{T} \frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M}$.

Mit Hülfe dieser allgemeinen Gleichung kann man die Form der elastischen Linie berechnen, indem man zunächst für das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ als Function von x die den speciellen Fällen entsprechenden Ausdrücke substituirt, und alsdann durch zweimalige Integration die Ordinate y als Function der Abscisse x darstellt.

§ 5.

Berechnung der Durchbiegungen.

Für den in Fig. 20 dargestellten Fall des an einem Ende horizontal eingemauerten und am freien Ende B mit einem Gewichte K belasteten Balken hat man:

1) $\mathfrak{M} = K(l - x)$

zu setzen, und indem man zugleich die am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundene allgemeine Gleichung auf beiden Seiten mit dx multiplicirt, erhält man die Gleichung:

$$2)\quad E\mathfrak{T}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = K\,(l - x)\, dx.$$

Fig. 20.

Wenn man alsdann die erste Integration ausführt und zugleich berücksichtigt, dass für $x = 0$ die Grösse $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ ebenfalls den Werth Null annimmt (da an der Befestigungsstelle A die elastische Linie horizontal gerichtet ist), so gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$3)\quad E\mathfrak{T}\frac{dy}{dx} = K\left(l x - \frac{x^2}{2}\right),$$

welche man benutzen kann, um für jeden Werth von x den zugehörigen Werth der Grösse $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ zu berechnen. Für $x = l$ wird $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\omega$; es ergiebt sich also für diese letztere Grösse der Werth:

$$4)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{K l^2}{2 E\mathfrak{T}}.$$

Indem man die Gleichung 3) auf beiden Seiten mit dx multiplicirt und hierauf die zweite Integration ausführt, erhält man — in gleichzeitiger Berücksichtigung des Umstandes, dass die Integrations-Constante wiederum gleich Null zu setzen ist, insofern für $x = 0$ auch $y = 0$ wird — die folgende Gleichung:

$$5)\quad E\mathfrak{T} y = K\left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

aus welcher man für jeden gegebenen Werth von x den zugehörigen Werth der Ordinate y berechnen kann. Für $x = l$ wird $y = f$; man erhält also für die Senkung des Belastungspunktes B den Werth:

$$6)\quad f = \frac{K l^3}{3 E \mathfrak{T}}.$$

Wenn man diese letztere Gleichung durch die oben für $\operatorname{tg}\omega$ gefundene dividirt, so erhält man die Gleichung:

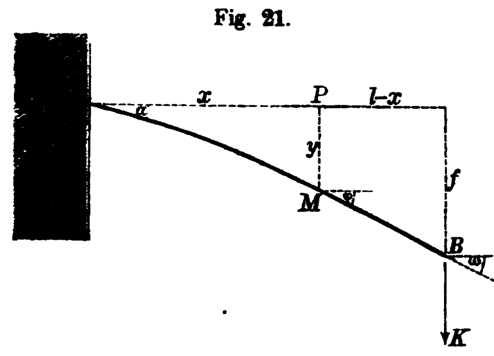
$$7)\quad \frac{f}{\operatorname{tg}\omega} = \frac{2}{3}l, \quad \text{oder:} \quad f = \frac{2}{3} l \operatorname{tg}\omega,$$

welche zeigt, dass die Horizontale des Befestigungspunktes A von der durch den Belastungspunkt B gelegten Tangente geschnitten wird an einer Stelle, welche im Abstande $\frac{l}{3}$ vom Punkte A liegt.

Die Gleichung 7) bietet zugleich ein Mittel, die Durchbiegung f auf indirectem Wege zu messen, und zwar genauer als dies durch directe Messung geschehen kann. Wenn man an dem freien Endpunkte B einen Spiegel befestigt, dessen Ebene rechtwinkelig zu der Balken-Achse gerichtet ist, und mittelst eines auf diesen Spiegel gerichteten Fernrohrs das Bild eines in der Biegungsebene aufgestellten verticalen Maassstabes betrachtet*), so kann man auf diese Weise die Grösse des Winkels ω mit grosser Genauigkeit beobachten und nach Substitution des für $\operatorname{tg}\omega$ gefundenen Werthes alsdann aus Gleichung 7) die Grösse der Durchbiegung berechnen.

Wenn der Balken an der Befestigungsstelle A nicht in horizontaler Lage, sondern in einer um den sehr kleinen Winkel α nach unten hin von der Horizontalen abweichenden Lage eingemauert wäre (Fig. 21), so würde man bei Ausführung der ersten Integration zu berücksichtigen haben, dass die Integrations-Constante in diesem Falle nicht gleich Null, sondern gleich $E\mathfrak{T} \operatorname{tg}\alpha$ ist,

Fig. 21.



insofern $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ wird für $x = 0$. Statt Gleichung 3) würde man also für diesen Fall die folgende Gleichung erhalten:

$$8)\quad E\mathfrak{T}\frac{dy}{dx} = K\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + E\mathfrak{T}\operatorname{tg}\alpha,$$

und die hiernach auszuführende zweite Integration ergiebt die Gleichung:

*) Vergl. Analytische Mechanik (2. Aufl.) § 99.

$$9)\quad E\mathfrak{T}y = K\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + E\mathfrak{T}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.\,x.$$

Aus diesen letzteren beiden Gleichungen erhält man resp. für $\mathrm{tg}\,\omega$ und f die Werthe:

$$10)\quad \mathrm{tg}\,\omega = \frac{Kl^2}{2\,E\mathfrak{T}} + \mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$11)\quad f = \frac{Kl^3}{3\,E\mathfrak{T}} + l\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Setzt man hierin $K = 0$, so wird $\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{tg}\,\alpha$ und $f = l\,\mathrm{tg}\,\alpha$; setzt man ein anderes Mal $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, so erhält man wie oben $\mathrm{tg}\,\omega = \frac{Kl^2}{2\,E\mathfrak{T}}$ und $f = \frac{Kl^3}{3\,E\mathfrak{T}}$. Jede der beiden Grössen $\mathrm{tg}\,\omega$ und f setzt sich also zusammen aus den Beiträgen, welche die beiden zusammenwirkenden Ursachen: nämlich erstens das Vorhandensein der biegenden Kraft K, und zweitens das Vorhandensein der schrägen Einmauerung, einzeln genommen zu diesen Grössen liefern, wie Fig. 22 beispielsweise in Bezug auf die Grösse f zeigt. Aus diesem Grunde darf bei den nächstfolgenden Fällen wiederum die horizontale Einmauerung vorausgesetzt werden, ohne dass die Allgemeinheit der Untersuchung dadurch beeinträchtigt würde, insofern man den auf solche Weise gefundenen Gleichungen durch Hinzufügung der den Winkel α enthaltenen Glieder jederzeit leicht diejenigen Formen geben kann, in welchen sie für den Fall der schrägen Einmauerung Gültigkeit haben.

Fig. 22.

Wenn es statt der einzelnen Kraft K ein am freien Ende des Balkens wirkendes Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M} = Ka$ ist, welches die Biegung desselben hervorbringt, so hat — wie aus Fig. 14 zu ersehen — das Biegungsmoment in allen Punkten der elastischen Linie die gleiche Grösse. Es ist daher bei dem in Fig. 23 dargestellten Falle das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ als eine von x unabhängige

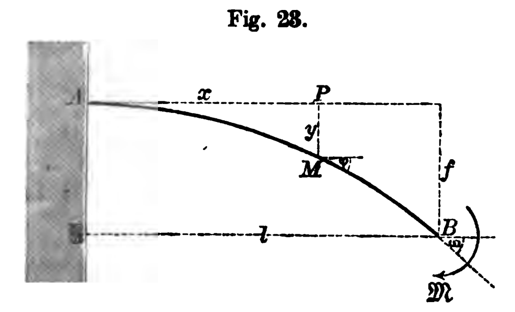


Fig. 23.

Constante zu behandeln, deren Grösse in dem Momente des biegenden Kräftepaares selbst gegeben ist, und die Anwendung des oben erklärten Rechnungs-Verfahrens führt zu den folgenden Gleichungen:

$$12)\quad E\mathfrak{T}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M} = \text{Const.},$$

$$13)\quad E\mathfrak{T}\frac{dy}{dx} = \mathfrak{M}x,$$

$$14)\quad E\mathfrak{T}y = \frac{\mathfrak{M}x^2}{2},$$

aus welchen man nach Substitution des Werthes $x = l$ resp. für die Grössen $\operatorname{tg}\omega$ und f die folgenden Werthe erhält:

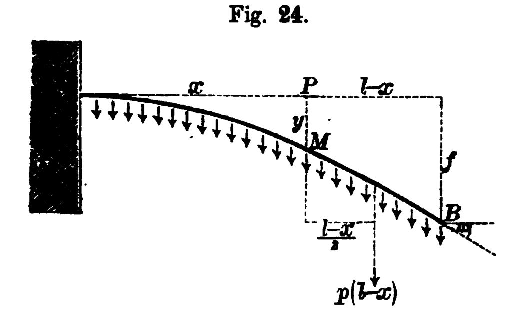
$$15)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}}, \qquad 16)\quad f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2E\mathfrak{T}}.$$

Nach § 4 (Gleichung 3) hat der Krümmungs-Halbmesser der elastischen Linie in diesem Falle die überall gleiche Grösse:

$$17)\quad \varrho = \frac{E\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}.$$

Die elastische Linie ist also ein Kreisbogen, und der in Gleichung 15) gefundene Winkel ω bildet zugleich den Centriwinkel dieses Kreisbogens.

Fig. 24.



Für den in Fig. 24 dargestellten Fall einer gleichförmig über die Länge des Balkens vertheilten Belastung von der Grösse p pro Längeneinheit hat man:

$$18)\quad \mathfrak{M} = \frac{p(l-x)^2}{2}$$

zu setzen, und es ergeben sich für diesen Fall die folgenden Gleichungen:

$$19)\quad E\mathfrak{T}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p(l-x)^2}{2},$$

$$20)\quad E\mathfrak{T}\frac{dy}{dx} = p\left(\frac{l^2x}{2} - \frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right),$$

$$21)\quad E\mathfrak{T}y = p\left(\frac{l^2x^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right),$$

$$22)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{pl^3}{6E\mathfrak{T}}, \qquad 23)\quad f = \frac{pl^4}{8E\mathfrak{T}}.$$

§ 6.

Zusammensetzung der Durchbiegungen.

Wie in § 3 erklärt wurde, kann man die Grösse des Biegungsmoments $\mathfrak{M}$ betrachten als zusammengesetzt aus den einzelnen (positiven oder negativen) Beiträgen, welche die einzelnen biegenden Kräfte zu demselben liefern. Auf gleiche Weise setzt sich auch die Durchbiegung f aus den Einzelwirkungen dieser Kräfte zusammen, und dasselbe gilt von der Grösse tg ω, als der Tangente des Neigungswinkels der elastischen Linie am freien Endpunkte des Balkens. Man kann daher die Durchbiegung, welche mehrere gleichzeitig vorhandene Belastungen am freien Endpunkte des Balkens hervorbringen, in der Weise berechnen, dass man zunächst die allgemeine Gleichung aufstellt für die Durchbiegung, welche ein einzelnes an beliebiger Stelle, z. B. im Abstande a von der Befestigungsstelle, angehängtes Gewicht Q am Endpunkte des Balkens hervorbringt, und nachher die mit Hülfe dieser allgemeinen Gleichung zu bestimmenden Beiträge summirt, welche die einzelnen Belastungen zu der ganzen hervorgebrachten Senkung des Endpunktes liefern.

Fig. 25.

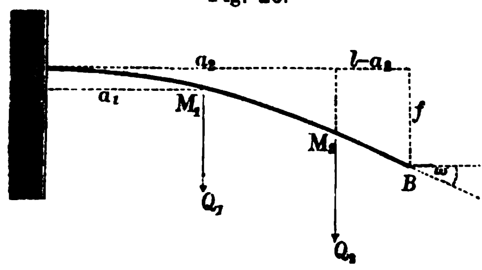
Für die von dem Gewichte Q am Belastungspunkte M selbst hervorgebrachte Senkung ergiebt sich aus der Gleichung 6) des vorigen Paragraphen der in Fig. 25 angegebene Werth σ, und für die Grösse tg ω erhält man aus der Gleichung 4) des vorigen Paragraphen, indem man darin Q statt K und a statt l setzt, den Werth:

$$1)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{Qa^2}{2E\mathfrak{T}}.$$

Die Senkung des Endpunktes B setzt sich aus den beiden Theilen σ und $(l-a)\operatorname{tg}\omega$ zusammen, hat also die Grösse:

$$2)\quad f=\frac{Q a^3}{3 E \mathfrak{T}}+(l-a)\frac{Q a^2}{2 E \mathfrak{T}}.$$

Fig. 26.



Hiernach ergiebt sich z. B. bei dem in Fig. 26 dargestellten Falle für die von den beiden Gewichten Q_1 und Q_2 zusammen genommen hervorgebrachte Senkung des Endpunktes B die Gleichung:

$$3)\quad f=\left[\frac{Q_1 a_1^3}{3 E \mathfrak{T}}+(l-a_1)\frac{Q_1 a_1^2}{2 E \mathfrak{T}}\right]+\left[\frac{Q_2 a_2^3}{3 E \mathfrak{T}}+(l-a_2)\frac{Q_2 a_2^2}{2 E \mathfrak{T}}\right],$$

und für die Grösse $\operatorname{tg}\omega$ erhält man — ebenfalls durch Summation der von den beiden Belastungen zu derselben gelieferten Beiträge — den Werth:

$$4)\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{Q_1 a_1^2}{2 E \mathfrak{T}}+\frac{Q_2 a_2^2}{2 E \mathfrak{T}}.$$

Dasselbe Verfahren kann man auch anwenden auf den Fall, in welchem die Anzahl der biegenden Kräfte unendlich gross ist, also z. B. auf den Fall einer stetig und gleichförmig — entweder über die ganze Balkenlänge oder über einen Theil derselben — vertheilten Belastung. Wenn mit p die Belastung pro Längeneinheit bezeichnet wird, so ist $p\,dx$ die Belastung der im Abstande x von der Befestigungsstelle befindlichen unendlich kleinen Strecke dx (Fig. 27). Für den unendlich kleinen Beitrag df, welchen dieser Belastungstheil zu der ganzen Senkung des Endpunktes B liefert, erhält man aus Gleichung 2), indem man darin x statt a und $p\,dx$ statt Q setzt, den Werth:

Fig. 27.

$$5)\quad df=\frac{p\,dx}{E \mathfrak{T}}\left\{\frac{x^3}{3}+\frac{(l-x)\,x^2}{2}\right\},$$

und wenn man diese Gleichung integrirt — auf der rechten Seite zwischen den Grenzen x_1 und x_2 — so erhält man für die ganze durch die Belastung der Strecke $x_2 - x_1$ hervorgebrachte Senkung des Endpunktes B (Fig. 28) die Gleichung:

$$6)\quad f = \frac{p}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{l\,(x_2^3 - x_1^3)}{6} - \left(\frac{x_2^4 - x_1^4}{24}\right)\right\}.$$

Für den Fall, in welchem die ganze Länge des Balkens belastet ist, hat man $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ zu setzen; man erhält dann für f den Werth:

$$7)\quad f = \frac{p\,l^4}{8\,E\mathfrak{T}},$$

also denselben Werth, welcher in Gleichung 23) des vorigen Paragraphen bereits auf anderem Wege gefunden wurde.

Fig. 28.

Auch die Grösse $\operatorname{tg}\omega$ in Fig. 28 kann auf dem Wege der Integration bestimmt werden. Nach Gleichung 1) hat der unendlich kleine Beitrag, welchen die Belastung $p\,dx$ zu derselben liefert, die Grösse:

$$8)\quad d\operatorname{tg}\omega = \frac{p\,dx\,x^2}{2\,E\mathfrak{T}}$$

und man erhält durch Integration dieses Ausdrucks für den in Fig. 28 dargestellten Belastungszustand die Gleichung:

$$9)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{p\,(x_2^3 - x_1^3)}{6\,E\mathfrak{T}},$$

welche nach Substitution der Werthe $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ die Form annimmt:

$$10)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{p\,l^3}{6\,E\mathfrak{T}},$$

also denselben Werth liefert, welcher in Gleichung 22) des vorigen Paragraphen bereits auf anderem Wege gefunden wurde.

Das Princip der „Zusammensetzung der Durchbiegungen“ lässt sich durch die nachfolgende tabellarische Zusammenstellung der bisher gewonnenen Resultate veranschaulichen.

	K	$\mathfrak{M}$	pl	Q	α
$\operatorname{tg}\omega$	$\frac{Kl^2}{2E\mathfrak{T}}$	$\frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}}$	$\frac{pl^3}{6E\mathfrak{T}}$	$\frac{Qa^2}{2E\mathfrak{T}}$	$\operatorname{tg}\alpha$
f	$\frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}}$	$\frac{\mathfrak{M}l^2}{2E\mathfrak{T}}$	$\frac{pl^4}{8E\mathfrak{T}}$	$\frac{Qa^3}{3E\mathfrak{T}}+(l-a)\frac{Qa^2}{2E\mathfrak{T}}$	$l\operatorname{tg}\alpha$

In dieser Tabelle sind die von fünf verschiedenen Ursachen herrührenden Beiträge zu den Grössen $\operatorname{tg}\omega$ und f zusammengestellt. Die mit der Ueberschrift „K" versehene Verticalcolumne enthält die Beiträge, welche eine am freien Ende des Balkens (auf die in Fig. **20** dargestellte Weise) wirkende Kraft K resp. zu den Grössen $\operatorname{tg}\omega$ und f liefert. In der folgenden ist durch die Ueberschrift „$\mathfrak{M}$" angedeutet, dass dieselbe die Beiträge enthält, welche ein am freien Ende des Balkens wirkendes Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M}$ zu jenen Grössen liefert (Fig. **23**). Auf analoge Weise sind die Ueberschriften der dann folgenden zwei Verticalcolumnen zu deuten, welche resp. auf die in Fig. **24** und Fig. **25** dargestellten Fälle sich beziehen. In der letzten endlich ist durch die Ueberschrift α angedeutet, dass die von einer um den Winkel α gegen die Horizontale geneigten Lage des Balkens an seiner Befestigungsstelle herrührenden Beiträge in derselben aufzusuchen sind.

Denkt man sich die in der Horizontalreihe neben „f" stehenden Ausdrücke sämmtlich durch Pluszeichen mit einander verbunden, so erhält man die Senkung des Endpunktes für den Fall, in welchem sämmtliche fünf Ursachen gleichzeitig vorhanden sind. Auf analoge Weise würde die Grösse $\operatorname{tg}\omega$ für diesen Fall zu bestimmen sein. Wenn die eine oder die andere jener fünf Ursachen in entgegengesetztem Sinne wirkt, so ist selbstverständlich vor den betreffenden Ausdruck statt des Pluszeichens das Minuszeichen zu setzen.

§ 7.

Balken auf zwei Stützen.

Jede von den beiden Hälften des in Fig. **29** dargestellten Balkens befindet sich genau in demselben Biegungszustande wie der in Fig. **30** dargestellte an einem Ende horizontal eingemauerte Balken. Denn die Anwendung der Gleichgewichts-Bedingungen auf

den letzteren ergiebt, dass die von der Wand auf den Balken übertragenen Kraftwirkungen ein Kräftepaar bilden vom Momente

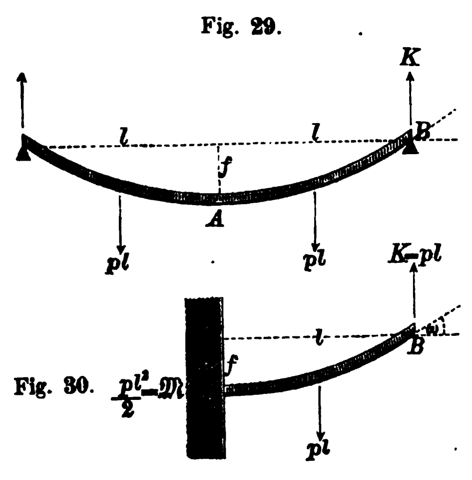


Fig. 29.

Fig. 30.

$\mathfrak{M} = \frac{pl^2}{2}$ (vergl. Fig. 18); und wenn man sich den Biegungszustand der linksseitigen Hälfte ebenfalls auf diese Weise veranschaulicht, so erkennt man, dass bei nachheriger Zusammensetzung die beiden Hälften auf einander gegenseitig das zum Gleichgewichte erforderliche Kräftepaar übertragen werden; folglich die Wände hinweggenommen werden können, ohne dass der Gleichgewichts-Zustand gestört wird.

Die Grössen tg ω und f sind daher zu berechnen nach den für Fig. 30 aus der Tabelle des vorigen Paragraphen sich ergebenden Gleichungen:

$$1)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{Kl^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{pl^3}{6E\mathfrak{T}} = \frac{pl^3}{3E\mathfrak{T}},$$

$$2)\quad f = \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{pl^4}{8E\mathfrak{T}} = \frac{5}{24}\,\frac{pl^4}{E\mathfrak{T}}.$$

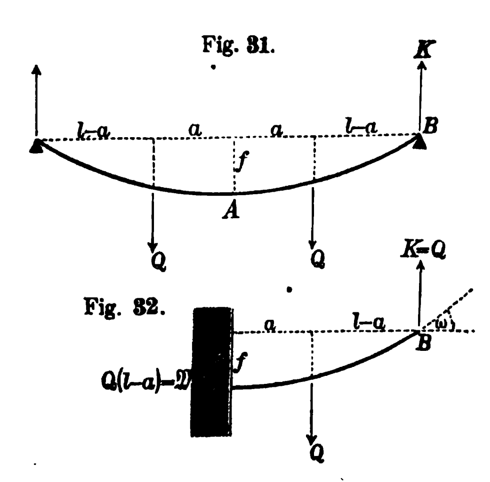


Fig. 31.

Fig. 32.

Auf analoge Weise erhält man für den in Fig. 31 dargestellten Fall, indem man die Tabelle des vorigen Paragraphen auf Fig. 32 anwendet, die Gleichungen:

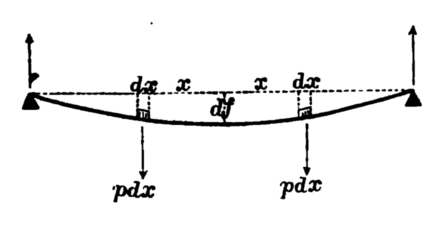
$$3)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{Kl^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{Qa^2}{2E\mathfrak{T}},$$

$$4)\quad f = \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}} - \left\{\frac{Qa^3}{3E\mathfrak{T}} + (l-a)\frac{Qa^2}{2E\mathfrak{T}}\right\},$$

welche nach Substitution des Werthes $K = Q$ die Formen annehmen:

$$5)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{Q(l^2 - a^2)}{2E\mathfrak{T}},$$

$$6)\quad f = \frac{Q}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{l^3}{3} + \frac{a^3}{6} - \frac{la^2}{2}\right\}.$$

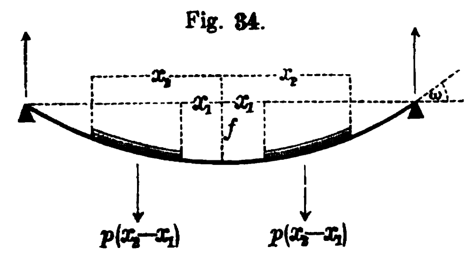


Setzt man in diesen Gleichungen x statt a und $p\,dx$ statt Q, so erhält man für die unendlich kleinen Beiträge, welche die in Fig. 33 angegebenen Belastungen resp. zu den Grössen $\operatorname{tg}\omega$ und f liefern, die Gleichungen:

$$7)\quad d\operatorname{tg}\omega = \frac{p\,dx\,(l^2 - x^2)}{2E\mathfrak{T}},$$

$$8)\quad df = \frac{p\,dx}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{l^3}{3} + \frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right\},$$

Fig. 34.



und wenn man alsdann die Integration ausführt, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen x_1 und x_2, so ergeben sich für den in Fig. 34 dargestellten Belastungszustand die Gleichungen:

$$9)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{p}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{l^2(x_2 - x_1)}{2} - \left(\frac{x_2^3 - x_1^3}{6}\right)\right\},$$

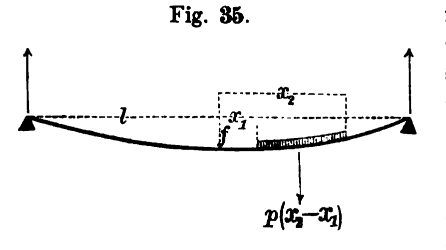
$$10)\quad f = \frac{p}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{l^3(x_2 - x_1)}{3} + \left(\frac{x_2^4 - x_1^4}{24}\right) - \frac{l(x_2^3 - x_1^3)}{6}\right\},$$

welche für $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ wiederum die in den Gleichungen 1) und 2) gefundenen Werthe liefern.

Offenbar liefert zu der Durchbiegung in der Mitte des Balkens die Belastung der linksseitigen Hälfte einen ebenso grossen Beitrag, wie die Belastung der rechtsseitigen Hälfte. Es folgt hieraus, dass diese Durchbiegung nur halb so gross wird, wenn die eine von den beiden Belastungshälften hinweggenommen wird. Bei dem in Fig. 35 dargestellten unsymmetrisch belasteten Balken ist also:

$$11)\quad f = \frac{p}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{l^3(x_2 - x_1)}{6} + \left(\frac{x_2^4 - x_1^4}{48}\right) - \frac{l(x_2^3 - x_1^3)}{12}\right\}.$$

Fig. 35.

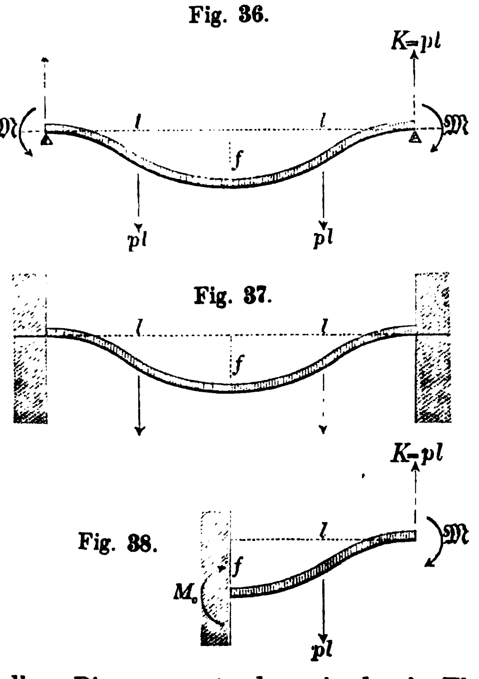


Auch zu dem Biegungsmomente in der Mitte liefert die eine Belastungshälfte einen ebenso grossen Beitrag, wie die andere. Es würde also z. B. in Fig. 29 das Hinwegnehmen der einen Belastungshälfte zur Folge haben, dass das Biegungsmoment in der Mitte auf den Werth $\frac{1}{2}\mathfrak{M} = \frac{p l^2}{4}$ vermindert wird. Ebenso würde in Fig. 31 das Hinwegnehmen des einen von den beiden Gewichten Q bewirken, dass das Biegungsmoment in der Mitte den Werth $\frac{1}{2}\mathfrak{M} = \frac{1}{2} Q(l - a)$ annimmt.

§ 8.

Balken mit eingemauerten Enden.

Denkt man sich an den beiden Enden des auf zwei Stützen ruhenden Balkens Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetzten Drehungsrichtungen angebracht, so erkennt man, dass durch Hinzufügung dieser Kräftepaare die Grösse des Neigungswinkels ω, welchen die elastische Linie über jedem Stützpunkte mit der Horizontalen einschliesst, eine Veränderung erleiden muss, und dass es für die Momente jener Kräftepaare eine bestimmte Grösse $\mathfrak{M}$ geben muss, bei welcher der Winkel ω gleich Null wird (Fig. 36). Wenn dies der Fall ist, so befindet sich offenbar der Balken genau in demselben Biegungszustande, wie der in Fig. 37 dargestellte Balken, dessen beide Enden in horizontaler Lage eingemauert sind.



Um die Grösse des Moments $\mathfrak{M}$ zu bestimmen, hat man auf die eine Balkenhälfte (Fig. 38) die Tabelle des § 6 anzuwenden und die algebraische Summe der von den drei Biegungsursachen K, pl, $\mathfrak{M}$ zu der Grösse tg ω gelieferten Beiträge gleich Null zu setzen. Man erhält dann die Gleichung:

$$1)\quad 0 = \frac{Kl^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{pl^3}{6E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}},$$

welche, für $\mathfrak{M}$ aufgelöst, nach Substitution des Werthes $K = pl$ die Form annimmt:

$$2)\quad \mathfrak{M} = \frac{pl^2}{3}.$$

Die Durchbiegung f setzt sich ebenfalls zusammen aus den Beiträgen, welche die obigen drei Biegungsursachen zu derselben liefern, und aus der Tabelle des § 6 ergiebt sich für diese Durchbiegung die Gleichung:

$$3)\quad f = \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{pl^4}{8E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}l^2}{2E\mathfrak{T}},$$

welche nach Substitution der für K und $\mathfrak{M}$ gefundenen Werthe die Form annimmt:

$$4)\quad f = \frac{pl^4}{24E\mathfrak{T}}.$$

Die graphische Darstellung der Biegungsmomente kann man aus Fig. 18 in der Weise ableiten, dass man von den Ordinaten der Curve in jener Figur überall die constante Grösse $\mathfrak{M} = \frac{pl^2}{3}$ subtrahirt (Fig. 39). Für die Ordinate im Abstande x von der Mitte ergiebt sich alsdann die allgemeine Gleichung:

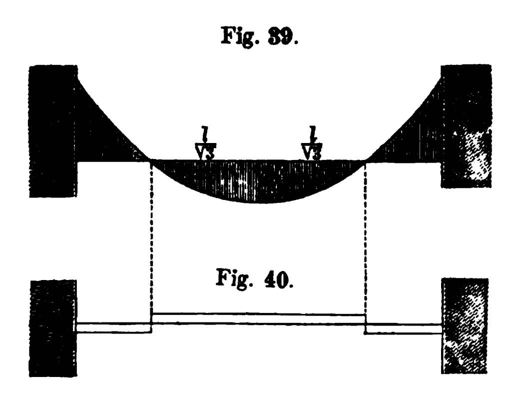


Fig. 39.

Fig. 40.

$$5)\quad M = p\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right) - \frac{pl^2}{3},$$

aus welcher man für die Grössen M und x die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe erhält:

$$x = 0, \qquad \pm \frac{l}{\sqrt{3}}, \qquad \pm l,$$

$$M = + \frac{pl^2}{6}, \qquad 0, \qquad - \frac{pl^2}{3}.$$

An den Stellen, wo das Biegungsmoment Null ist, sind die Biegungs-Spannungen ebenfalls Null. Man könnte also an diesen Stellen den Balken durchschneiden und eine Gelenk- oder Scharnier-Verbindung einschalten, ohne dass der Gleichgewichts-Zustand dadurch gestört wird. Hieraus folgt, dass auch bei der in Fig. 40 dargestellten Unterstützungsweise die einzelnen Balkenstücke genau in denselben Biegungszuständen sich befinden wie in Fig. 37.

Um für den in Fig. 41 dargestellten Belastungszustand die an der Befestigungsstelle B von der Wand auf den Balken übertragenen Kraftwirkungen zu bestimmen, hat man sich den Biegungszustand des Balkens zunächst auf die in Fig. 42 angedeutete Weise zu veranschaulichen und alsdann die Tabelle des § 6 auf diesen Fall in der Weise anzuwenden, dass man die algebraischen Summen der Beiträge, welche die drei Biegungsursachen $K, \mathfrak{M}, Q$ resp. zu den Grössen tg ω und f liefern, eine jede für sich gleich Null setzt. Man erhält dann die beiden Gleichungen:

Fig. 41.

Fig. 42.

$$6) \quad 0 = \frac{KL^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}L}{E\mathfrak{T}} - \frac{Qa^2}{2E\mathfrak{T}},$$

$$7) \quad 0 = \frac{KL^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}L^2}{2E\mathfrak{T}} - \left[\frac{Qa^3}{3E\mathfrak{T}} + (L-a)\frac{Qa^2}{2E\mathfrak{T}}\right],$$

und wenn abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{a}{L} = n$ gesetzt wird, so erhält man durch Auflösung derselben für die beiden unbekannten Grössen K und $\mathfrak{M}$ die Werthe:

$$8) \quad K = Q(3n^2 - 2n^3),$$

$$9) \quad \mathfrak{M} = QL(n^2 - n^3).$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für die Grössen n, $\frac{K}{Q}$, $\frac{\mathfrak{M}}{QL}$ die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$n = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\frac{K}{Q} = 0$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{32}$	1
$\frac{\mathfrak{M}}{QL} = 0$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{64}$	0

Da nach Vertauschung der Grösse n mit der Grösse $1 - n$ die obigen Gleichungen für die Kraftwirkungen K_1 und $\mathfrak{M}_1$ gelten würden, welche an der Befestigungsstelle A von der Wand auf den Balken übertragen werden, so ist es nicht erforderlich, für diese letzteren Grössen besondere Gleichungen aufzustellen.

Für das Biegungsmoment an der Belastungsstelle C ergiebt sich aus Fig. 42 die Gleichung:

$$10)\quad M = K(L - a) - \mathfrak{M},$$

welche nach Substitution der für die Grössen K und $\mathfrak{M}$ gefundenen Werthe die Form annimmt:

$$11)\quad M = 2\,QL\,(n^4 - 2n^3 + n^2).$$

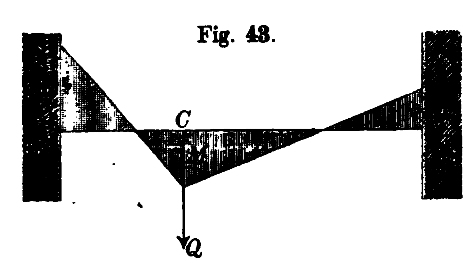


Fig. 43.

Nachdem die Biegungsmomente an den drei Stellen A, B, C auf solche Weise berechnet sind, kann die graphische Darstellung der Biegungsmomente nunmehr auf die in Fig. 43 angedeutete Art ausgeführt werden.

Wenn $\frac{x}{L}$ statt n, und $p\,dx$ statt Q gesetzt wird, so ergeben sich aus den beiden Gleichungen 8) und 9) für die unendlich kleinen Beiträge, welche die in Fig. 44 angegebene Belastung $p\,dx$ zu den Grössen K und $\mathfrak{M}$ liefert, die Werthe:

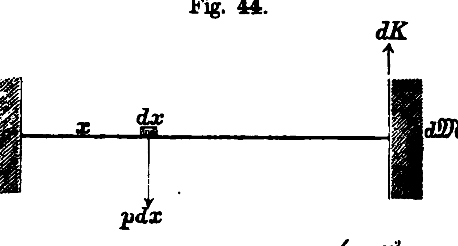


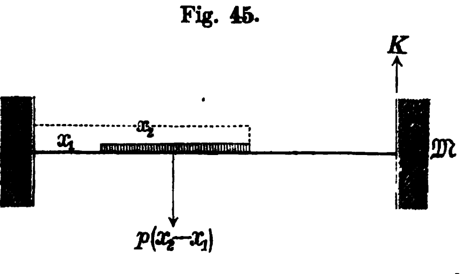
Fig. 44.

$$12)\quad dK = p\,dx\left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right),$$

$$13)\quad d\mathfrak{M} = p\,dx\,L\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right),$$

und durch Integration dieser Gleichungen erhält man alsdann die Werthe von K und $\mathfrak{M}$, welche dem in Fig. 45 dargestellten Belastungszustande entsprechen. Setzt man abkürzungsweise $\frac{x_1}{L} = n_1$ und $\frac{x_2}{L} = n_2$, so nehmen die Resultate dieser Rechnung die folgenden Formen an:

Fig. 45.



$$14)\quad K = p\,L\left\{(n_2^3 - n_1^3) - \frac{1}{2}(n_2^4 - n_1^4)\right\},$$

$$15)\quad \mathfrak{M} = p\,L^2\left\{\frac{1}{3}(n_2^3 - n_1^3) - \frac{1}{4}(n_2^4 - n_1^4)\right\}.$$

Für $n_1 = 0$ und $n_2 = 1$ ergeben sich hieraus wieder die Werthe $K = \frac{1}{2}p\,L$ und $\mathfrak{M} = \frac{1}{12}p\,L^2$, welche für den in Fig. 36 dargestellten Belastungszustand gefunden wurden.

Fig. 46.

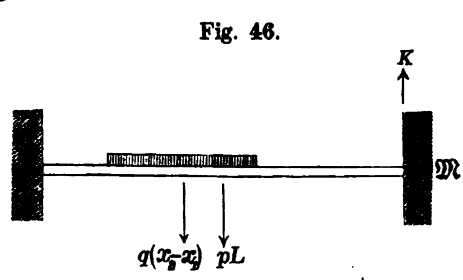
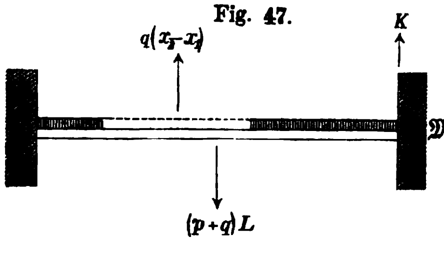


Fig. 47.



Wären ausser der in Figur 45 angegebenen Strecke $x_2 - x_1$ noch andere Strecken des Balkens mit gleichförmig vertheilten Belastungen versehen, so würde man die Bestimmung der Grössen K und $\mathfrak{M}$ durch Summation der von diesen verschiedenen Belastungen zu jenen Grössen gelieferten Beiträge ausführen können. So z. B. würde man für den in Fig. 46 dargestellten Fall, in welchem das eigene Gewicht des Balkens als eine gleichförmig über seine ganze Länge vertheilte Belastung von der Grösse $p\,L$ mit berücksichtigt werden soll, die Gleichungen erhalten:

$$16)\quad K = \frac{1}{2}p\,L + q\,L\left\{(n_2^3 - n_1^3) - \frac{1}{2}(n_2^4 - n_1^4)\right\},$$

$$17)\quad \mathfrak{M} = \frac{1}{12} p L^2 + q L^2 \left\{ \frac{1}{3} (n_2^3 - n_1^3) - \frac{1}{4} (n_2^4 - n_1^4) \right\}.$$

Dieses Verfahren kann auf negative sowohl als auf positive Belastungen angewendet werden. Da das Hinwegnehmen einer bestimmten Belastung auch aufgefasst werden kann als das Hinzufügen einer ebenso grossen negativen Belastung, so ergeben sich hiernach für den in Fig. 47 dargestellten Belastungszustand die Werthe:

$$18)\quad K = \frac{1}{2} (p + q) L - q L \left\{ (n_2^3 - n_1^3) - \frac{1}{2} (n_2^4 - n_1^4) \right\},$$

$$19)\quad \mathfrak{M} = \frac{1}{12} (p + q) L^2 - q L^2 \left\{ \frac{1}{3} (n_2^3 - n_1^3) - \frac{1}{4} (n_2^4 - n_1^4) \right\}.$$

§ 9.

Vortheilhafteste Unterstützungsweise für den Balken auf zwei Stützen.

Bei dem Balken mit horizontal eingemauerten Enden liegen — wie Fig. 39 zeigt — die Stellen, an welchen das Biegungsmoment die Grösse Null hat, im Abstande $\frac{l}{\sqrt{3}}$ von der Mitte; und es ergab sich zugleich, dass bei dieser Unterstützungsweise das Biegungsmoment an den beiden Enden:

$$1)\quad \mathfrak{M} = \frac{p l^2}{3}$$

seinem absoluten Werthe nach gerade doppelt so gross ist als das Biegungsmoment in der Mitte:

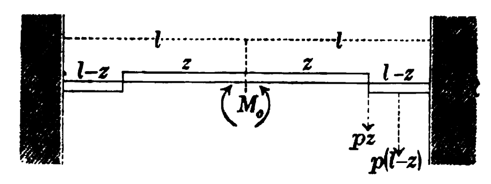
$$2)\quad M_0 = \frac{p l^2}{6}.$$

Wenn man sich den Biegungszustand des Balkens auf die in Fig. 40 angedeutete Art dadurch veranschaulicht, dass man sich an jenen Nullpunkten den Balken durchschnitten denkt, so erkennt man sogleich, dass durch Verlegung der beiden Schnittstellen weiter nach den Enden hin es möglich sein würde, einen solchen Biegungszustand herbeizuführen, bei welchem die Grösse $\mathfrak{M}$ als das grössere der beiden grössten Biegungsmomente einen kleineren Werth annimmt. Da jedoch mit einer solchen Verschiebung der Nullpunkte zugleich eine Vergrösserung des Biegungsmoments M_0 verbunden ist, so ergiebt sich ferner, dass der durch diese Verschiebung zu erreichende Vortheil dann am grössten wird, wenn

dieselbe so gewählt wird, dass die beiden Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ und M_0 einander gleich werden.

Bei der in Fig. 48 angegebenen Lage der beiden Nullpunkte hat das Biegungsmoment in der Mitte des Mittelstückes, welches als ein an beiden Enden frei aufliegender Balken zu betrachten ist (nach § 3, Gleichung 11), die Grösse:

Fig. 48.



$$3)\quad M_0 = \frac{p z^2}{2},$$

und das Biegungsmoment an jeder von den beiden Einmauerungsstellen hat die Grösse:

$$4)\quad \mathfrak{M} = p z (l - z) + \frac{p (l - z)^2}{2} = p \left(\frac{l^2 - z^2}{2}\right).$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Grössen erhält man für denjenigen Werth von z, bei welchem die beiden Biegungsmomente einander gleich werden, die Gleichung:

$$5)\quad \frac{p z^2}{2} = p \left(\frac{l^2 - z^2}{2}\right), \quad \text{oder:} \quad z = \frac{l}{\sqrt{2}},$$

und nach Substitution dieses Werthes erhält man aus einer der beiden Gleichungen 3) und 4) für das nunmehrige grösste Biegungsmoment den Werth:

$$6)\quad M_0 = \mathfrak{M} = \frac{p l^2}{4}.$$

Im Anfange des vorigen Paragraphen wurde gezeigt und durch Fig. 36 erläutert: wie man bei dem an beiden Enden frei aufliegenden Balken durch Anbringen von Kräftepaaren an den beiden Enden, und durch allmähliche Vergrösserung von deren Momenten $\mathfrak{M}$ bis zu der Grösse $\frac{p l^2}{3}$, denjenigen Biegungszustand herbeiführen kann, welcher der horizontalen Einmauerung entspricht. Denkt man sich statt dessen jene allmähliche Vergrösserung des Momentes $\mathfrak{M}$ nur so weit fortgesetzt, bis dasselbe die Grösse $\frac{p l^2}{4}$ erreicht hat, so erkennt man, dass in diesem letzteren Falle die einzelnen Theile des Balkens genau in denselben Biegungszuständen sich befinden würden, wie bei der in Fig. 48 dargestellten Unterstützungsweise. Man kann daher den erwähnten Vortheil — nämlich die Verkleinerung des grössten Biegungs-

momentes von der Grösse $\frac{pl^2}{3}$ bis auf die Grösse $\frac{pl^2}{4}$ — auch dadurch erreichen, dass man die beiden Enden des Balkens in schräger Lage einmauert (Fig. 49), und für den Neigungswinkel α, um welchen die Achse des Balkens an jeder von den beiden Einmauerungs-Stellen gegen die Horizontale geneigt sein muss, erhält man nach Fig. 50 mit Benutzung der Tabelle des § 6 die Gleichung:

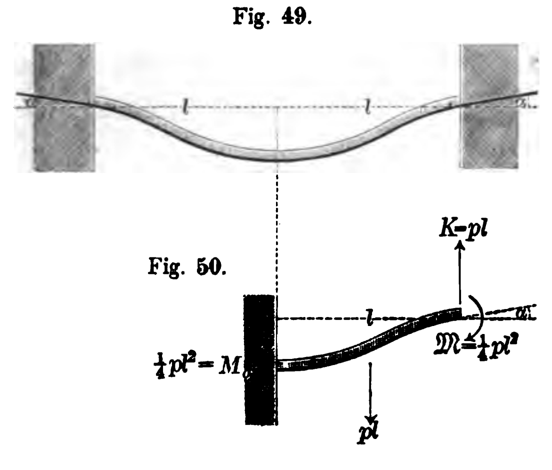


Fig. 49.

Fig. 50.

$$7)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{Kl^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{pl^3}{6E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}},$$

welche nach Substitution der Werthe $K = pl$ und $\mathfrak{M} = \frac{pl^2}{4}$ die Form annimmt:

$$8)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{pl^3}{12E\mathfrak{T}}.$$

Für die grösste Biegungs-Spannung in dem auf solche Weise unterstützten Balken erhält man nach § 2 (Gleichung 12) den Werth:

$$9)\quad S = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot \frac{pl^2}{4},$$

und wenn man hierin dem Buchstaben S die Bedeutung der praktisch zulässigen Spannung pro Quadratmillimeter der Querschnittsfläche beilegt, so kann man diese Gleichung zur Berechnung der Grösse $\mathfrak{T}$, als des Trägheitsmomentes der erforderlichen Querschnittsfläche des Balkens benutzen. Nach Substitution dieses Werthes nimmt die oben für tg α gefundene Gleichung die Form an:

$$10)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{E} \cdot \frac{l}{w}.$$

In dieser Gleichung bedeutet w die Entfernung der am weitesten von der Neutralen entfernt liegenden Faser, mithin bei symmetrisch in Bezug auf die neutrale Achse geformtem Quer-

schnitte die halbe Höhe des Balkens. Wenn also mit h die ganze Höhe und mit L die ganze Länge des Balkens zwischen den beiden Wänden bezeichnet wird, so ist der Winkel α zu bestimmen aus der Gleichung:

$$11)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\cdot\frac{S}{E}\cdot\frac{L}{h}.$$

Für Schmiedeisen würde $S = 6$ Kil. und $E = 20\,000$ zu setzen sein. Wenn also z. B. $\frac{L}{h} = 10$ ist, so wird:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{20\,000}\cdot 10 = \frac{1}{1000}.$$

Denkt man sich den auf zwei Stützen frei aufliegenden Balken nach jeder Seite hin so weit über den Stützpunkt hinaus verlängert, dass wiederum das Biegungsmoment über dem Stützpunkte den Werth $\frac{p\,l^2}{4}$ annimmt, so erkennt man, dass bei dem auf solche Weise unterstützten Balken ebenfalls die Bedingung der vortheilhaftesten Unterstützungsweise erfüllt ist, insofern auch hier wieder die absoluten Werthe der Biegungsmomente an den Stellen, wo dieselben ihr Maximum erreichen, einander gleich sind (Fig. 51 und Fig. 52). Die Länge $a - l$, um welche der Balken an jeder Seite über den Unterstützungspunkt hinausragen muss, ist zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 51.

Fig. 52.

$$12)\quad \frac{p\,(a-l)^2}{2} = \frac{p\,l^2}{4},\quad \text{oder:}\quad a - l = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Wenn also ein Balken von der gegebenen Länge $2a$ so auf zwei Stützen gelegt werden soll, dass das grösste Biegungsmoment den kleinstmöglichen Werth annimmt, so müssen die Stützpunkte im Abstande:

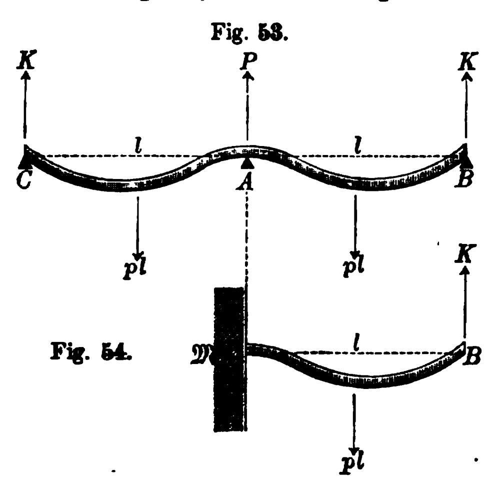
$$13)\quad l = \frac{a\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 0{,}5858\,.\,a$$

an beiden Seiten von der Mitte des Balkens entfernt liegen.

§ 10.

Balken auf drei Stützen.

Denkt man sich bei dem in Fig. 53 dargestellten Balken die eine Hälfte AC in eine feste Wand eingeschlossen, so erkennt man, dass die andere Hälfte AB in demselben Biegungszustande sich befindet, wie der an einem Ende horizontal eingemauerte Balken (Fig. 54), an welchem gleichzeitig zwei Biegungsursachen wirken, nämlich erstens der von dem Stützpunkte B auf den Balken übertragene Gegendruck K, zweitens die gleichförmig über seine Länge vertheilte Belastung pl. Die von diesen beiden Biegungsursachen an dem freien Endpunkte B hervorgebrachten Durchbiegungen heben einander gegenseitig auf; nach der Tabelle des § 6 ist also:



$$1)\quad 0 = \frac{pl^4}{8E\mathfrak{T}} - \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}},\quad \text{oder:}\quad K = \frac{3}{8}pl.$$

Für den Gegendruck der Mittelstütze A ergiebt sich hiernach der Werth:

$$2)\quad P = 2pl - 2K = \frac{10}{8}pl.$$

Das Biegungsmoment über der Mittelstütze ist nach Fig. 54 zu bestimmen aus der Gleichung:

$$3)\quad 0 = \frac{pl^2}{2} - Kl - \mathfrak{M}_1,\quad \text{oder:}\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{pl^2}{8}.$$

Für das Biegungsmoment an der im Abstande z von der Endstütze B befindlichen Stelle erhält man auf dieselbe Weise die Gleichung:

$$4)\quad 0 = \frac{pz^2}{2} - Kz - \mathfrak{M},\quad \text{oder:}\quad \mathfrak{M} = \frac{pz^2}{2} - Kz.$$

Derjenige Werth von z, für welchen die Grösse $\mathfrak{M}$ gleich Null wird, ist demnach zu bestimmen aus der Gleichung:

$$5)\quad 0 = \frac{p z^2}{2} - K z, \quad \text{oder:} \quad z = 2\,\frac{K}{p},$$

und die Stellen, an welchen das Biegungsmoment seinen grössten negativen Werth annimmt, findet man aus der Gleichung:

$$6)\quad 0 = \frac{d\mathfrak{M}}{dz} = p z - K, \quad \text{oder:} \quad z = \frac{K}{p} = \frac{3}{8}\,l.$$

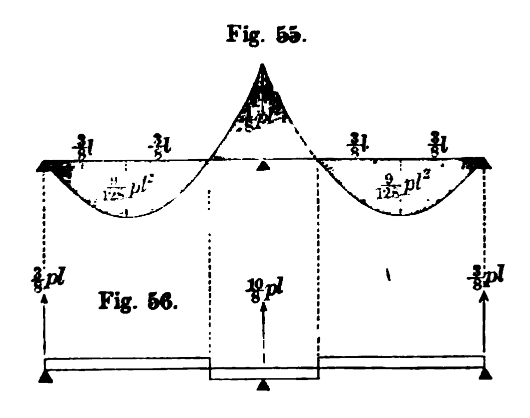


Fig. 55.

Fig. 56.

Nach Gleichung 4) hat das Biegungsmoment an diesen letzteren Stellen die Grösse:

$$7)\quad \mathfrak{M} = -\frac{K^2}{2p} = -\frac{p z^2}{2} = -\frac{9}{128}\,p l^2.$$

Die nach diesen Gleichungen in Fig. 55 ausgeführte graphische Darstellung der Biegungsmomente zeigt, dass die einzelnen Theile des Balkens in denselben Biegungszuständen sich befinden, wie bei der in Fig. 56 dargestellten Art der Unterstützung.

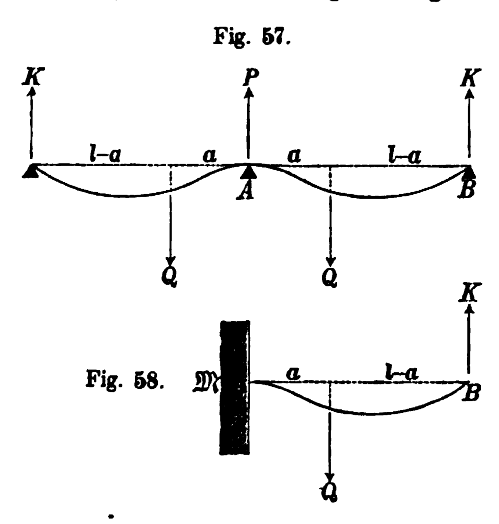


Fig. 57.

Fig. 58.

Um für den in Fig. 57 dargestellten Belastungszustand die Gegendrücke der drei Stützpunkte zu bestimmen, hat man sich den Biegungszustand der Balkenhälfte AB auf die in Fig. 58 angedeutete Weise zu veranschaulichen und die algebraische Summe der von den beiden biegenden Kräften Q und K am freien Endpunkte B hervorgebrachten Durchbiegungen gleich Null zu setzen. Aus der Tabelle des § 6 ergiebt sich für diesen Fall die Gleichung:

$$8) \quad 0 = \left[\frac{Q a^3}{3 E \mathfrak{T}} + (l - a) \frac{Q a^2}{2 E \mathfrak{T}}\right] - \frac{K l^3}{3 E \mathfrak{T}}.$$

Wenn man abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{a}{l} = n$ setzt, so erhält man aus dieser Gleichung für K den Werth:

$$9) \quad K = \frac{1}{2} Q (3 n^2 - n^3).$$

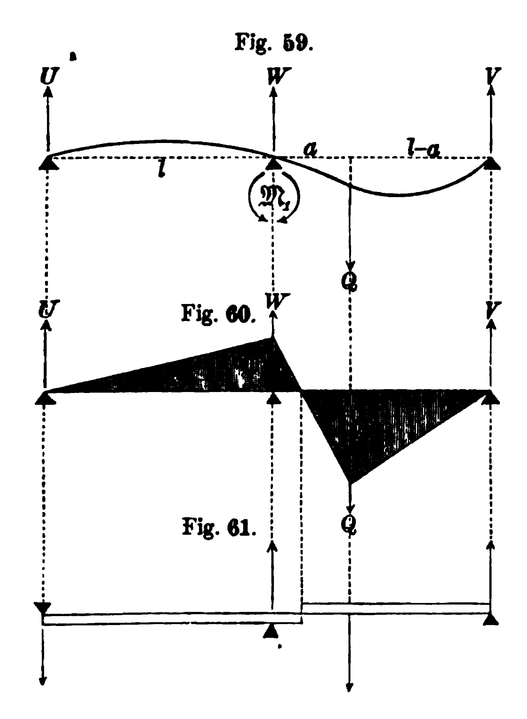
Den Gegendruck der Mittelstütze kann man nunmehr berechnen aus der Gleichung:

$$10) \quad P = 2 Q - 2 K = Q (2 - 3 n^2 + n^3),$$

und für das Biegungsmoment über der Mittelstütze erhält man nach Fig. 58 die Gleichung:

$$11) \quad \mathfrak{M} = Q a - K l = \frac{1}{2} Q l (2 n - 3 n^2 + n^3).$$

Offenbar liefert sowohl zu der Grösse P als auch zu der Grösse $\mathfrak{M}$ das eine von den beiden Gewichten Q einen ebenso grossen Beitrag wie das andere. Es wird daher das Hinwegnehmen eines von den beiden Gewichten Q zur Folge haben, dass der Gegendruck der Mittelstütze und das Biegungsmoment über derselben gerade halb so gross werden wie bei dem vorigen Falle. Für den in Fig. 59 dargestellten Belastungszustand ergeben sich hiernach die Gleichungen:



$$12) \quad W = \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} Q (2 - 3 n^2 + n^3),$$

$$13) \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{M} = \frac{1}{4} Q l (2 n - 3 n^2 + n^3).$$

Wenn man sich durch die Mitte des Balkens einen Schnitt gelegt denkt und alsdann für die Kräfte, welche auf die abgetrennte linke Balkenhälfte wirken, die algebraische Summe der statischen Momente in Bezug auf die Mittelstütze gleich Null setzt, so erhält man die Gleichung:

$$14) \quad 0 = Ul + \mathfrak{M}_1, \quad \text{oder:} \quad U = -\frac{\mathfrak{M}_1}{l}.$$

Nach Substitution des für $\mathfrak{M}_1$ gefundenen Ausdrucks liefert diese Gleichung für U den Werth:

$$15) \quad U = -\frac{1}{4} Q (2n - 3n^2 + n^3).$$

Man erkennt an der Form dieses Ausdrucks, dass an der unbelasteten Seite der vertical **aufwärts** gerichtete Gegendruck der Endstütze stets **negativ** ist, dass also in Wirklichkeit dieser Gegendruck vertical **abwärts** gerichtet ist.

Das gleiche Verfahren auf die andere Balkenhälfte angewendet, führt zu der Gleichung:

$$16) \quad 0 = Qa - Vl - \mathfrak{M}_1, \quad \text{oder:}$$

$$17) \quad V = \frac{1}{4} Q (2n + 3n^2 - n^3).$$

Der absolute Werth des Biegungsmomentes an der Belastungsstelle kann hiernach berechnet werden aus der Gleichung:

$$18) \quad \mathfrak{M}_2 = V(l - a) = Vl(1 - n).$$

Wenn z. B. $n = \frac{3}{8}$ ist, so wird $\mathfrak{M}_1 = \frac{195}{2048} Ql$ und $V = \frac{573}{2048} Q$, folglich nach Gleichung 18): $\mathfrak{M}_2 = Vl\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{2865}{16384} Ql$.

Nachdem die beiden Grössen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ auf solche Weise gefunden sind, kann man die graphische Darstellung der Biegungsmomente nunmehr auf die in Fig. 60 angegebene Weise ausführen, und die Biegungszustände in den einzelnen Theilen des Balkens kann man sich veranschaulichen, indem man sich den Balken auf die in Fig. 61 angedeutete Weise durchschnitten und unterstützt denkt.

Wenn $\frac{x}{l}$ statt n, und $q\,dx$ statt Q gesetzt wird, so ergeben sich für die unendlich kleinen Beiträge, welche die in Fig. 62 angegebene Belastung zu den Gegendrücken der drei Stützpunkte liefert, aus den Gleichungen 17), 12), 15) resp. die Werthe:

$$19)\quad dV = \frac{1}{4}\, q\, dx \left(2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$20)\quad dW = \frac{1}{2}\, q\, dx \left(2 - 3\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$21)\quad dU = -\frac{1}{4}\, q\, dx \left(2\frac{x}{l} - 3\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right),$$

Fig. 62.

und wenn man diese Gleichungen integrirt, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen x_1 und x_2, so erhält man für die Gegendrücke der Stützpunkte bei dem in Fig. 63 dargestellten Belastungszustande die Werthe:

$$22)\quad V = \frac{1}{4}\, ql \left\{\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{l^2}\right) + \left(\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{x_2^4 - x_1^4}{l^4}\right)\right\},$$

$$23)\quad W = \frac{1}{2}\, ql \left\{2\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) - \left(\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x_2^4 - x_1^4}{l^4}\right)\right\},$$

$$24)\quad U = -\frac{1}{4}\, ql \left\{\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{l^2}\right) - \left(\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x_2^4 - x_1^4}{l^4}\right)\right\}.$$

Wenn z. B. $x_1 = \frac{1}{4} l$ und $x_2 = \frac{3}{4} l$ ist, so wird: $V = \frac{53}{256} ql$, $W = \frac{86}{256} ql$ und $U = -\frac{11}{256} ql$.

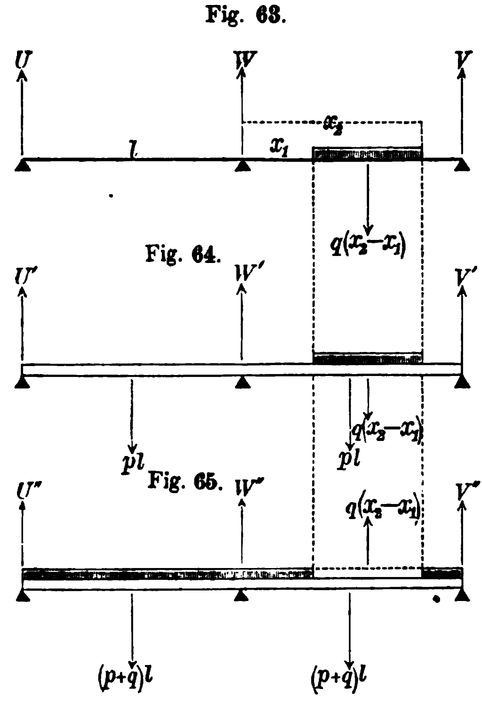
Wären ausser der Strecke $x_2 - x_1$ noch andere Strecken des Balkens belastet, so würde man die von diesen Belastungen zu den Gegendrücken gelieferten Beiträge noch hinzuzufügen haben. So z. B. würde man für den in Fig. 64 dargestellten Fall, bei welchem ausser jener Belastung noch das eigene Gewicht des Balkens als eine gleichförmig über die Länge desselben vertheilte Belastung mit berücksichtigt werden soll, durch Hinzufügung der aus den Gleichungen 1) und 2) zu entnehmenden Beiträge die Werthe erhalten:

$$25)\quad V' = \frac{3}{8} pl + V,$$

$$26)\quad W' = \frac{10}{8} pl + W,$$

$$27)\quad U' = \frac{3}{8} pl + U,$$

und für den in Fig. 65 dargestellten Fall, bei welchem die Entlastung der Strecke $x_2 - x_1$ als Hinzufügung einer **negativen** Belastung zu dem vollbelasteten Balken aufgefasst werden kann, ergeben sich die Werthe:



28) $V'' = \frac{3}{8}(p+q)\,l - V,$

29) $W'' = \frac{10}{8}(p+q)\,l - W,$

30) $U'' = \frac{3}{8}(p+q)\,l - U.$

Die Grössen V, W, U in den letzteren sechs Gleichungen haben dieselben Bedeutungen wie in den Gleichungen 22), 23) und 24).

Wenn man z. B. wie oben $x_1 = \frac{1}{4}\,l$ und $x_2 = \frac{3}{4}\,l$ setzt, so erhält man resp. für die in Fig. 64 und Fig. 65 dargestellten Belastungzustände die Gegendrücke:

$$V' = \frac{3}{8}\,p\,l + \frac{53}{256}\,q\,l, \quad W' = \frac{10}{8}\,p\,l + \frac{86}{256}\,q\,l, \quad U' = \frac{3}{8}\,p\,l - \frac{11}{256}\,q\,l,$$

$$V'' = \frac{3}{8}\,p\,l + \frac{43}{256}\,q\,l, \quad W'' = \frac{10}{8}\,p\,l + \frac{234}{256}\,q\,l, \quad U'' = \frac{3}{8}\,p\,l + \frac{107}{256}\,q\,l.$$

§ 11.

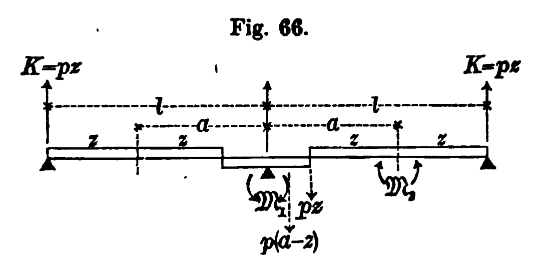
Vortheilhafteste Unterstützungsweise für den Balken auf drei Stützen.

Wenn bei gleichförmig über die Länge des Balkens vertheilter Belastung die drei Stützpunkte desselben in **gleicher** Höhe liegen, so haben — wie in Fig. 55 gezeigt wurde — die absoluten Werthe der Biegungsmomente an den Stellen, wo dieselben ihr Maximum erreichen, **ungleiche** Grössen; und zwar verhält sich das kleinere Maximum zu dem grösseren wie 9 zu 16. Die Stellen, an welchen das Biegungsmoment gleich Null ist, oder die Stellen, an welchen

man, ohne den Biegungszustand zu verändern, den Balken durchschneiden könnte, liegen bei dieser Unterstützungsweise an beiden Seiten im Abstande $\frac{1}{4} l$ von der Mittelstütze.

Um die vortheilhafteste Lage der Stützpunkte aufzufinden, oder diejenige Unterstützungsweise, bei welcher das grösste Biegungsmoment möglichst klein wird, hat man zunächst zu untersuchen: welche andere Lage diesen Nullpunkten oder Schnittstellen gegeben werden müsste, wenn jene Maximalwerthe der Biegungsmomente gleich gross werden sollen. Nach Fig. 66 hat das Biegungsmoment über der Mittelstütze die Grösse:

Fig. 66.



$$1)\quad \mathfrak{M}_1 = p z (a - z) + \frac{p (a - z)^2}{2} = p \left(\frac{a^2 - z^2}{2} \right),$$

und das Biegungsmoment in der Mitte jedes der beiden Endstücke hat den absoluten Werth:

$$2)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{p z^2}{2}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man für die Grösse a den Werth:

$$3)\quad a = z \sqrt{2},$$

und mit Benutzung desselben kann man nach Fig. 66 nunmehr die Grösse z bestimmen aus der Gleichung:

$$4)\quad z + z \sqrt{2} = l, \quad \text{oder:} \quad z = \frac{l}{1 + \sqrt{2}} = 0{,}414 \,.\, l.$$

Wenn die Lage der Schnittstellen dieser Bedingung entspricht, so haben die Gegendrücke der beiden Endstützen ein jeder die Grösse:

$$5)\quad K = p z = 0{,}414 \,.\, p l,$$

und die absoluten Werthe der Biegungsmomente haben an den drei Stellen, wo dieselben ihr Maximum erreichen, nunmehr die gemeinschaftliche Grösse:

$$6)\quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = 0{,}085\,786\, p l^2.$$

Dasselbe Resultat würde man auch durch die in Fig. 67 dargestellte Unterstützungsweise erreichen können, bei welcher die drei Balkenstücke in gleicher Höhe liegend an den beiden Schnittstellen durch Scharniere verbunden sind, und da nach dem Gesetze des Hebels für die Gegendrücke der drei Stützpunkte genau dieselben Werthe sich ergeben, wenn nur an einer von jenen beiden Stellen der Balken durchschnitten ist, so kann statt dessen auch die in Fig. 68 dargestellte Unterstützungsweise gewählt werden.

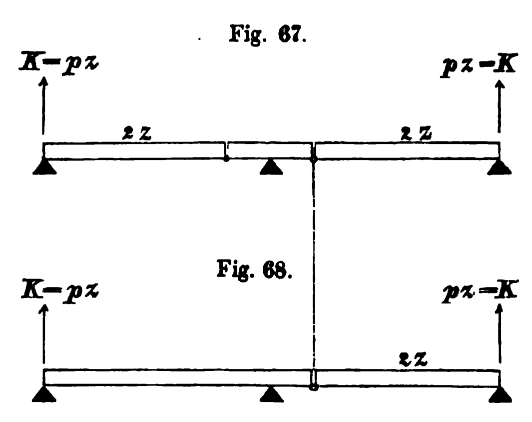


Fig. 67.

Fig. 68.

Auch bei dem continuirlichen (nicht durchschnittenen) Balken auf drei Stützen sind — wie die Gleichung 5) des vorigen Paragraphen zeigt — der Gegendruck der Endstütze und ihr Abstand von dem Nullpunkte Grössen, welche einander gegenseitig bedingen, in solcher Weise, dass jedem bestimmten Werthe von K ein bestimmter zugehöriger Werth von z entspricht. Wenn also bei dem continuirlichen Balken Fig. 53 durch irgend eine Veränderung der Unterstützungsweise bewirkt würde, dass der Gegendruck jeder von den beiden Endstützen die Grösse $0{,}414\,pl$ — statt $\frac{3}{8}pl$ — annimmt, so würden auch die Nullpunkte diejenige Lage annehmen, welche dem oben gefundenen Werthe $z = 0{,}414 \,.\, l$ entspricht.

Denkt man sich in Fig. 53 die Mittelstütze das eine Mal so weit gehoben, bis der Balken die beiden Endstützen nicht mehr berührt, und das andere Mal so weit gesenkt, bis der Balken die Mittelstütze nicht mehr berührt und nur noch von den beiden Endstützen getragen wird, so erkennt man leicht, dass die Grösse K jeden beliebigen zwischen den Grenzen 0 und pl liegenden Werth annehmen kann — je nachdem der Mittelstütze eine höhere oder tiefere Lage gegeben wird. Man kann daher den erstrebten Vortheil auch durch eine Senkung der Mittelstütze erreichen, indem man diese Senkung gerade so weit vergrössert, bis die Gegen-

drücke der Endstützen die Grösse $K = 0{,}414\,pl$ erreicht haben (Fig. 69). Um die Grösse der erforderlichen Senkung zu berechnen, hat man sich den Biegungszustand der Balkenhälfte AB auf die in Fig. 70 dargestellte Weise zu veranschaulichen und die Tabelle des § 6 auf diesen Fall anzuwenden. Für die von den beiden Biegungsursachen K und pl hervorgebrachte Durchbiegung erhält man nach jener Tabelle die Gleichung:

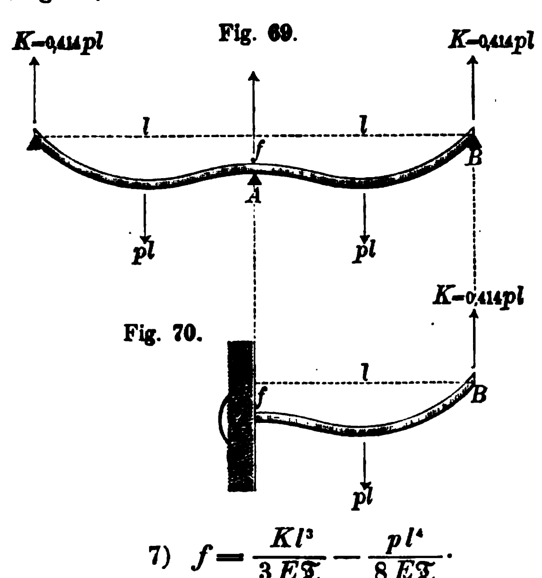


Fig. 69.

Fig. 70.

$$7)\quad f = \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{pl^4}{8E\mathfrak{T}}.$$

In dieser Gleichung ist für K der vorgeschriebene Werth zu substituiren. Die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze hat also die Grösse:

$$8)\quad f = \frac{0{,}414\,pl\,.\,l^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{pl^4}{8E\mathfrak{T}} = 0{,}013\,07\,\frac{pl^4}{E\mathfrak{T}}.$$

Wenn für den Balken diese Unterstützungsweise gewählt wird, so ist das grösste Biegungsmoment nach Gleichung 6) zu berechnen; folglich hat die grösste Biegungs-Spannung (nach § 2, Gleichung 12) die Grösse:

$$9)\quad S = \frac{w}{\mathfrak{T}}\cdot 0{,}085\,786\,pl^2,$$

und wenn man hierin der Grösse S die Bedeutung der praktisch zulässigen Spannung (pro Quadratmillimeter der Querschnittsfläche) beilegt, so kann man diese letztere Gleichung zur Berechnung der Grösse $\mathfrak{T}$, als des erforderlichen Trägheitsmomentes der Querschnittsfläche benutzen. Nach Substitution dieses Werthes für $\mathfrak{T}$ nimmt die oben für f gefundene Gleichung die Form an:

$$10)\quad f = 0{,}152\,37\cdot\frac{S}{E}\cdot\frac{l^2}{w}.$$

In dieser Gleichung bedeutet w die Entfernung der am stärksten gespannten Faser von der Neutralen — mithin bei symmetrisch in Bezug auf die neutrale Achse geformtem Querschnitte die halbe Höhe desselben. Wenn also mit h die ganze Höhe und mit L die ganze Länge des Balkens bezeichnet wird, so ist die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze zu bestimmen aus der Gleichung:

$$11)\quad f = 0{,}076\,185 \cdot \frac{S}{E} \cdot \frac{L^2}{h}.$$

Für Schmiedeisen würde $S = 6$ Kil. und $E = 20\,000$ zu setzen sein. Für einen schmiedeisernen Brückenbalken von der Höhe $h = 10\,000^{mm}$ und der Länge $L = 200\,000^{mm}$ hat also die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze die Grösse:

$$f = 0{,}076\,185 \cdot \frac{6}{20\,000} \cdot \frac{200\,000^2}{10\,000} = 91{,}4^{mm}.$$

Der durch solche Unterstützungsweise erreichte Vortheil besteht darin: dass das grösste Biegungsmoment im Verhältniss 0,125 : 0,086 verkleinert worden ist (vergl. § 10, Gleichung 3, und § 11, Gleichung 6).

§ 12.

Balken auf vier Stützen.

Das Biegungsmoment über einer von den beiden Mittelstützen hat nach Fig. 71 die Grösse:

$$1)\quad \mathfrak{M} = \frac{p\,(l-a)^2}{2} - K\,(l-a).$$

Die Biegungszustände der drei Abtheilungen des Balkens kann man sich durch die Figuren 72, 73, 74 veranschaulichen. Aus Fig. 74 erhält man nach der Tabelle des § 6, indem man die Durchbiegung am freien Endpunkte C nach derselben berechnet und die algebraische Summe der von den drei Ursachen α, K $p\,(l-a)$ zu dieser Durchbiegung gelieferten Beiträge gleich Null setzt, die Gleichung:

$$2)\quad 0 = \frac{K\,(l-a)^3}{3\,E\mathfrak{T}} - \frac{p\,(l-a)^4}{8\,E\mathfrak{T}} + (l-a)\operatorname{tg}\alpha.$$

Die Grösse $\operatorname{tg}\alpha$ kann man nach Fig. 72 berechnen. Denkt man sich die linksseitige Hälfte dieser Abtheilung in eine feste Wand eingeschlossen, so erkennt man, dass für die rechtsseitige Hälfte die Grösse $\operatorname{tg}\alpha$ wiederum nach der Tabelle des § 6 berechnet werden kann, und man erhält durch Summation der von den drei auf die rechtsseitige Hälfte wirkenden Biegungsursachen zu der Grösse $\operatorname{tg}\alpha$ gelieferten Beiträge für dieselbe den Ausdruck:

$$3)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{p\,a\,.\,a^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}\,a}{E\mathfrak{T}} - \frac{p\,a^3}{6\,E\mathfrak{T}}.$$

Diesen Ausdruck hat man nach Substitution des oben für $\mathfrak{M}$ gefundenen Werthes in Gleichung 2) für $\operatorname{tg}\alpha$ zu substituiren. Man erhält dann eine Gleichung, aus welcher die Grösse K als einzige noch unbekannte Grösse berechnet werden kann. Wenn man in dieser Gleichung abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{a}{l} = n$ setzt, so nimmt dieselbe für K aufgelöst die Form an:

$$4)\quad K = \frac{pl}{8}\left\{\frac{3 + 3n - 15n^2 + n^3}{1 + n - 2n^2}\right\}.$$

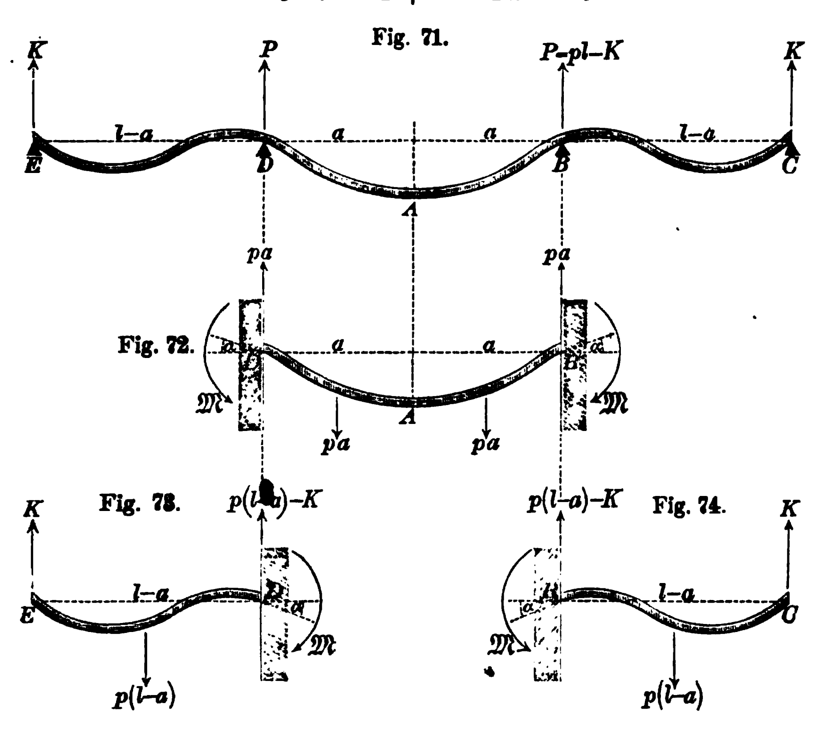


Fig. 71. Fig. 72. Fig. 73. Fig. 74.

Für den Gegendruck jeder von den beiden Mittelstützen ergiebt sich hiernach der Werth:

$$5)\quad P = pl - K = \frac{pl}{8}\left\{\frac{5 + 5n - n^2 - n^3}{1 + n - 2n^2}\right\}.$$

Wenn z. B. die vier Stützpunkte in gleichen Abständen von einander liegen, so ist $n = \frac{1}{3}$ zu setzen, und man erhält aus den letzteren beiden Gleichungen die Werthe:

$$K = \frac{4}{15}\,p\,l, \qquad P = \frac{11}{15}\,p\,l.$$

Die graphische Darstellung der Biegungsmomente kann für die mittlere Abtheilung auf dieselbe Weise wie in Fig. 39, und für jede von den beiden Seiten-Abtheilungen auf dieselbe Weise wie in Fig. 55 ausgeführt werden. Der allgemeine Ausdruck für das Biegungsmoment an der im Abstande x von der Mitte befindlichen Stelle hat, wenn die Stelle der mittleren Abtheilung angehört, die Form:

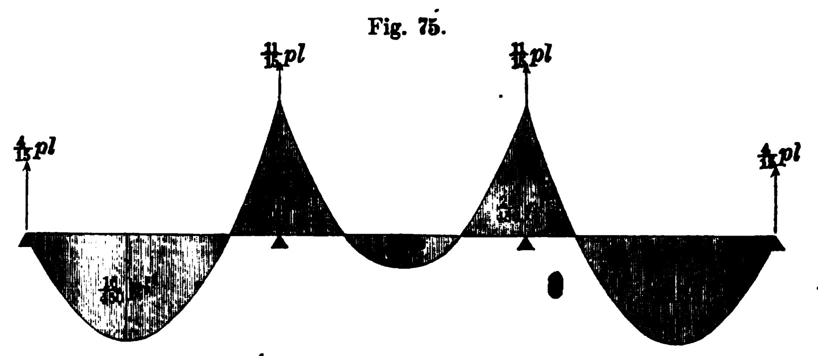
$$6)\quad M = \frac{p\,(l-x)^2}{2} - P\,(a-x) - K\,(l-x).$$

Wenn dagegen die Stelle einer von den beiden Seiten-Abtheilungen angehört, so ist das Biegungsmoment zu bestimmen aus der Gleichung:

$$7)\quad M = \frac{p\,(l-x)^2}{2} - K\,(l-x).$$

Die hiernach in Fig. 75 ausgeführte graphische Darstellung der Biegungsmomente zeigt, dass für den oben als Beispiel ge-

Fig. 75.



wählten Fall: $n = \frac{1}{3}$ die absoluten Werthe der Biegungsmomente an den fünf Stellen, wo dieselben ihr Maximum erreichen, sich verhalten wie 16 : 20 : 5 : 20 : 16.

§ 13.

Vortheilhafteste Unterstützungsweise für den Balken auf vier Stützen.

Denkt man sich den Balken auf die in Fig. 76 angedeutete Weise durchschnitten und unterstützt, so findet man — auf dieselbe Weise wie in § 11 aus Fig. 66 sich ergeben hatte — dass:

$$1)\quad a = z\sqrt{2}$$

sein muss, wenn die absoluten Werthe der Maximalmomente ein-

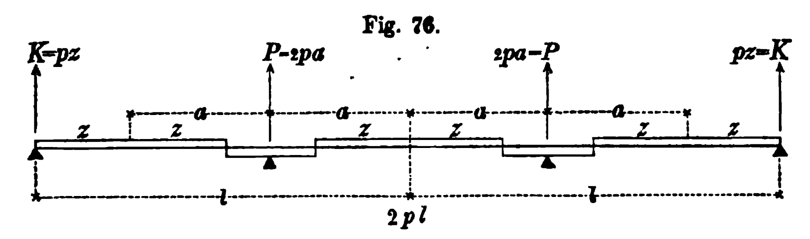
ander gleich sein sollen. Wenn man in der aus Fig. 76 zu entnehmenden Gleichung:

$$2)\quad z + 2a = l$$

den obigen Werth für a substituirt, so nimmt dieselbe für z aufgelöst die Form an:

$$3)\quad z = \frac{l}{1 + 2\sqrt{2}} = 0{,}2612 \,.\, l.$$

Fig. 76.



Die absoluten Werthe der Maximalmomente haben bei dieser Unterstützungsweise die gemeinschaftliche Grösse:

$$4)\quad \mathfrak{M} = \frac{p z^2}{2} = 0{,}0341 \,.\, p l^2,$$

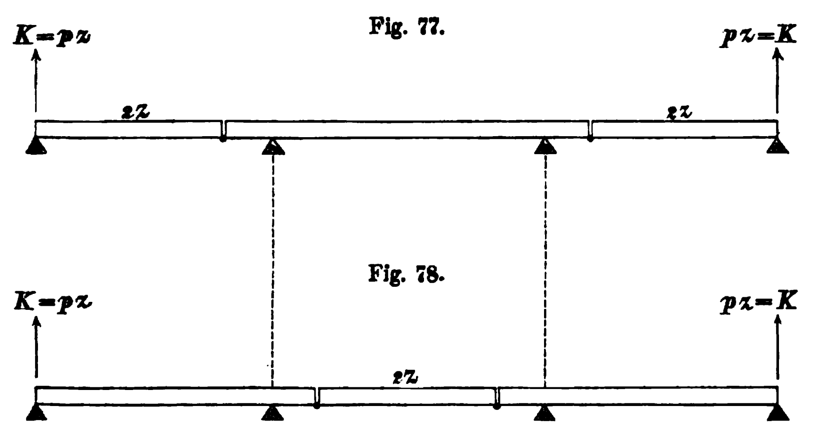
und für die Gegendrücke der Stützpunkte ergeben sich nach Fig. 76 die Werthe:

$$5)\quad K = p z = 0{,}2612 \,.\, p l,$$

$$6)\quad P = 2 p a = 0{,}7388 \,.\, p l.$$

Dasselbe Resultat würde mittelst der in Fig. 76 dargestellten Unterstützungsweise auch dann erreicht werden können, wenn die

Fig. 77.

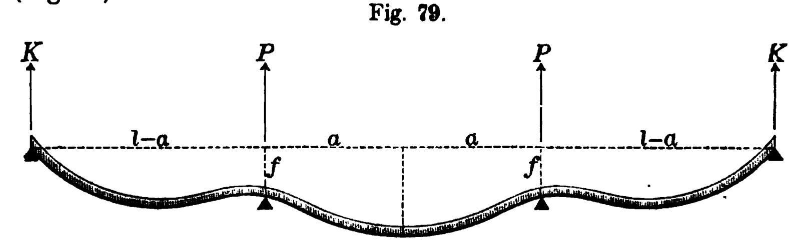


fünf Balkenstücke in gleicher Höhe liegend an den Schnittstellen durch Scharniere verbunden wären. Da nach dem Gesetze des

Hebels für die Gegendrücke der vier Unterstützungspunkte genau dieselben Werthe sich ergeben, wenn in Fig. 76 entweder die beiden mittleren oder die beiden äusseren Schnittstellen fortgelassen werden, so kann statt der obigen auch die in Fig. 77 oder die in Fig. 78 dargestellte Unterstützungsweise gewählt werden.

Wenn man bei dem continuirlichen (nicht durchschnittenen) Balken die Stützpunkte so legt, dass die Nullpunkte der Biegungsmomente dieselben Lagen erhalten wie die Schnittstellen in Fig. 76, so werden auch die Maximalmomente bei dem continuirlichen Balken dieselben Werthe annehmen wie bei dem durchschnittenen Balken. Um also für den continuirlichen Balken die vortheilhafteste Unterstützungsweise herzustellen, hat man die Horizontal-Abstände der Stützpunkte so zu wählen, wie oben in Bezug auf Fig. 76 gefunden wurde, und alsdann die Mittelstützen so weit zu senken, dass die Gegendrücke der Stützpunkte ebenfalls die oben (in den Gleichungen 5 und 6) gefundenen Werthe annehmen (Fig. 79).

Fig. 79.



Zur Berechnung dieser vortheilhaftesten Senkung der Mittelstützen kann man die Gleichung 2) des vorigen Paragraphen benutzen, indem man darin auf der linken Seite die Grösse „f“ an die Stelle von Null setzt und für tg α den Werth aus Gleichung 3) des vorigen Paragraphen substituirt. Man erhält dann die Gleichung:

$$7)\quad f = \frac{K(l-a)^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{p(l-a)^4}{8E\mathfrak{T}} + (l-a)\left(\frac{pa^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}a}{E\mathfrak{T}}\right),$$

welche nach Substitution der oben für die Grössen a, K, $\mathfrak{M}$ gefundenen Ausdrücke den Werth liefert:

$$8)\quad f = 0{,}004\,712 \cdot \frac{pl^4}{E\mathfrak{T}}.$$

Wenn der Balken auf solche Weise unterstützt ist, so hat das grösste Biegungsmoment den in Gleichung 4) angegebenen Werth; also ist das Trägheitsmoment des erforderlichen Querschnitts zu berechnen aus der Gleichung:

9) $\frac{S}{w}\mathfrak{T} = 0{,}0341 \,.\, pl^2,$

in welcher S die praktisch zulässige Spannung (pro Quadratmillimeter) und $w = \frac{1}{2}h$ die halbe Höhe des (symmetrisch vorausgesetzten) Querschnitts bedeutet. Nach Substitution des hieraus für die Grösse $\mathfrak{T}$ sich ergebenden Werthes nimmt die oben für f gefundene Gleichung die Form an:

10) $f = 0{,}2764 \cdot \frac{S}{E} \cdot \frac{l^2}{h}.$

Für einen schmiedeisernen Brückenträger würde $E = 20\,000$ und $S = 6$ Kil. zu setzen sein. Wenn also z. B. die Länge $2l = 300\,000^{mm}$, und die Höhe $h = 10\,000^{mm}$ ist, so hat die vortheilhafteste Senkung der Mittelstützen die Grösse:

$$f = 0{,}2764 \cdot \frac{6}{20\,000} \cdot \frac{150\,000^2}{10\,000} = 186^{mm}{,}6.$$

Man erhält ferner aus den Gleichungen 3) und 1) resp. für die Grössen z und a die Werthe:

$$z = 39\,180^{mm} \quad \text{und} \quad a = 39\,180 \,.\, \sqrt{2} = 55\,410^{mm}.$$

Es muss also der Mittelöffnung die Grösse $2a = 110\,820^{mm}$, und jeder von den beiden Seitenöffnungen die Grösse $l - a = 94\,590^{mm}$ gegeben werden.

§ 14.

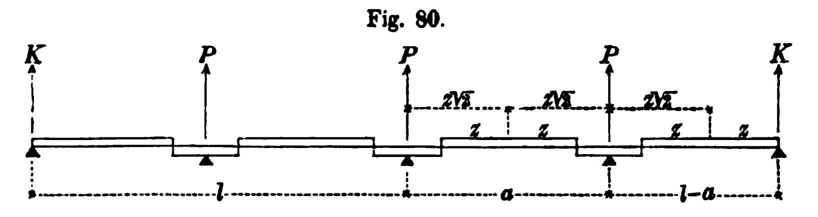
Balken auf fünf Stützen.

Für die vortheilhafteste Lage der Schnittstellen (oder Nullpunkte der Biegungsmomente) erhält man nach Fig. 80 die Gleichungen:

1) $z + 3z\sqrt{2} = l,$ oder: $z = \frac{l}{1 + 3\sqrt{2}} = 0{,}190\,74 \,.\, l,$

2) $a = 2z\sqrt{2} = 0{,}5395 \,.\, l.$

Fig. 80.



Bei dieser Lage der Schnittstellen ergeben sich für die Gegendrücke der Stützpunkte die Werthe:

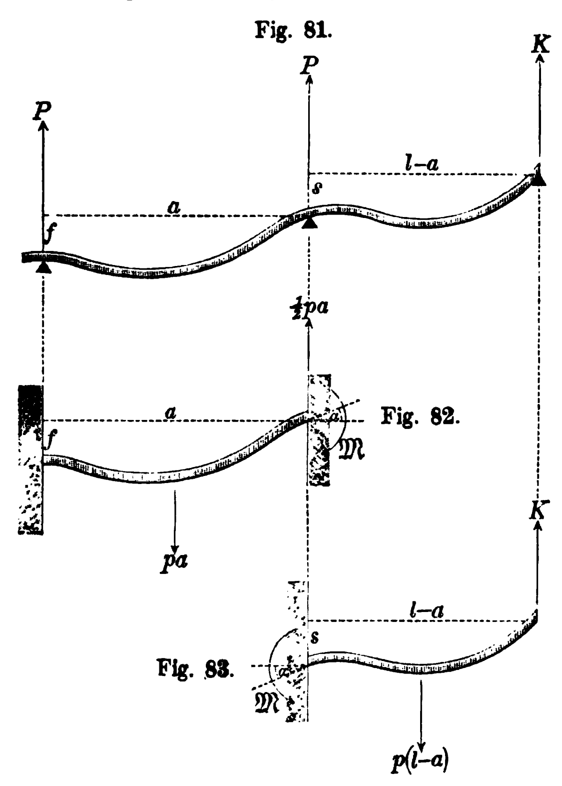
3) $K = pz = 0{,}190\,74 \,.\, pl,$

4) $P = pa = 0{,}5395 \,.\, pl,$

und die Maxima der absoluten Werthe der Biegungsmomente haben die gemeinschaftliche Grösse:

$$5)\quad \mathfrak{M} = \frac{p z^2}{2} = 0{,}018\,19\, p l^2.$$

Um bei dem continuirlichen (nicht durchschnittenen) Balken den gleichen Biegungszustand herzustellen, hat man die Horizontal-Abstände der Stützpunkte so zu wählen, wie oben in Bezug auf Fig. 80 gefunden wurde, und alsdann die Mittelstützen so weit zu senken, dass die Druckvertheilung auf die Stützen ebenfalls dieselbe wird wie in Fig. 80. Die hierzu erforderlichen Senkungen der Mittelstützen kann man nach Fig. 81 berechnen, indem man sich die Biegungszustände der beiden Abtheilungen auf die in Fig. 82 und Fig. 83 angedeutete Weise veranschaulicht.



Für die Durchbiegung f und die Grösse $\operatorname{tg}\alpha$ erhält man aus Fig. 82 (nach der Tabelle des § 6) die Gleichungen:

$$6)\quad f = \frac{\left(\frac{1}{2} p a\right) a^3}{3 E\mathfrak{T}} - \frac{p a^4}{8 E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M} a^2}{2 E\mathfrak{T}},$$

$$7)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\left(\frac{1}{2} p a\right) a^2}{2 E\mathfrak{T}} - \frac{p a^3}{6 E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M} a}{E\mathfrak{T}},$$

welche nach Substitution der oben für die Grössen a und $\mathfrak{M}$ gefundenen Werthe die Formen annehmen:

8) $f = 0{,}000\,882\,5 \cdot \frac{p l^4}{E \mathfrak{T}}$, 9) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}003\,27 \cdot \frac{p l^3}{E \mathfrak{T}}$.

Auf ähnliche Weise kann man die Grösse s nach Fig. **83** berechnen. Die Anwendung der Tabelle des § 6 führt zunächst zu der Gleichung:

$$10)\quad s = \frac{K(l-a)^3}{3 E \mathfrak{T}} - \frac{p\,(l-a)^4}{8 E \mathfrak{T}} + (l-a) \operatorname{tg} \alpha,$$

und nach Substitution der für die Grössen K, a, $\operatorname{tg} \alpha$ gefundenen Ausdrücke erhält man für die Höhendifferenz s den Werth:

$$11)\quad s = 0{,}002\,094 \cdot \frac{p l^4}{E \mathfrak{T}}.$$

Da bei dieser Unterstützungsweise das grösste Biegungsmoment den in Gleichung 5) angegebenen Werth annimmt, so kann das Trägheitsmoment der erforderlichen Querschnittsfläche berechnet werden aus der Gleichung:

$$12)\quad \frac{S}{\frac{1}{2} h} \mathfrak{T} = 0{,}018\,19\, p l^2,$$

und nach Substitution des aus dieser Gleichung für die Grösse $\mathfrak{T}$ zu entnehmenden Werthes erhält man aus den Gleichungen 8) und 11) für die vortheilhaftesten Senkungen f und s die Werthe:

$$13)\quad f = 0{,}097\,027 \cdot \frac{S}{E} \cdot \frac{l^2}{h},$$

$$14)\quad s = 0{,}230\,26 \cdot \frac{S}{E} \cdot \frac{l^2}{h}.$$

Für einen schmiedeisernen Brückenträger von der Länge $2l = 400\,000^{mm}$ und der Höhe $h = 10\,000^{mm}$ würde man $S = 6$ Kil. und $E = 20\,000$ zu setzen haben; man erhält dann die Werthe:

$$f = 116^{mm},4 \quad \text{und} \quad s = 276^{mm},3.$$

Es ergeben sich ferner nach Gleichung 2) für die erforderlichen Horizontalabstände der Stützen die Werthe: $a = 107\,900^{mm}$, $l - a = 92\,100^{mm}$.

§ 15.

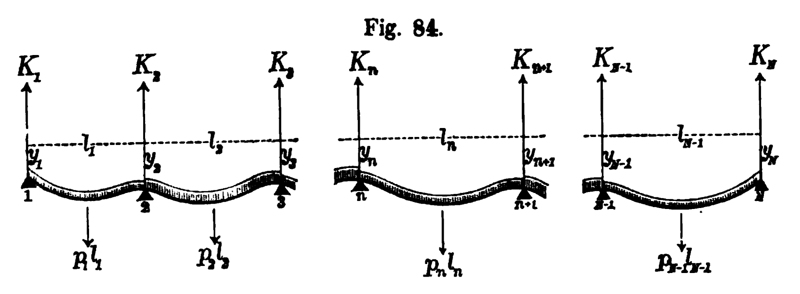
Allgemeine Theorie des Balkens auf N Stützen.*)

Wenn man bei dem in Fig. **84** dargestellten Balken an irgend einer Stelle innerhalb der n-ten Abtheilung einen Verticalschnitt durch den Balken hindurch legte, so würde man, um das Gleich-

*) Nach Mohr's „Beiträgen zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen“ (Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, Jahrgang 1860).

gewicht wieder herzustellen, bei jedem der beiden durch den Schnitt getrennten Balkentheile an der Schnittstelle irgend ein Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M}$ und irgend eine Verticalkraft von

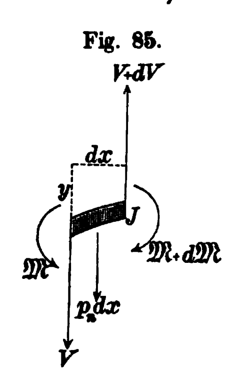
Fig. 84.



der Grösse V hinzufügen müssen. Das Moment $\mathfrak{M}$ wird das Biegungsmoment und die Kraft V wird die verticale Abscheerungskraft (oder auch kurzweg die Verticalkraft) für die betreffende Stelle genannt.

Die Beziehungen, welche zwischen den beiden Grössen V und $\mathfrak{M}$ stattfinden, können aus der Fig. 85 entnommen werden, welche den Gleichgewichtszustand des zwischen zwei benachbarten Verticalschnitten befindlichen Balkenstückes von der unendlich kleinen Länge dx veranschaulicht. Wenn man die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf dieses Stück wirkenden Kräfte in Bezug auf den Drehpunkt J gleich Null setzt, so erhält man die Gleichung:

Fig. 85.



$$0 = (\mathfrak{M} + d\mathfrak{M}) - \mathfrak{M} - V dx - \frac{1}{2} p_n dx^2,$$

welcher man nach Weglassung des letzten Gliedes (als einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung) auch die Form geben kann:

$$1) \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = V;$$

und wenn man ein anderes Mal die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null setzt, so erhält man die Gleichung:

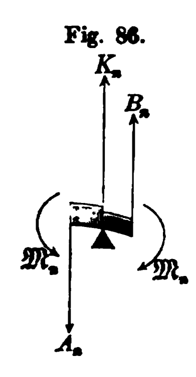
$$0 = (V + dV) - V - p_n dx, \quad \text{oder:}$$

$$2) \quad \frac{dV}{dx} = p_n = \frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}.$$

Die Verticalkraft V ist eine Grösse, welche innerhalb der zwischen zwei benachbarten Stützpunkten liegenden Strecke stetig

sich ändert. An jedem Stützpunkte selbst aber ändert sich dieselbe sprungweise um eine Grösse, welche gleich dem Gegendrucke dieses Stützpunktes ist. Wenn allgemein mit A der Werth bezeichnet wird, welchen die Grösse V unmittelbar **links** neben einem Stützpunkte annimmt, und mit B der Werth, welchen dieselbe unmittelbar **rechts** neben dem Stützpunkte annimmt, so ist nach der Fig. 86, welche den Gleichgewichtszustand des über dem n-ten Stützpunkte liegenden unendlich kleinen Balkenstücks veranschaulicht, der Gegendruck dieses Stützpunktes zu bestimmen aus der Gleichung:

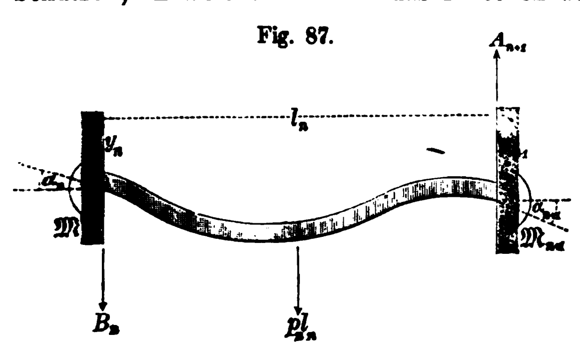
Fig. 86.



$$3)\quad K_n = A_n - B_n.$$

Zur Berechnung der Grössen A und B kann man die Fig. 87 benutzen, in welcher die auf das zwischen dem n-ten und dem $n+1$-ten Stützpunkte befindliche Balkenstück wirkenden Kräfte angegeben sind. Wenn man die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte gleich Null setzt und den linksseitigen Endpunkt des Balkenstücks dabei als Drehpunkt wählt, so erhält man die Gleichung:

Fig. 87.



$$0 = \mathfrak{M}_{n+1} - \mathfrak{M}_n + \frac{1}{2} p_n l_n^2 - A_{n+1} l_n, \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad A_{n+1} = \frac{\mathfrak{M}_{n+1} - \mathfrak{M}_n}{l_n} + \frac{p_n l_n}{2}.$$

Die Grösse B_n kann nunmehr bestimmt werden aus der Gleichung der Verticalkräfte:

$$0 = B_n + p_n l_n - A_{n+1},$$

welche für B_n aufgelöst nach Substitution des für die Grösse A_{n+1} gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$5)\quad B_n = \frac{\mathfrak{M}_{n+1} - \mathfrak{M}_n}{l_n} - \frac{p_n l_n}{2}.$$

Wenn man das in Fig. 87 dargestellte Balkenstück als einen an beiden Enden eingemauerten Balken betrachtet, und auf die Berechnung der Durchbiegung desselben das in § 8 erklärte Verfahren anwendet, so erhält man nach der Tabelle des § 6 die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \alpha_{n+1} = \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{p_n l_n^3}{6 E \mathfrak{T}} + \frac{\mathfrak{M}_{n+1} l_n}{E \mathfrak{T}} - \frac{A_{n+1} l_n^2}{2 E \mathfrak{T}},$$

$$y_{n+1} - y_n = l_n \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{p_n l_n^4}{8 E \mathfrak{T}} + \frac{\mathfrak{M}_{n+1} l_n^2}{2 E \mathfrak{T}} - \frac{A_{n+1} l_n^3}{3 E \mathfrak{T}},$$

welchen man nach Substitution des in Gleichung 4) für die Grösse A_{n+1} gefundenen Werthes auch die folgenden Formen geben kann:

$$6)\quad E \mathfrak{T} (\operatorname{tg} \alpha_{n+1} - \operatorname{tg} \alpha_n) = \frac{1}{2} (\mathfrak{M}_{n+1} + \mathfrak{M}_n) l_n - \frac{1}{12} p_n l_n^3,$$

$$7)\quad E \mathfrak{T} (y_{n+1} - y_n - l_n \operatorname{tg} \alpha_n) = \frac{1}{6} (\mathfrak{M}_{n+1} + 2 \mathfrak{M}_n) l_n^2 - \frac{1}{24} p_n l_n^4.$$

Die letztere Gleichung bleibt auch dann noch gültig, wenn in derselben der Index „n" überall um „Eins" erhöht wird, und geht dann in die folgende über:

$$8)\quad E \mathfrak{T} (y_{n+2} - y_{n+1} - l_{n+1} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) = \frac{1}{6} (\mathfrak{M}_{n+2} + 2 \mathfrak{M}_{n+1}) l_{n+1}^2 - \frac{1}{24} p_{n+1} l_{n+1}^4.$$

Wenn man von den beiden Gleichungen 7) und 8) die erstere durch l_n, die letztere durch l_{n+1} dividirt, und alsdann die letztere von der ersteren subtrahirt, so erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$9)\quad E \mathfrak{T} (\operatorname{tg} \alpha_{n+1} - \operatorname{tg} \alpha_n) = E \mathfrak{T} \left\{ \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{l_{n+1}} - \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} \right) \right\}$$
$$- (\mathfrak{M}_{n+2} + 2 \mathfrak{M}_{n+1}) \frac{l_{n+1}}{6} + (\mathfrak{M}_{n+1} + 2 \mathfrak{M}_n) \frac{l_n}{6} + \frac{p_{n+1} l_{n+1}^3}{24} - \frac{p_n l_n^3}{24}.$$

Die Gleichsetzung der beiden in den Gleichungen 6) und 9) für die Grösse $E \mathfrak{T} (\operatorname{tg} \alpha_{n+1} - \operatorname{tg} \alpha_n)$ gefundenen Werthe führt endlich zu der Gleichung:

$$10)\quad \mathfrak{M}_n l_n + 2 \mathfrak{M}_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + \mathfrak{M}_{n+2} l_{n+1} = \frac{p_n l_n^3 + p_{n+1} l_{n+1}^3}{4} + 6 E \mathfrak{T} \left\{ \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{l_{n+1}} - \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} \right) \right\}.$$

Wenn man diese Gleichung durch l_n dividirt und alsdann abkürzungsweise:

$$11)\quad \frac{24\,E\mathfrak{T}}{l_n^4}(y_{n+1}-y_n)=u_n, \qquad 12)\quad \frac{l_{n+1}}{l_n}=m_{n+1}$$

setzt, so erhält man die folgende allgemeine Gleichung für die Biegungsmomente an drei auf einander folgenden Stützpunkten:

$$13)\quad \mathfrak{M}_n+2\,\mathfrak{M}_{n+1}(1+m_{n+1})+\mathfrak{M}_{n+2}m_{n+1} = \frac{l_n^2}{4}\left\{p_n-u_n+m_{n+1}^3(p_{n+1}+u_{n+1})\right\}.$$

§ 16.

Balken auf zehn Stützen.

Wenn man in den allgemeinen Gleichungen des vorigen Paragraphen die folgenden Werthe substituirt:

$$p_1=p_2=p_3=\cdots=p,$$
$$u_1=u_2=u_3=\cdots=0,$$
$$l_1=l_2=l_3=\cdots=l,$$
$$m_2=m_3=m_4=\cdots=1,$$

so gelten jene Gleichungen nunmehr für einen Balken, dessen Belastung gleichförmig über die ganze Länge desselben vertheilt ist, und dessen Stützpunkte sämmtlich in einer und derselben Horizontalen liegend die ganze Länge des Balkens in Abtheilungen von gleicher Länge zerlegen. Die Gleichungen 13), 4), 5), 3) nehmen für diesen speciellen Fall die folgenden Formen an:

$$1)\quad \mathfrak{M}_n+4\,\mathfrak{M}_{n+1}+\mathfrak{M}_{n+2}=\frac{pl^2}{2},$$

$$2)\quad A_{n+1}=\frac{\mathfrak{M}_{n+1}-\mathfrak{M}_n}{l}+\frac{pl}{2},$$

$$3)\quad B_n=\frac{\mathfrak{M}_{n+1}-\mathfrak{M}_n}{l}-\frac{pl}{2},$$

$$4)\quad K_n=A_n-B_n.$$

Mittelst der ersten dieser vier Gleichungen kann man die Biegungsmomente über den Stützpunkten berechnen. Wenn man nämlich in dieser Gleichung für den Index „n“ der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 ... substituirt — und zugleich berücksichtigt, dass das Biegungsmoment am Endpunkte des frei aufliegenden Balkens immer gleich Null ist — so erhält man zunächst die Gleichungen:

$$5)\quad 0 \quad + 4\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = \frac{pl^2}{2},$$

$$6)\quad \mathfrak{M}_2 + 4\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 = \frac{pl^2}{2},$$

$$7)\quad \mathfrak{M}_3 + 4\mathfrak{M}_4 + \mathfrak{M}_5 = \frac{pl^2}{2},$$

$$8)\quad \mathfrak{M}_4 + 4\mathfrak{M}_5 + \mathfrak{M}_6 = \frac{pl^2}{2} \;\ldots\ldots$$

Diese Gleichungen kann man benutzen, um die unbekannten Grössen $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ ... sämmtlich durch die eine unbekannte Grösse $\mathfrak{M}_2$ auszudrücken. Indem man die erste für $\mathfrak{M}_3$ auflöst, den gefundenen Werth in die zweite einsetzt, um $\mathfrak{M}_4$ daraus zu berechnen, und auf diese Weise fortfährt, gelangt man der Reihe nach zu den folgenden Gleichungen:

$$9)\quad \mathfrak{M}_3 = \frac{pl^2}{2} - 4\mathfrak{M}_2,$$

$$10)\quad \mathfrak{M}_4 = -\frac{3}{2}pl^2 + 15\mathfrak{M}_2,$$

$$11)\quad \mathfrak{M}_5 = 6pl^2 - 56\mathfrak{M}_2,$$

$$12)\quad \mathfrak{M}_6 = -22pl^2 + 209\mathfrak{M}_2 \;\ldots\ldots$$

Die Biegungsmomente über zwei Stützpunkten, welche gleich weit von der Mitte des Balkens entfernt sind, haben gleiche Grössen. Für den Balken auf zehn Stützen kann man daher die Grösse $\mathfrak{M}_2$ nunmehr berechnen, indem man die Werthe von $\mathfrak{M}_5$ und $\mathfrak{M}_6$ einander gleichsetzt, also aus der Gleichung:

$$6pl^2 - 56\mathfrak{M}_2 = -22pl^2 + 209\mathfrak{M}_2, \quad \text{oder:}$$

$$13)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{56}{530}pl^2.$$

Hiernach ergeben sich für die übrigen Biegungsmomente aus den Gleichungen 9), 10), 11) die Werthe:

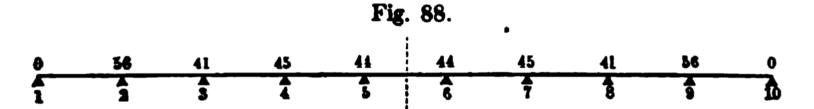
$$14)\quad \mathfrak{M}_3 = \frac{41}{530}pl^2, \qquad 15)\quad \mathfrak{M}_4 = \frac{45}{530}pl^2, \qquad 16)\quad \mathfrak{M}_5 = \frac{44}{530}pl^2,$$

und wenn die Grösse $\frac{pl^2}{530}$ als Einheit betrachtet wird, so stellen die in Fig. 88 angegebenen Zahlen die Biegungsmomente über den zehn Stützpunkten dar.

Um die Gegendrücke der Stützpunkte zu berechnen, hat man in den Gleichungen 2), 3), 4) für den Index „n“ der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu substituiren und dabei zu berücksich-

tigen, dass die Grösse A_1 als Verticalkraft links neben der ersten Stütze jedenfalls gleich Null ist. Mit Benutzung des für $\mathfrak{M}_2$ gefundenen Werthes erhält man demnach zur Bestimmung der Grösse

Fig. 88.



K_1 die Gleichungen:

$$B_1 = \frac{\mathfrak{M}_2 - 0}{l} - \frac{pl}{2} = -\frac{209}{530}\,pl,$$

$$K_1 = 0 - B_1 = \frac{209}{530}\,pl.$$

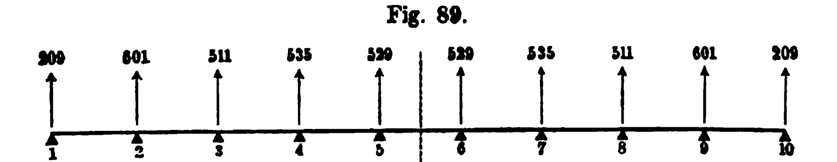
Auf ähnliche Weise erhält man zur Bestimmung der Grösse K_2 die folgenden Gleichungen:

$$A_2 = \frac{\mathfrak{M}_2 - 0}{l} + \frac{pl}{2} = \frac{321}{530}\,pl,$$

$$B_2 = \frac{\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_2}{l} - \frac{pl}{2} = -\frac{280}{530}\,pl,$$

$$K_2 = \frac{321}{530}\,pl + \frac{280}{530}\,pl = \frac{601}{530}\,pl,$$

Fig. 89.



und findet durch Fortsetzung dieses Verfahrens die in Fig. 89 zusammengestellten Zahlen, welche mit dem Factor $\frac{pl}{530}$ multiplicirt die wirklichen Gegendrücke der zehn Stützpunkte darstellen.

§ 17.

Vierfach unterstützter Balken mit drei Einzelgewichten belastet.

Man kann den in Fig. 90 dargestellten Balken, welcher in Wirklichkeit nur an vier Punkten unterstützt ist, auch als Balken auf sieben Stützen betrachten, indem man zu den Stützpunkten auch die drei Belastungspunkte zählt und die drei Gewichte Q

als negative Gegendrücke derselben behandelt. Um die allgemeinen Gleichungen des § 15 auf den vorliegenden Fall anzuwenden, hat man die Werthe:

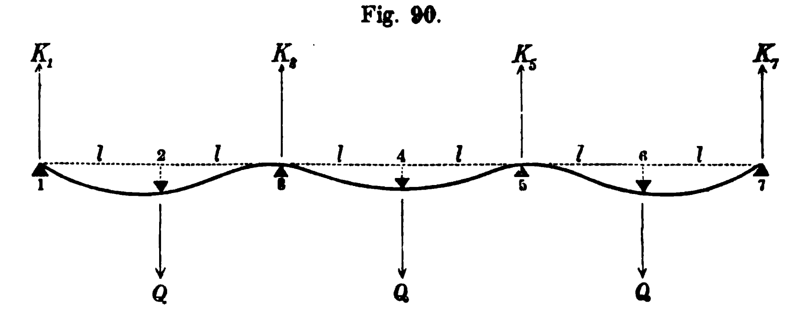
$$p_1 = p_2 = \dots\dots = 0,$$
$$l_1 = l_2 = \dots\dots = l,$$
$$m_2 = m_3 = \dots\dots = 1$$

in denselben zu substituiren. Die Gleichung 13) des § 15 nimmt alsdann die folgende Form an:

$$\mathfrak{M}_n + 4\,\mathfrak{M}_{n+1} + \mathfrak{M}_{n+2} = \frac{l^2}{4}\,(u_{n+1} - u_n),$$

und wenn man in derselben für den Index „n" der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 substituirt, so erhält man — in Berücksich-

Fig. 90.



tigung des Umstandes, dass $\mathfrak{M}_1 = 0$ und dass $\mathfrak{M}_5 = \mathfrak{M}_3$ ist — die drei Gleichungen:

$$0 + 4\,\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = \frac{l^2}{4}\,(u_2 - u_1),$$

$$\mathfrak{M}_2 + 4\,\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 = \frac{l^2}{4}\,(u_3 - u_2),$$

$$\mathfrak{M}_3 + 4\,\mathfrak{M}_4 + \mathfrak{M}_3 = \frac{l^2}{4}\,(u_4 - u_3).$$

Nach Gleichung 11) des § 15 enthält der Ausdruck für u_1 die Höhendifferenz zwischen dem ersten und zweiten Stützpunkte als Factor; ebenso der Ausdruck für u_2 die Höhendifferenz zwischen dem zweiten und dritten Stützpunkte. Da die beiden Stützpunkte 1 und 3 in gleicher Höhe liegen, so ist $u_2 = -u_1$ zu setzen. Aus demselben Grunde ist $u_4 = -u_3$ zu setzen, und man erhält nach Ausführung dieser Substitutionen die folgenden drei Gleichungen:

$$1)\quad 4\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = -\frac{l^2}{2}\cdot u_1,$$

$$2)\quad \mathfrak{M}_2 + 4\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 = +\frac{l^2}{4}(u_3 + u_1),$$

$$3)\quad 2\mathfrak{M}_3 + 4\mathfrak{M}_4 = -\frac{l^2}{2}\cdot u_3.$$

Wenn man die aus den Gleichungen 1) und 3) resp. für die Grössen u_1 und u_3 zu entnehmenden Werthe in Gleichung 2) substituirt, so nimmt diese letztere auf Null reducirt die Form an:

$$4)\quad 6\mathfrak{M}_2 + 11\mathfrak{M}_3 + 6\mathfrak{M}_4 = 0.$$

Die zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ noch fehlenden zwei Gleichungen erhält man aus den allgemeinen Gleichungen 3), 4), 5) des § 15, indem man zunächst die Ausdrücke für K_2 und K_4 aus denselben ableitet und alsdann jeden dieser beiden Ausdrücke gleich „$-Q$" setzt. Man gelangt dabei zu den folgenden Gleichungen:

$$A_2 = \frac{\mathfrak{M}_2 - 0}{l},\qquad A_4 = \frac{\mathfrak{M}_4 - \mathfrak{M}_3}{l},$$

$$B_2 = \frac{\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_2}{l},\qquad B_4 = \frac{\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_4}{l},$$

$$K_2 = \frac{2\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3}{l},\qquad K_4 = \frac{2\mathfrak{M}_4 - 2\mathfrak{M}_3}{l},$$

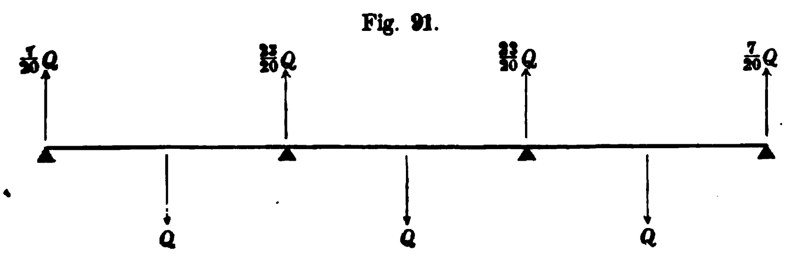
$$5)\quad 2\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = -Ql,$$

$$6)\quad 2\mathfrak{M}_4 - 2\mathfrak{M}_3 = -Ql.$$

Aus den drei Gleichungen 4), 5), 6) ergeben sich nunmehr für jene drei Biegungsmomente die Werthe:

$$\mathfrak{M}_2 = -\frac{7}{20}Ql,\qquad \mathfrak{M}_3 = +\frac{6}{20}Ql,\qquad \mathfrak{M}_4 = -\frac{4}{20}Ql.$$

Fig. 91.



Wenn man ferner aus den allgemeinen Gleichungen 3), 4), 5) des § 15 die Ausdrücke für K_1 und K_3 ableitet, so gelangt man dabei zu den folgenden Gleichungen:

$$A_1 = 0, \qquad A_3 = \frac{\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_2}{l},$$

$$B_1 = \frac{\mathfrak{M}_2 - 0}{l}, \qquad B_3 = \frac{\mathfrak{M}_4 - \mathfrak{M}_3}{l},$$

$$K_1 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{l}, \qquad K_3 = \frac{2\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_4}{l},$$

und nach Substitution der oben für die drei Biegungsmomente gefundenen Ausdrücke erhält man hierauf für die Gegendrücke der Stützpunkte die in Fig. 91 angegebenen Werthe.

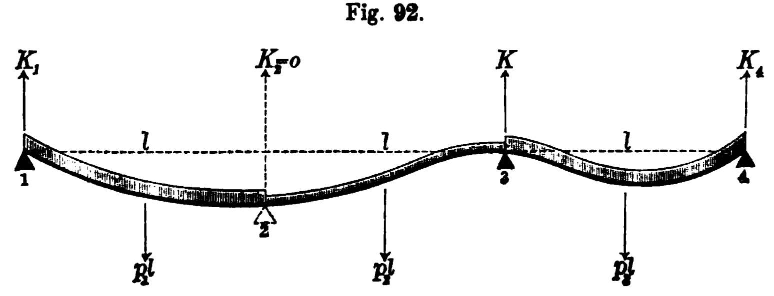
§ 18.

Balken mit discontinuirlich vertheilter Belastung.

Bei Ableitung der allgemeinen Gleichungen des § 15 wurde zwar vorausgesetzt, dass zwischen je zwei auf einander folgenden Stützpunkten die Belastung gleichförmig längs der betreffenden Balkenstrecke vertheilt war. Man kann jedoch jene Gleichungen auch auf den Fall noch anwenden, in welchem eine solche Strecke aus mehreren Theilen besteht, deren Belastungen pro Längeneinheit ungleiche Grössen haben. Für diesen Fall hat man die Grenzpunkte der gleichförmig belasteten Strecken (oder die Discontinuitätspunkte, in welchen die Belastung pro Längeneinheit sprungweise aus einem kleineren in einen grösseren Werth übergeht) mit zu den Stützpunkten zu zählen und die Gegendrücke dieser fingirten Stützpunkte nachher gleich Null zu setzen.

So z. B. würde man für den in Fig. 92 dargestellten Balken — obgleich derselbe in Wirklichkeit nur drei Stützpunkte hat —

Fig. 92.



als einen Balken auf vier Stützen zu behandeln haben, und in den allgemeinen Gleichungen des § 15 würden für diesen Fall die folgenden Werthe zu substituiren sein:

$$l_1 = l_2 = l_3 = l, \quad m_2 = m_3 = 1,$$
$$u_2 = -u_1 \quad \text{und} \quad u_3 = 0.$$

Man erhält dann nach Gleichung 13) des § 15, indem man darin ein Mal $n = 1$ und ein anderes Mal $n = 2$ setzt, die beiden Gleichungen:

$$1) \quad 0 + 4\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = \frac{l^2}{4}(p_1 + p_2 - 2u_1),$$

$$2) \quad \mathfrak{M}_2 + 4\mathfrak{M}_3 + 0 = \frac{l^2}{4}(p_2 + p_3 + u_1).$$

Indem man jede dieser beiden Gleichungen für die Grösse u_1 auflöst und die beiden auf solche Weise gefundenen Ausdrücke alsdann einander gleich setzt, gelangt man ferner zu der Gleichung:

$$3) \quad 24\mathfrak{M}_2 + 36\mathfrak{M}_3 = (p_1 + 3p_2 + 2p_3)\,l^2.$$

Um die zur Berechnung der beiden Grössen $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_3$ noch erforderliche zweite Gleichung zu erhalten, hat man nach den allgemeinen Gleichungen 3), 4), 5) des § 15 den Ausdruck für die Grösse K_3 zu bilden und diesen Ausdruck dann gleich Null zu setzen. Die Ausführung dieser Operation führt zu den folgenden Gleichungen:

$$4) \quad A_2 = \frac{\mathfrak{M}_2 - 0}{l} + \frac{p_1 l}{2},$$

$$5) \quad B_2 = \frac{\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_2}{l} - \frac{p_2 l}{2},$$

$$6) \quad K_3 = \frac{2\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3}{l} + \frac{(p_1 + p_2)\,l}{2} = 0, \quad \text{oder:}$$

$$7) \quad 2\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 = -(p_1 + p_2)\frac{l^2}{2}.$$

Durch Auflösung der beiden Gleichungen 3) und 7) erhält man für die beiden Biegungsmomente $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_3$ die Werthe:

$$8) \quad \mathfrak{M}_2 = (2p_3 - 15p_2 - 17p_1)\frac{l^2}{96},$$

$$9) \quad \mathfrak{M}_3 = (2p_3 + 9p_2 + 7p_1)\frac{l^2}{48}.$$

Die Gegendrücke der drei wirklichen Stützpunkte kann man nunmehr nach den allgemeinen Gleichungen des § 15 berechnen, indem man mit Hülfe derselben die Ausdrücke für die Grössen K_1, K_2, K_4 bildet:

$$K_1 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{l} + \frac{p_1 l}{2},$$

$$K_3 = 2\frac{\mathfrak{M}_3}{l} - \frac{\mathfrak{M}_2}{l} + \frac{(p_2 + p_3)\,l}{2},$$

$$K_4 = -\frac{\mathfrak{M}_3}{l} + \frac{p_3 l}{2},$$

und die oben gefundenen Ausdrücke für die Momente $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ in diesen Gleichungen substituirt. Man erhält dann die Werthe:

$$K_1 = (65 p_1 + 15 p_2 - 2 p_3)\frac{l}{96},$$

$$K_3 = (45 p_1 + 99 p_2 + 54 p_3)\frac{l}{96},$$

$$K_4 = (-14 p_1 - 18 p_2 + 44 p_3)\frac{l}{96}.$$

§ 19.

Brückenbalken auf drei Stützen.

Ermittelung der vortheilhaftesten Senkung der Mittelstütze mit Berücksichtigung der mobilen Belastung.

Um die vortheilhafteste Lage der Stützpunkte für einen Balken auf mehreren Stützen zu finden, hat man — wie in § 11, § 13, § 14 an mehreren Beispielen gezeigt wurde — die absoluten Maximalwerthe der Biegungsmomente einander gleich zu setzen. Wenn der Balken ausschliesslich eine gleichförmig über seine Länge vertheilte permanente Belastung — wie z. B. sein eigenes Gewicht — zu tragen hat, so hängen die Werthe dieser Maximalmomente lediglich von der Lage der Stützpunkte ab. Bei Brückenträgern dagegen, welche zeitweilig ausser der permanenten Belastung noch eine (entweder über die ganze Länge oder einen Theil derselben gleichförmig vertheilte) fremde Belastung — die sogenannte mobile Belastung — zu tragen haben, hängen jene Maximalmomente ausserdem von dem jedesmaligen Belastungszustande ab. Um die vortheilhafteste Lage der Stützpunkte für einen solchen Brückenbalken zu ermitteln, hat man also zuvor die ungünstigsten Belastungszustände aufzusuchen, d. h. diejenigen Belastungszustände, bei welchen jene Maximalmomente ihre grösstmöglichen Werthe annehmen. Durch Gleichsetzung dieser grössten Werthe findet man nachher die vortheilhafteste Lage der Stützpunkte.

Für den in Fig. 93 dargestellten Balken würde man in den allgemeinen Gleichungen des § 15 die Werthe $l_1 = l_2 = l$, $m_2 = 1$

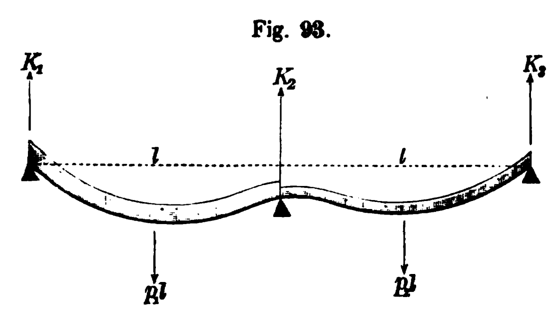
und $u_2 = -u_1$ zu substituiren haben. Die Gleichung 13) nimmt alsdann, wenn darin $n = 1$ gesetzt wird, die folgende Form an:

$$0 + 4\mathfrak{M}_2 + 0 = \frac{l^2}{4}(p_1 + p_2 - 2u_1), \text{ oder:}$$

$$1)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{l^2}{16}(p_1 + p_2 - 2u_1).$$

Das Biegungsmoment über der Mittelstütze wird bei jedem Belastungszustande eines von den Maximalmomenten sein, und dasselbe nimmt — wie Gleichung 1) zeigt — einen um so grösseren Werth an, je grösser die Belastungen p_1 und p_2 sind.

Fig. 93.



Wenn die permanente Belastung pro Längeneinheit die Grösse p hat, und mit q die Grösse bezeichnet wird, bis zu welcher die Belastung pro Längeneinheit durch das Hinzutreten der mobilen Belastung gesteigert werden kann, so ist p der untere und q der obere von den beiden Grenzwerthen, zwischen welchen eine jede von den beiden Grössen p_1 und p_2 sich ändern kann. Um das Maximum von $\mathfrak{M}_2$ zu erhalten, hat man demnach $p_1 = q$ und $p_2 = q$ zu setzen, also ist:

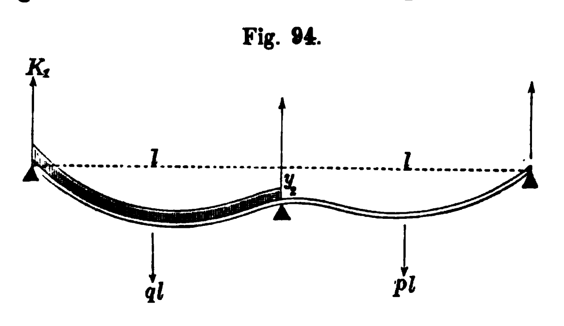
$$2)\quad \mathfrak{M}_{2\,(max)} = \frac{l^2}{8}(q - u_1).$$

Ein anderes Maximum wird der absolute Werth des Biegungsmomentes stets an irgend einer zwischen dem ersten und zweiten Stützpunkte befindlichen Stelle annehmen, deren Lage von dem jedesmaligen Belastungszustande abhängt. Diese Stelle würde im Abstande $\frac{3}{8}l$ von dem ersten Stützpunkte liegen, wenn die Belastung pro Längeneinheit überall gleich q wäre, und die drei Stützpunkte in gleicher Höhe lägen (s. Fig. 55). An dieser Stelle würde das Biegungsmoment ein Minimum (oder negatives Maximum) erreichen von der Grösse:

$$\mathfrak{M}' = -\frac{K_1^2}{2q} = -\frac{9}{128}ql^2.$$

Zu diesem **negativen** Biegungsmomente liefert — wie aus Fig. 60 zu ersehen — eine jede Belastung der rechtsseitigen Balkenhälfte einen **positiven** Beitrag. Es würde daher das Hinwegnehmen jedes Belastungstheiles der rechtsseitigen Balkenhälfte zur Folge haben, dass jenes negative Maximum $\mathfrak{M}'$ einen grösseren absoluten Werth annimmt, wobei zugleich eine Verschiebung der Stelle eintreten wird, an welcher dieses Maximum stattfindet. Die Grösse $\mathfrak{M}'$ würde also ein Minimum oder dem absoluten Werthe nach ein Maximum werden, wenn die rechtsseitige Balkenhälfte ganz unbelastet und die linksseitige Balkenhälfte voll belastet wäre.

Fig. 94.



Obwohl in Fig. 93 die Mittelstütze tiefer liegt als die beiden Endstützen, so gelten doch — wie man sich durch Anwendung des in Fig. 60 erklärten Constructionsverfahrens leicht überzeugt — die obigen Schlussfolgerungen auch für den vorliegenden Fall. Um also das Minimum von $\mathfrak{M}'$ zu berechnen, hat man in der (aus § 10 zu entnehmenden) allgemeinen Gleichung:

$$3)\quad \mathfrak{M}' = -\frac{K_1^2}{2p_1}$$

für die Grössen K_1 und p_1 die Werthe zu substituiren, welche dem in Fig. 94 dargestellten Belastungszustande entsprechen.

Nach § 15 erhält man zunächst für den in Fig. 93 angenommenen Belastungszustand die allgemeinen Gleichungen:

$$A_1 = 0, \qquad B_1 = \frac{\mathfrak{M}_2}{l} - \frac{p_1 l}{2},$$

$$K_1 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{l} + \frac{p_1 l}{2}.$$

Die letztere Gleichung nimmt nach Substitution des in Gleichung 1) gefundenen Werthes die Form an:

$$4)\quad K_1 = \frac{l}{16}(7p_1 - p_2 + 2u_1),$$

und aus Gleichung 3) ergiebt sich nunmehr für das Biegungsmoment $\mathfrak{M}'$ der Werth:

$$5)\quad \mathfrak{M}' = -\frac{l^2}{512}\cdot\frac{(7p_1 - p_2 + 2u_1)^2}{p_1}.$$

Um das Minimum von $\mathfrak{M}'$ zu erhalten, hat man hierin $p_1 = q$ und $p_2 = p$ zu setzen, also ist:

$$6)\quad \mathfrak{M}'_{(min)} = -\frac{l^2}{512}\cdot\frac{(7q - p + 2u_1)^2}{q}.$$

Durch Gleichsetzung der aus den Gleichungen 2) und 6) zu entnehmenden absoluten Werthe von $\mathfrak{M}_{2(max)}$ und $\mathfrak{M}'_{(min)}$ erhält man endlich die Gleichung:

$$\frac{l^2}{8}(q - u_1) = \frac{l^2}{512\,q}(7q - p + 2u_1)^2,$$

welche für die unbekannte Grösse u_1 aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$7)\quad u_1 = \frac{1}{2}\left\{p - 23q + \sqrt{544q^2 - 32pq}\right\}.$$

Nach der in § 15 (Gleichung 11) angegebenen Bedeutung der Grösse u_1 ist zugleich:

$$8)\quad u_1 = \frac{24E\mathfrak{T}}{l^4}(y_2 - 0),\quad \text{oder:}\quad y_2 = \frac{u_1 l^4}{24E\mathfrak{T}},$$

und wenn man hierin den in Gleichung 7) gefundenen Werth für u_1 substituirt, so erhält man für die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze den Werth:

$$9)\quad y_2 = \frac{q l^4}{48E\mathfrak{T}}\left\{\frac{p}{q} - 23 + \sqrt{544 - 32\frac{p}{q}}\right\}.$$

Den grössten Werth, welchen das Maximalmoment bei dieser Unterstützungsweise erreichen kann, findet man aus einer von den beiden Gleichungen 2) und 6), indem man darin den für u_1 gefundenen Werth einsetzt. Nach Gleichung 2) wird z. B.:

$$10)\quad \mathfrak{M}_{2(max)} = \frac{l^2}{16}\left\{25q - p - \sqrt{544q^2 - 32pq}\right\},$$

und ebenso gross kann der absolute Werth von $\mathfrak{M}'$ bei dieser Unterstützungsweise werden.

Aus den beiden Gleichungen 9) und 10) ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{p}{q} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_2 = \frac{q(2l)^4}{1\,000\,000\,E\mathfrak{T}}$ mal	421	462	503	543	583	622	662	701	740	779	817
$\mathfrak{M}_{2(max)} = \frac{q(2l)^2}{32\,000}$ mal	838	823	807	792	776	761	746	731	716	701	686

Die in der ersten Vertical-Columne stehenden Zahlenwerthe beziehen sich auf den speciellen Fall, in welchem die permanente Last gleich Null ist, und die in der letzten Vertical-Columne stehenden Zahlenwerthe beziehen sich auf den speciellen Fall, in welchem die mobile Last gleich Null ist.

Wenn das Verhältniss der permanenten Belastung zur Totalbelastung gleich 0,6 ist, so wird nach obiger Tabelle:

$$y_2 = \frac{q(2l)^4}{E\mathfrak{T}} \cdot 0{,}000\,662 \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_{2\,(max)} = \frac{q(2l)^2}{32} \cdot 0{,}746.$$

Die erforderliche Grösse des Trägheitsmomentes der Querschnittsfläche würde (auf ähnliche Weise wie am Schlusse des § 11) zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$\frac{S}{\frac{1}{2}h}\mathfrak{T} = \frac{q(2l)^2}{32} \cdot 0{,}746,$$

in welcher S die practisch zulässige Spannung, und h die Höhe des Balkens bedeutet. Nach Substitution des aus dieser Gleichung für $\mathfrak{T}$ zu entnehmenden Werthes erhält man für y_2 die Gleichung:

$$y_2 = 0{,}2272 \cdot \frac{l^2}{h} \cdot \frac{S}{E}.$$

Für Schmiedeisen würde $S = 6$ Kil. und $E = 20\,000$ zu setzen sein. Wenn also z. B. $l = 100\,000^{mm}$ und $h = 10\,000^{mm}$ ist, so wird:

$$y_2 = 68^{mm},15.$$

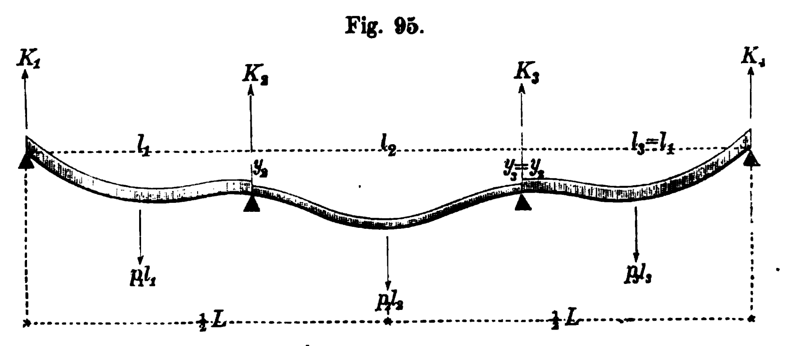
Auf gleiche Weise würde für den Fall, in welchem $\frac{p}{q} = 1$ ist, der Werth $y_2 = 91^{mm},4$ sich ergeben, also derselbe Werth, welcher in dem am Schlusse des § 11 berechneten Zahlenbeispiele gefunden wurde.

§ 20.

Vortheilhafteste Lage der Stützpunkte eines Brückenbalkens auf vier Stützen.

Um für den in Fig. 95 dargestellten Balken die Gegendrücke der Stützpunkte zu berechnen, hat man in den allgemeinen Gleichungen des § 15 die Werthe $u_2 = 0$ und $u_3 = -u_1$ zu substi-

Fig. 95.



tuiren. Da ferner $m_3 = \frac{1}{m_2}$ ist, so kann m statt m_2 und dem entsprechend:

$$l_1 = \frac{L}{2+m} = l_3, \qquad l_2 = \frac{mL}{2+m}$$

gesetzt werden. Man erhält dann aus der Gleichung 13) des § 15, indem man darin das eine Mal $n = 1$, das andere Mal $n = 2$ setzt, die beiden Gleichungen:

$$1) \quad 0 + 2\mathfrak{M}_2(1+m) + m\mathfrak{M}_3 = \frac{L^2}{4(2+m)^2}(p_1 + m^3 p_2 - u_1),$$

$$2) \quad \mathfrak{M}_2 + 2\mathfrak{M}_3\left(1+\frac{1}{m}\right) + 0 = \frac{m^2 L^2}{4(2+m)^2}\left(p_2 + \frac{p_3 - u_1}{m^3}\right),$$

aus welchen für die beiden Biegungsmomente die folgenden Werthe sich ergeben:

$$3) \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{L^2}{4}\left\{\frac{2p_1(1+m) + p_2 m^3(2+m) - p_3 m - u_1(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)}\right\},$$

$$4) \quad \mathfrak{M}_3 = \frac{L^2}{4}\left\{\frac{2p_3(1+m) + p_2 m^3(2+m) - p_1 m - u_1(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)}\right\}.$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man die beiden Gegendrücke K_1 und K_2 nach der in § 15 erklärten Methode berechnen, sobald der Belastungszustand und die Lage der Stützpunkte gegeben sind.

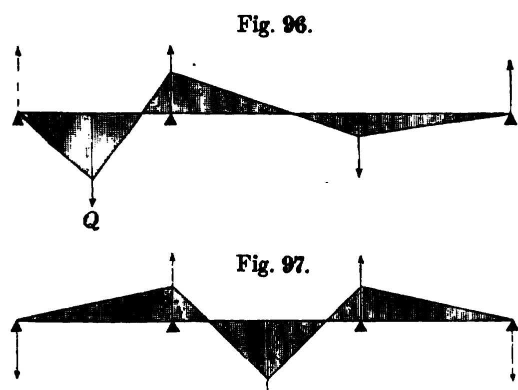


Fig. 96.

Fig. 97.

Auf der linksseitigen Balkenhälfte wird es — wie in § 12 gezeigt wurde — im Allgemeinen drei Stellen geben, an welchen der absolute Werth des Biegungsmoments ein Maximum erreicht. Obwohl die in § 12 hinsichtlich des Belastungszustandes und der Stützenlage gemachten Voraussetzungen hier nicht zutreffen, so kann doch die in Fig. 75 ausgeführte graphische Darstellung

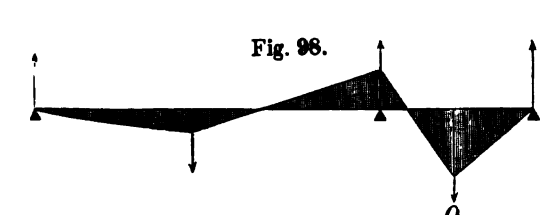


Fig. 98.

der Biegungsmomente wenigstens so weit für den vorliegenden Fall benutzt werden, als es sich nur darum handelt, die Anzahl und ungefähre Lage der Stellen zu bestimmen, an welchen das Biegungsmoment ein Maximum oder Minimum wird. Man erkennt aus Fig. 75, dass die Grösse $\mathfrak{M}_2$, als Biegungsmoment über der zweiten Stütze, bei jedem Belastungszustande eins von den Maximalmomenten sein wird. Ein Minimum (oder negatives Maximum), welches wie im vorigen Paragraphen mit $\mathfrak{M}'$ bezeichnet werden soll, erreicht das Biegungsmoment an irgend einer Stelle zwischen der ersten und zweiten Stütze. Ein anderes Minimum $\mathfrak{M}''$ fällt in die Mitte des Balkens.

Um diejenigen Belastungszustände zu finden, bei welchen die absoluten Werthe dieser drei Biegungsmomente am grössten werden, hat man mit Hülfe der in Fig. 96, Fig. 97, Fig. 98 ausgeführten graphischen Darstellungen der Biegungsmomente, welche in dem gewichtlos gedachten Balken durch ein Einzelgewicht Q hervorgebracht werden, diejenigen Strecken aufzusuchen, deren Belastungen positive, und diejenigen Strecken, deren Belastungen negative Beiträge zu dem betreffenden Maximalmomente liefern. Man überzeugt sich auf diese Weise leicht, dass es die in Fig. 99, Fig. 100, Fig. 101 dargestellten Belastungszustände sind, bei welchen resp. die Momente $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ ihre grössten absoluten Werthe annehmen.

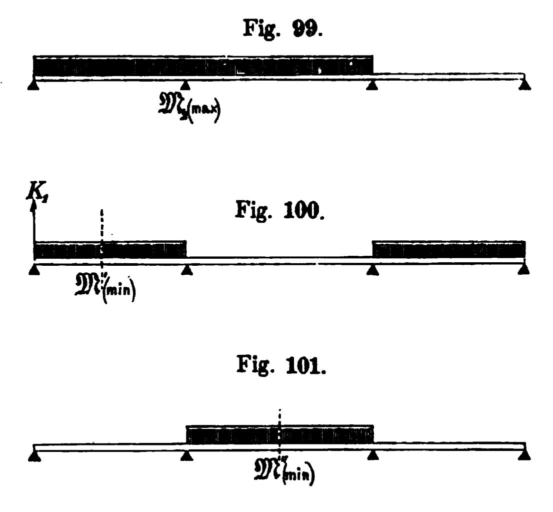


Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101.

Dem in Fig. 99 dargestellten Belastungszustande entsprechen die Werthe $p_1 = q$, $p_2 = q$, $p_3 = p$, und nach Substitution derselben erhält man für das Maximum von $\mathfrak{M}_2$ aus Gleichung 3) den Werth:

$$5)\quad \mathfrak{M}_{2(\max)} = \frac{L^2}{4}\left\{\frac{q(2+2m+2m^2+m^4) - pm - u_1(2+m)}{(2+m)^2(2+3m)}\right\}.$$

Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}'$ ist wie im vorigen Paragraphen zu bestimmen aus der Gleichung:

$$6)\quad \mathfrak{M}' = -\frac{K_1^2}{2p_1}.$$

Dasselbe wird ein Minimum bei dem in Fig. 100 dargestellten Belastungszustande, welchem die Werthe $p_1 = q$, $p_2 = p$, $p_3 = q$ entsprechen. Nach § 15 ist bei diesem Belastungszustande:

$$7)\quad K_1 = \frac{L}{4}\left\{\frac{q(3+6m) - pm^3 + u_1}{(2+m)(2+3m)}\right\},$$

und, wenn man für die Grössen p_1, K_1 ihre Werthe substituirt, so erhält man aus Gleichung 6) für das Minimum von $\mathfrak{M}'$ den Ausdruck:

$$8)\quad \mathfrak{M}'_{(\min)} = -\frac{L^2}{32q}\left\{\frac{q(3+6m) - pm^3 + u_1}{(2+m)(2+3m)}\right\}^2.$$

Nach Fig 95 hat die allgemeine Gleichung für das Biegungsmoment in der Mitte des Balkens die Form:

$$9)\quad \mathfrak{M}'' = -K_1\frac{L}{2} - K_2\frac{l_2}{2} + \frac{p_2 l_2^2}{8} + p_1 l_1\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right).$$

Dasselbe wird ein Minimum bei dem in Fig. 101 dargestellten Belastungszustande, welchem die Werthe $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = p$ entsprechen. Bei diesem Belastungszustande ist nach § 15:

$$10)\quad K_1 = \frac{L}{4}\left\{\frac{p(3+6m) - qm^3 + u_1}{(2+m)(2+3m)}\right\},$$

$$11)\quad K_2 = \frac{L}{4}\left\{\frac{pm(5+6m) + q(4+6m+m^2) - u_1 m}{m(2+m)(2+3m)}\right\},$$

und, wenn man in Gleichung 9) diese Werthe substituirt, so erhält man für das Minimum von $\mathfrak{M}''$ die Gleichung:

$$12)\quad \mathfrak{M}''_{(\min)} = -\frac{L^2}{8}\left\{\frac{q(2+m)m^2 - 2p + 2u_1}{(2+m)^2(2+3m)}\right\}.$$

Indem man den absoluten Werth von $\mathfrak{M}''_{(\min)}$ das eine Mal dem Werthe von $\mathfrak{M}_{2(\max)}$, das andere Mal dem absoluten Werthe von $\mathfrak{M}'_{(\min)}$ gleichsetzt, erhält man die zwei Gleichungen:

$$13)\quad u_1 = \frac{(4+4m-4m^2+m^4)q + 4p}{4(2+m)},$$

$$14)\quad \left(3+6m-m^3\frac{p}{q}+\frac{u_1}{q}\right)^2 = 4(2+3m)\left(2m^2+m^3-2\frac{p}{q}+2\frac{u_1}{q}\right),$$

aus denen die beiden unbekannten Grössen u_1 und m berechnet werden können. Das grösste Biegungsmoment selbst findet man alsdann aus Gleichung 5), indem man darin für die Grössen u_1 und m die gefundenen Werthe substituirt.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$m = \frac{l_2}{l_1} =$	1,13	1,14	1,15	1,16	1,165	1,17
$\frac{u_1}{q} =$	0,4	0,47	0,53	0,59	0,65	0,72
$\mathfrak{M}_{(max)} = \frac{qL^2}{72}$ mal	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61

Wenn z. B. $L = 300\,000^{mm}$ und $\frac{p}{q} = 0,6$ ist, so wird nach obiger Tabelle $m = 1,16$, also $l_1 = \frac{L}{2+m} = 95\,000^{mm}$, und $l_2 = m l_1 = 110\,000^{mm}$ zu nehmen sein. Nach der Tabelle ist ferner: $u_1 = 0,59 q$ zu setzen, und da nach § 15 (Gleichung 11) zugleich: $u_1 = \frac{24\,E\mathfrak{T}(y_2 - 0)}{l_1^4}$ ist, so ergiebt sich für die vortheilhafteste Senkung der Mittelstützen der Werth: $y_2 = \frac{0,59\,q}{24\,E\mathfrak{T}}\left(\frac{L}{2+m}\right)^4$. Die Grösse $\mathfrak{T}$ als Trägheitsmoment der erforderlichen Querschnittsfläche ist wie im vorigen Paragraphen zu bestimmen aus der Gleichung: $\frac{S}{\frac{1}{2}h}\mathfrak{T} = \mathfrak{M}_{(max)}$, in welcher nach obiger Tabelle: $\mathfrak{M}_{(max)} = \frac{qL^2}{72} \cdot 0,69$ zu setzen ist. Nach Substitution dieser Werthe nimmt die obige Gleichung für y_2 die Form an:

$$y_2 = \frac{2 \,.\, 72 \,.\, 0,59 \,.\, S \,.\, L^2}{24 \,.\, 0,69 \,.\, E \,.\, h \,.\, (2+m)^4}.$$

Für Schmiedeisen ist $S = 6$ Kil. und $E = 20\,000$ zu setzen. Wenn also $h = 10\,000^{mm}$ ist, so wird:

$$y_2 = \frac{2 \,.\, 72 \,.\, 0,59 \,.\, 6 \,.\, 300\,000^2}{24 \,.\, 0,69 \,.\, 20\,000 \,.\, 10\,000 \,.\, 3,16^4} = 139^{mm}.$$

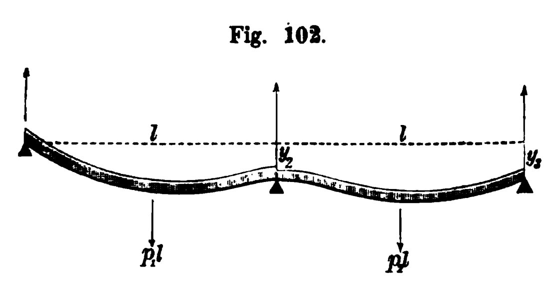
Der Werth $\frac{p}{q} = 1$ entspricht dem Falle, in welchem die mobile Last gleich Null ist. Für diesen Fall würde man mit Benutzung der obigen Tabelle wieder dieselben Werthe erhalten, welche in dem am Schlusse des § 13 berechneten Zahlenbeispiele gefunden wurden, nämlich die Werthe: $l_1 = 94\,590^{mm}$, $l_2 = 110\,820^{mm}$ und $y_2 = 186^{mm},6$.

§ 21.

Einfluss zufälliger Höhenänderungen der Stützpunkte.

Die Tabellen und Zahlenbeispiele der letzteren beiden Paragraphen lassen erkennen, dass eine verhältnissmässig geringe Senkung der Mittelstützen schon eine erhebliche Verringerung des grössten Biegungsmoments herbeiführen kann. Es ist daher zu erwarten, dass andrerseits eine verhältnissmässig geringe Hebung der Mittelstützen — oder überhaupt eine geringe Abweichung von der vortheilhaftesten Höhenlage der Stützpunkte — unter Umständen eine beträchtliche Vergrösserung des Maximalmoments zur Folge haben könnte. Genügenden Aufschluss über den Grad der Empfindlichkeit des Balkens in dieser Beziehung wird man schon dadurch sich verschaffen können, dass man von irgend einer beliebigen Unterstützungsweise des Balkens ausgehend untersucht: in welchem Maasse eines der Maximalmomente durch eine in ungünstigem Sinne erfolgende Höhenveränderung der Stützpunkte vergrössert werden würde. Wenn es sich z. B. herausstellt, dass bei einem Balken, dessen Stützpunkte ursprünglich in einer und derselben Horizontalen lagen, ein geringes Heraustreten einzelner Stützpunkte aus dieser Horizontalen schon eine beträchtliche Vergrösserung des Maximalmoments hervorbringen kann, so wird man zu dem Schlusse berechtigt sein: dass auch bei ursprünglich vortheilhaftester Unterstützungsweise eine geringe Höhenänderung einzelner Stützpunkte möglicherweise einen ähnlichen ungünstigen Einfluss haben kann. Es soll die betreffende Untersuchung hier zunächst für den Balken auf drei Stützen ausgeführt werden.

Fig. 102.



Nach der in § 15 (Gleichung 11) angegebenen Bedeutung der Grösse u_n ist für den in Fig. 102 dargestellten Fall:

$$u_1 = \frac{24\, E\mathfrak{T}\,(y_2 - 0)}{l^4} \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{24\, E\mathfrak{T}\,(y_3 - y_2)}{l^4}$$

zu setzen, und das Biegungsmoment über der Mittelstütze ist (nach § 15, Gleichung 13) zu bestimmen aus der Gleichung:

$$0 + 4\mathfrak{M}_2 + 0 = \frac{l^2}{4}(p_1 + p_2 - u_1 + u_2), \quad \text{oder:}$$

$$1) \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{l^2}{16}(p_1 + p_2 - u_1 + u_2).$$

Wenn die drei Stützpunkte in einer und derselben Horizontalen lägen, so wäre $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$. Angenommen: man hätte beabsichtigt, die drei Stützpunkte in eine Horizontale zu legen; es wären jedoch bei Aufstellung des Trägers Fehler begangen, in Folge deren die beiden Grössen u_1 und u_2, anstatt gleich Null zu werden, irgend welche von Null verschiedene, zwischen den Grenzen $+u$ und $-u$ liegende, übrigens beliebige Werthe angenommen hätten. Man erkennt sofort aus Gleichung 1): dass der ungünstigste Fall dann eintreten würde, wenn $u_1 = -u$ und $u_2 = +u$ geworden wäre. Da ausserdem $\mathfrak{M}_2$ um so grösser wird, je grösser p_1 und p_2 sind, so hat man nach der in § 19 eingeführten Bezeichnungsweise $p_1 = q$ und $p_2 = q$ zu setzen, um den grössten Werth zu erhalten, welchen das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_2$ im ungünstigsten Falle annehmen kann; es ist also:

$$2) \quad \mathfrak{M}_{2(max)} = \frac{l^2}{8}(q + u).$$

Für das Verhältniss, in welchem das Maximalmoment durch jene Fehler vergrössert wird, ergiebt sich hiernach der Werth:

$$3) \quad \mathfrak{B} = \frac{\frac{1}{8}(q + u)\,l^2}{\frac{1}{8}(q + 0)\,l^2} = 1 + \frac{u}{q}.$$

Dem vorausgesetzten negativen Werthe der Grösse u_1 entspricht ein negativer Werth der Grösse y_2, oder der Fall, in welchem die Mittelstütze höher liegt als die Endstützen. Wenn demgemäss $y_2 = -y$ gesetzt wird, so ist:

$$4) \quad -u_1 = \frac{24\,E\mathfrak{T}y}{l^4} = u$$

zu setzen, und die Gleichung 3) nimmt nach Substitution dieses Werthes die Form an:

$$5) \quad \mathfrak{B} = 1 + \frac{24\,E\mathfrak{T}y}{ql^4}.$$

Hierin ist für die Grösse $\mathfrak{T}$ derjenige Werth zu substituiren, welcher als Trägheitsmoment der Querschnittsfläche erforderlich gewesen sein würde, wenn die fehlerfreie Aufstellung gelungen wäre, d. h. wenn die drei Stützpunkte wirklich in einer Horizontalen lägen. Dieser Werth ist aus der Gleichung:

$$6)\quad \frac{S}{\frac{1}{2}h}\mathfrak{T} = \frac{ql^2}{8}$$

zu entnehmen, und nach Substitution desselben erhält man für $\mathfrak{B}$ die Gleichung:

$$7)\quad \mathfrak{B} = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{E}{S}\cdot\frac{h^2}{l^2}\cdot\frac{y}{h}.$$

Wenn man hierin wieder $\frac{E}{S} = \frac{20\,000}{6}$ und $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ setzt — wie bei den früher berechneten Zahlenbeispielen — so wird:

$$8)\quad \mathfrak{B} = 1 + 50\cdot\frac{y}{h}.$$

Für $\frac{y}{h} = \frac{1}{50}$ wird $\mathfrak{B} = 2$. Es würde also eine Erhöhung der Mittelstütze um den fünfzigsten Theil der Höhe des Trägers schon hinreichen, um das Maximalmoment zu verdoppeln.

Dieselbe ungünstige Wirkung würde offenbar auch bei Abweichung des Balkens von der geradlinigen Form entstehen, wenn bei spannungslosem Zustande desselben die Unterkante eine nach unten convexe Curve von der Pfeilhöhe y bildete. Denkt man sich bei Festlegung jedes der drei Stützpunkte einen Fehler von der Grösse v begangen, und bei Herstellung der Unterkante des Balkens an jeder von den drei Stellen, welche nachher auf den Stützpunkten zu liegen kommen, ebenfalls einen Fehler von der Grösse v begangen, so erkennt man aus Fig. 103, dass bei ungünstigstem Falle des Zusammentreffens aller dieser Fehler jeder einzelne derselben nur die Grösse:

Fig. 103.

$$9)\quad v = \frac{1}{4}y = \frac{h}{200}$$

zu haben brauchte, um eine Verdoppelung des Maximalmoments herbeizuführen.

Balken auf vier Stützen.

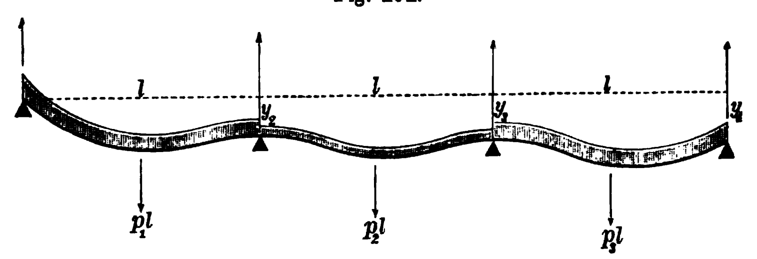
Für den in Fig. 104 dargestellten Balken ergeben sich aus § 15 die Gleichungen:

$$0 + 4\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = \frac{l^2}{4}(p_1 - u_1 + p_2 + u_2),$$

$$\mathfrak{M}_2 + 4\mathfrak{M}_3 + 0 = \frac{l^2}{4}(p_2 - u_2 + p_3 + u_3).$$

Durch Elimination der Grösse $\mathfrak{M}_3$ erhält man hieraus für das

Fig. 104.



Biegungsmoment $\mathfrak{M}_2$, als eines von den Maximalmomenten, den Ausdruck:

$$10)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{l^2}{60}\{4p_1 + 3p_2 - p_3 - 4u_1 + 5u_2 - u_3\}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass hinsichtlich der Vergrösserung von $\mathfrak{M}_2$ der ungünstigste Fall dann eintreten würde, wenn in Folge der fehlerhaften Aufstellung:

$$u_1 = -u, \quad u_2 = +u, \quad u_3 = -u$$

geworden wäre. Ausserdem hat man, dem ungünstigsten Belastungszustande entsprechend:

$$p_1 = q, \quad p_2 = q, \quad p_3 = p$$

zu setzen, um den grössten Werth zu erhalten, welchen das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_2$ überhaupt annehmen kann. Es ist also:

$$11)\quad \mathfrak{M}_{2(\max)} = \frac{l^2}{60}(7q - p + 10u).$$

Indem man diese Grösse dividirt durch den Werth, welchen dieselbe für $u = 0$ annehmen würde, erhält man für das Verhältniss, in welchem jenes Biegungsmoment durch die Abweichungen der Stützpunkte von der Horizontalen vergrössert wird, den Werth:

$$12)\quad \mathfrak{B} = \frac{7q - p + 10u}{7q - p} = 1 + \frac{10u}{7q - p}.$$

Dem Werthe $u_1 = -u$ entspricht ein negativer Werth von y_2, d. h. der Fall, in welchem die zweite Stütze höher liegt als die erste. Wenn man demgemäss $y_2 = -y$ setzt, so ist wie bei dem vorigen Falle der in Gleichung 4) angegebene Werth für u zu substituiren, und man erhält für $\mathfrak{B}$ die Gleichung:

$$13)\quad \mathfrak{B} = 1 + \frac{240\, E \mathfrak{T} y}{(7q - p)\, l^4}.$$

Hierin ist für die Grösse $\mathfrak{T}$ derjenige Werth zu substituiren, welcher aus der Gleichung:

$$14)\quad \frac{S}{\frac{1}{2}h}\,\mathfrak{T} = \mathfrak{M}_{2(max)}$$

sich ergiebt, wenn man für die auf der rechten Seite stehende Grösse den in Gleichung 11) gefundenen Ausdruck substituirt und darin zugleich $u = 0$ setzt. Es ist also der Werth von $\mathfrak{T}$ aus der Gleichung:

$$15)\quad \frac{S}{\frac{1}{2}h}\,\mathfrak{T} = \frac{l^2}{60}(7q - p)$$

zu entnehmen, und die Gleichung 13) nimmt nach Substitution desselben die Form an:

$$16)\quad \mathfrak{B} = 1 + 2 \cdot \frac{E}{S} \cdot \frac{h^2}{l^2} \cdot \frac{y}{h}.$$

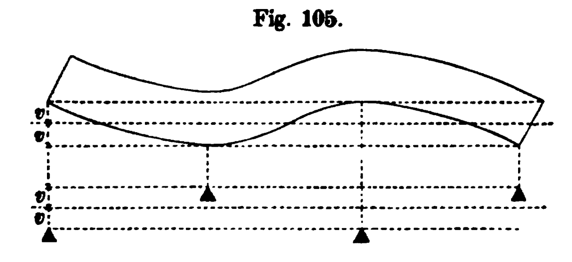
Wenn man hierin wie früher die Werthe: $\frac{E}{S} = \frac{20\,000}{6}$ und $\frac{h}{l} = \frac{10\,000}{100\,000}$ substituirt, so wird:

$$17)\quad \mathfrak{B} = 1 + \frac{200}{3} \cdot \frac{y}{h}.$$

Es würde also dem Werthe $y = \frac{3}{200}h = 150^{mm}$ schon eine Verdoppelung des Biegungsmoments $\mathfrak{M}_2$ entsprechen.

Wenn bei Festlegung eines jeden der vier Stützpunkte ein Fehler von der Grösse v begangen war, und wenn bei Herstellung der Unterkante des Balkens an jeder von den vier Unterstützungsstellen ebenfalls ein Fehler von der Grösse v begangen war, so würde bei dem in Fig. 105 dargestellten ungünstigsten Falle des Zusammentreffens aller dieser Fehler ein jeder einzelne nur die Grösse:

Fig. 105.



$$v = \frac{1}{4}y = \frac{3}{800}h = 37^{mm},5$$

zu haben brauchen, um bei diesem Brückenbalken von 300 Metern Länge eine Verdoppelung des Maximalmoments herbeizuführen.

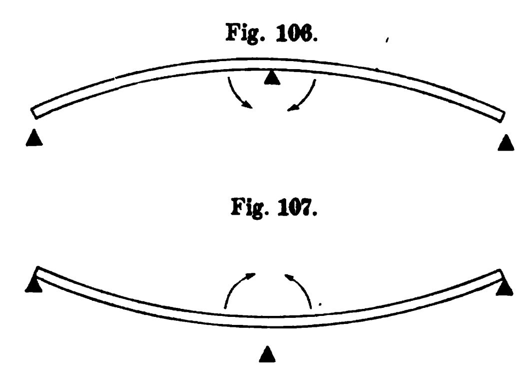
Es ergeben sich hieraus gewichtige Bedenken gegen die Anwendung von continuirlichen Trägern. Denn selbst, wenn es gelingt, bei Aufstellung des Trägers alle Fehler zu vermeiden, so bleibt immer noch die Gefahr vorhanden, dass durch später erfolgende geringe Senkungen einzelner Pfeiler eine beträchtliche Vergrösserung der Biegungsspannungen herbeigeführt werden kann.

Für den Fall aber, dass man trotz solcher Bedenken dennoch sich entschliesst, einen solchen continuirlichen Träger als Brückenbalken zu verwenden, ist es wünschenswerth, eine Methode zu kennen, durch welche man sich wenigstens von den bei Aufstellung des Trägers begangenen Fehlern unabhängig machen kann, und diese Methode soll in dem folgenden Paragraphen erklärt werden.

§ 22.

Vortheilhafteste Aufstellung continuirlicher Träger.

Denkt man sich bei dem Balken auf drei Stützen das eine Mal die Mittelstütze so weit gehoben, dass der Balken die beiden Endstützen nicht mehr berührend nur noch von der Mittelstütze getragen wird (Fig. 106), und das andere Mal die Mittelstütze so weit gesenkt, dass der Balken dieselbe nicht mehr berührend nur noch von den beiden Endstützen getragen wird (Fig. 107), so erkennt man, dass das Biegungsmoment über der Mittelstütze das eine Mal positiv, das andere Mal negativ werden wird. Es muss also zwischen diesen beiden Lagen der Mittelstütze nothwendig eine Zwischenlage geben, für welche das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_2$ den Werth Null annimmt.

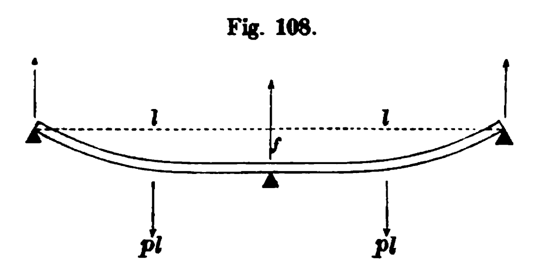

Fig. 106.
Fig. 107.

Dem Falle, in welchem die Mittelstütze um die Höhe f tiefer liegt als die beiden Endstützen (Fig. 108), entspricht (nach § 15, Gleichung 11) der Werth:

$$1)\quad u_1 = \frac{24 E\mathfrak{T}(f - 0)}{l^4}.$$

Wenn hierin f diejenige Grösse bedeutet, um welche bei dem nur durch sein eigenes Gewicht belasteten Balken die Mittelstütze gesenkt werden muss, damit das Biegungsmoment über derselben den Werth Null annehme, so hat man in der Gleichung 1) des § 19, um dieselbe auf den vorliegenden Fall anzuwenden, die

Fig. 108.



Werthe $\mathfrak{M}_2 = 0$, $p_1 = p$, $p_2 = p$ zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

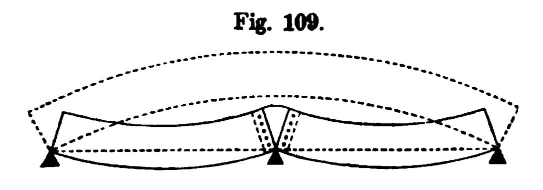
$$2)\quad 0 = \frac{l^2}{8}(p - u_1), \quad \text{oder:} \quad u_1 = p.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für die Grösse u_1 gefundenen Ausdrücke erhält man für die Senkung f den Werth:

$$3)\quad f = \frac{pl^4}{24 E\mathfrak{T}}.$$

Anstatt durch Senken der Mittelstütze zu bewirken, dass das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_2$ den Werth Null annimmt, kann man diesen Zweck auch dadurch erreichen, dass man den Balken über der Mittelstütze durchschneidet und die Schnittstellen alsdann wieder verbindet, oder auch dadurch: dass man die von vornherein getrennten beiden Hälften des Balkens eine jede für sich auf die Stützen legt und nachher über der Mittelstütze zusammennietet (Fig. 109). Ein auf solche Weise aufgestellter Balken befindet sich — obwohl die

Fig. 109.



drei Stützpunkte desselben in einer Horizontalen liegen — genau in demselben Biegungszustande, wie wenn die Mittelstütze bereits um die Höhe f gesenkt wäre, insofern derselbe in spannungslosem Zustande — d. h. von der Wirkung seines eigenen Gewichtes befreit — nach oben sich krümmen und dabei in der Mitte um die Höhe f sich heben würde. Wenn also zufällig der obige Werth

von f übereinstimmen sollte mit dem in § 19 (Gleichung 9) für die Grösse y_2, als vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze, gefundenen Werthe, so wäre für den auf solche Weise aufgestellten Träger die Bedingung der vortheilhaftesten Unterstützungsweise bereits erfüllt, und keine weitere Senkung der Mittelstütze mehr erforderlich. Wenn dagegen f kleiner ist als y_2, so wird man, um die vortheilhafteste Unterstützungsweise herzustellen, die Mittelstütze noch zu senken haben um die Grösse:

$$4)\quad s = y_2 - f.$$

Nach Substitution des in § 19 für y_2 gefundenen Ausdrucks erhält man demnach für die im vorliegenden Falle erforderliche Senkung der Mittelstütze die Gleichung:

$$5)\quad s = \frac{q l^4}{48 E \mathfrak{T}} \left\{ -\frac{p}{q} - 23 + \sqrt{544 - 32 \frac{p}{q}} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe für die beiden Grössen $\frac{p}{q}$ und s:

$\frac{p}{q} =$	0	0,19	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$s = \frac{q(2l)^4}{100\,000 E \mathfrak{T}}$ mal	+ 42	0	— 2	— 46	— 90	— 134	— 179

Für den in § 19 als Beispiel gewählten Träger würde man also dem Werthe $\frac{p}{q} = \frac{6}{10}$ entsprechend die Gleichung erhalten:

$$s = -90 \cdot \frac{q(2l)^4}{100\,000 E \mathfrak{T}},$$

welche auf dieselbe Weise wie in § 19 behandelt nach Substitution der dort angegebenen Werthe die Form annimmt:

$$s = -0{,}3088 \cdot \frac{S}{E} \cdot \frac{l^2}{h} = -92^{\text{mm}}{,}6.$$

Es müsste also bei dem auf die oben beschriebene Weise aufgestellten Träger die Mittelstütze noch um $92^{\text{mm}},6$ gehoben werden, oder es müssten die Endstützen um ebenso viel gesenkt werden, was man z. B. dadurch bewerkstelligen kann, dass man an den beiden Endstützen Platten von 92,6 Millimetern Dicke unterlegt und dieselben nach erfolgter Aufstellung wieder wegnimmt.

Balken auf vier Stützen.

Um für den nur durch sein eigenes Gewicht belasteten Träger diejenige Grösse f zu finden, um welche die Mittelstützen gesenkt werden müssen, damit das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_2$ den Werth Null annehme, hat man zunächst in der Gleichung 3) des § 20 die

Werthe $p_1 = p$, $p_2 = p$, $p_3 = p$ und $\mathfrak{M}_2 = 0$ zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

6) $0 = p\,(2 + m + 2m^3 + m^4) - u_1\,(2 + m)$, oder: $u_1 = p\,(1 + m^3)$.

Die Grösse u_1 hat wieder die in Gleichung 1) angegebene Bedeutung, und die Gleichsetzung dieser beiden für u_1 gefundenen Ausdrücke führt zu der Gleichung:

$$7)\quad f = \frac{p\,(1 + m^3)\,l_1^4}{24\,E\mathfrak{T}}\,.$$

welche hinsichtlich des für die Grösse $\mathfrak{T}$ zu substituirenden Werthes auf dieselbe Weise zu behandeln ist wie die am Schlusse des § 20 für die Grösse y_2, als vortheilhafteste Senkung der Mittelstützen, gefundene Gleichung. Die oben gefundene Grösse f ist von dem für y_2 gefundenen Werthe in Abrechnung zu bringen, und die noch erforderliche Senkung der Mittelstützen wieder nach Gleichung 4) zu berechnen.

Bei dem am Schlusse des § 20 berechneten Zahlenbeispiele wurde für die vortheilhafteste Senkung der Mittelstützen der Werth:

$$y_2 = 139^{mm}$$

gefunden. Hätte man den Balken in drei getrennten Stücken auf die in gleicher Höhe liegenden Stützpunkte gelegt und die Stücke erst nach dem Auflegen zusammengenietet, so würde der Balken in demselben Biegungszustande sich befinden, wie wenn die Mittelstützen bereits um die nach Gleichung 7) zu berechnende Grösse:

$$f = 362^{mm}$$

gesenkt wären. Es würde also bei dem auf solche Weise aufgestellten Träger noch eine Senkung der Mittelstützen erforderlich sein von der Grösse:

$$s = 139 - 362 = -223^{mm},$$

d. h. die Mittelstützen müssten um 223 Millimeter gehoben, oder die Endstützen um ebenso viel gesenkt werden.

ZWEITER ABSCHNITT.
Theorie der Abscheerungskräfte.

---

§ 23.
Reducirte Querschnittsflächen.

Das Gesetz, nach welchem die Biegungsspannungen über die Querschnittsfläche des gebogenen Balkens sich vertheilen, kann man sich mittelst Construction der sogenannten „reducirten Querschnittsflächen“ auf folgende Weise geometrisch veranschaulichen.

Nach § 2 hat die im Abstande u von der Neutralen befindliche Faser die Spannung $S \cdot \frac{u}{w}$ in jeder Flächeneinheit ihres Querschnitts. Wenn man sich auf die in Fig. 110 angedeutete Weise durch parallel zur neutralen Achse gelegte Linien die ganze Querschnittsfläche in unendlich schmale Flächenstreifen zerlegt denkt und diese Flächenstreifen als Querschnittsflächen der gespannten Fasern betrachtet, so ergiebt sich für die ganze Spannung der im Abstande u von der Neutralen befindlichen Faser der in Fig. 111 angegebene Ausdruck.

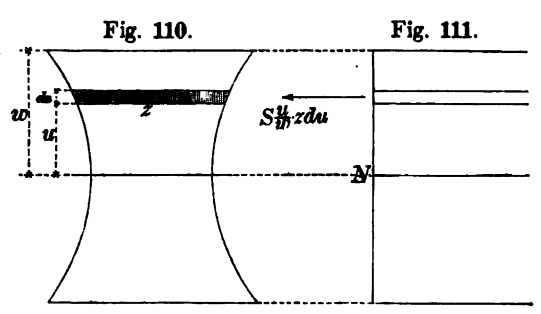


Fig. 110. Fig. 111.

Genau denselben Ausdruck würde man für die Spannung der Faser auch dann erhalten, wenn man annähme, dass ihre Spannung pro Flächeneinheit des Querschnitts den grösseren Werth S hätte, und dass die Breite des Querschnitts an dieser Stelle dafür auf den kleineren Werth:

$$1) \quad v = z \cdot \frac{u}{w}$$

reducirt wäre. Diese reducirte Breite v kann auf die in Fig. 112 angedeutete Weise durch Construction gefunden werden, und wenn man an den übrigen Stellen die Breite des Querschnitts auf dieselbe Weise reducirt, so gelangt man zu der in Fig. 113 dargestellten Form der reducirten Querschnittsfläche. Denkt man sich in jeder Flächeneinheit dieser reducirten Querschnittsfläche die Maximalspannung S stattfindend — und zwar in der einen Hälfte als Zug-Spannung, in der anderen Hälfte als Druck-Spannnng — so erkennt man, dass aus dieser Annahme für die Gesammtwirkung der Spannungswiderstände dieselben Gleichungen sich ergeben müssen, welche in § 2 für die wirklichen Biegungsspannungen gefunden wurden.

Fig. 112.

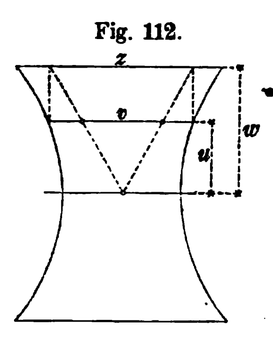
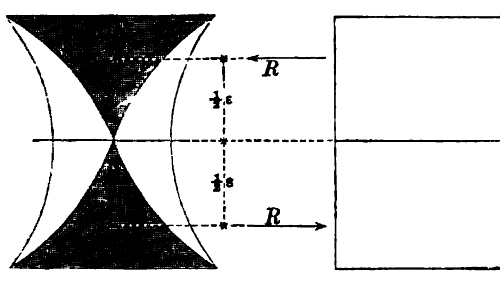


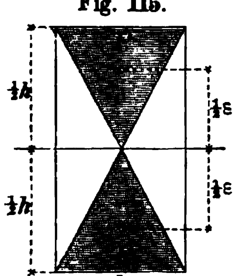
Fig. 113. Fig. 114.



Die Mittelkraft der Zug-Spannungen und die Mittelkraft der Druck-Spannungen bilden zusammen ein Kräftepaar, dessen Moment als Widerstandsmoment der Fasernspannungen gleich dem Biegungsmomente für die betreffende Stelle des Balkens sein muss. Wenn also mit F die eine Hälfte der reducirten Querschnittsfläche bezeichnet wird, so ergiebt sich nach Fig. 114 für die allgemeine Biegungsgleichung 11) des § 2 die neue Form:

$$2)\quad \mathfrak{M} = R \,.\, \varepsilon = SF\varepsilon.$$

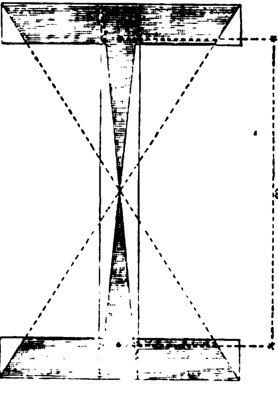
Fig. 115.



Die Angriffspunkte der beiden Mittelkräfte R fallen mit den Schwerpunkten der beiden Hälften des reducirten Querschnitts zusammen. Die Grösse ε als Hebelarm des aus den beiden Kräften R bestehenden Kräftepaares ist demnach (bei der hier vorausgesetzten Symmetrie des Querschnitts in Bezug auf die Biegungsebene) gleich dem Abstande dieser beiden Schwerpunkte zu setzen.

Es würden also z. B. für den rechteckigen Querschnitt nach Fig. 115 die Werthe:

Fig. 116.



$$\varepsilon = \frac{2}{3} h, \qquad F = \frac{bh}{4}$$

zu substituiren sein, und die grösste Biegungsspannung würde zu berechnen sein aus der Gleichung:

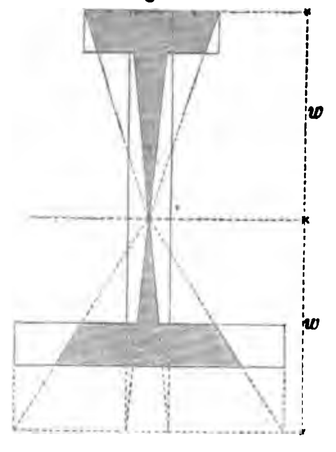
$$3) \quad \mathfrak{M} = S \cdot \frac{bh}{4} \cdot \frac{2}{3} h,$$

oder:

$$\mathfrak{M} = S \frac{bh^2}{6},$$

welche mit der am Schlusse des § 2 gefundenen Gleichung übereinstimmt.

Fig. 117.



Bei einem symmetrischen Blechträger von sehr geringer Stärke der Blechwand wird — wie aus Fig. 116 zu ersehen ist — die Grösse F nahezu mit dem Flanschenquerschnitte übereinstimmen, und die Grösse ε nur wenig verschieden sein von dem Schwerpunktsabstande der beiden Flanschenquerschnitte. Bei unsymmetrisch in Bezug auf die neutrale Achse geformtem Querschnitte würde die Construction der reducirten Querschnittsfläche auf die in Fig. 117 angedeutete Weise auszuführen sein.

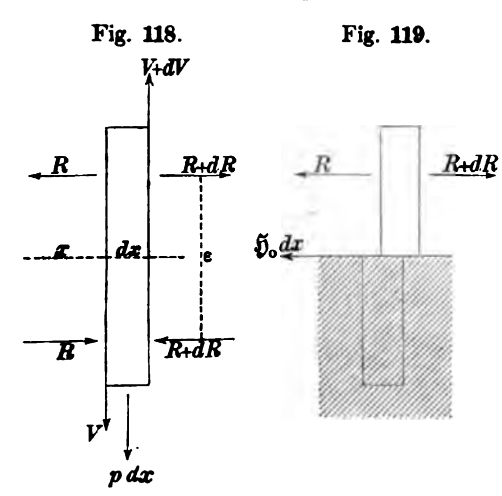
§ 24.

Horizontale Abscheerungskräfte.

Den Gleichgewichtszustand des zwischen zwei unendlich nahe bei einander liegenden Querschnittsflächen befindlichen Balkenstückes kann man sich auf die in Fig. 118 angedeutete Weise veranschaulichen. Indem man — auf dieselbe Weise, wie in § 15 mit Bezug auf Fig. 85 geschehen — die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf das Balkenstück wirkenden Kräfte gleich Null setzt, erhält man die — der Gleichung 1) des § 15 analog gebildete — Gleichung:

$$1)\quad 0 = dR\,.\,\varepsilon - V\,.\,dx,\quad \text{oder:}\quad \frac{dR}{dx} = \frac{V}{\varepsilon}.$$

Auf die obere Hälfte des Balkenstückes wirken nach entgegengesetzten Richtungen die beiden Horizontalkräfte R und $R + dR$. Es wird also durch den Ueberschuss der letzteren — wie Fig. 119 veranschaulicht — in der neutralen Faserschicht ein horizontaler Abscheerungswiderstand hervorgerufen. Indem man die algebraische Summe der auf die obere Hälfte wirkenden Horizontalkräfte gleich Null setzt, erhält man die Gleichung:



$$2)\quad 0 = dR - \mathfrak{H}_0\,.\,dx,\quad \text{oder:}\quad \frac{dR}{dx} = \mathfrak{H}_0,$$

in welcher $\mathfrak{H}_0$ die horizontale Abscheerungskraft pro Längeneinheit der neutralen Faserschicht bedeutet. Die Gleichsetzung der beiden für den Differenzialquotienten $\frac{dR}{dx}$ gefundenen Werthe führt zu der Gleichung:

$$3)\quad \mathfrak{H}_0 = \frac{V}{\varepsilon}.$$

Man erhält also die in der neutralen Faserschicht wirkende horizontale Abscheerungskraft pro Längeneinheit, indem man die ganze in dem Querschnitte wirkende verticale Abscheerungskraft dividirt durch den Schwerpunktsabstand der beiden Hälften des reducirten Querschnitts.

Um für diejenige Faserschicht, welche in der Höhe y über der neutralen Faserschicht liegt, die horizontale Abscheerungskraft pro Längeneinheit zu bestimmen, hat man für den oberhalb dieser Faser befindlichen Theil des Balkenstückes — in derselben Weise wie vorher in Bezug auf die ganze obere Hälfte desselben geschehen — die algebraische Summe der Horizontalkräfte gleich Null zu setzen, und erhält nach Fig. 120 die Gleichung:

4) $0 = dr - \mathfrak{H}\, dx$, oder: $\mathfrak{H} = \frac{dr}{dx}$.

Für das Verhältniss der beiden Grössen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_0$ ergiebt sich hiernach der Werth:

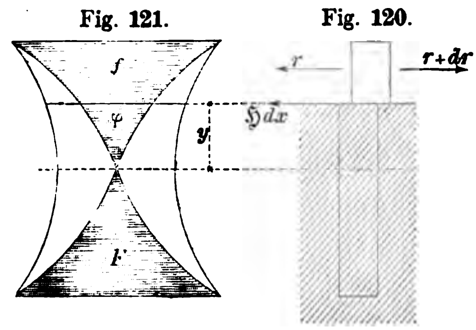


Fig. 121. Fig. 120.

5) $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_0} = \frac{dr}{dR}$.

Wenn mit S und $S + dS$ resp. die Werthe der grössten Biegungsspannung pro Flächeneinheit in den beiden benachbarten Querschnitten bezeichnet werden, und mit F die eine Hälfte des reducirten Querschnitts, so ist:

6) $R = S\,.\,F$ und $R + dR = (S + dS)\,.\,F$

zu setzen, und nach Fig. 121 ergeben sich für die beiden Kräfte r und $r + dr$ in derselben Weise die Gleichungen:

7) $r = S\,.\,f$ und $r + dr = (S + dS)\,.\,f$.

Die Spannungsdifferenzen dR und dr haben also die Grössen:

8) $dR = dS\,.\,F$ und $dr = dS\,.\,f$,

und wenn man diese Werthe in Gleichung 5) substituirt, so erhält man für das Verhältniss der beiden horizontalen Abscheerungskräfte die Gleichung:

9) $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_0} = \frac{f}{F}$.

Es verhalten sich also die horizontalen Abscheerungskräfte pro Längeneinheit in den verschiedenen Horizontalschnitten wie die oberhalb derselben liegenden Theile der reducirten Querschnittsfläche.

§ 25.

Verticale Abscheerungskräfte.

Die Art und Weise, wie das in der Höhe y über der neutralen Fasernschicht befindliche rechteckige Balkenstück von der Höhe dy und der Länge dx gleichzeitig durch die verticalen und horizontalen Abscheerungskräfte in Anspruch genommen wird, ist in den Figuren 122 und 123 veranschaulicht. Wenn diese Abschee-

rungskräfte die einzigen Kräfte wären, welche auf das Balkenelement wirken, so würde man nach Fig. 124, indem man die algebraische Summe der statischen Momente derselben in Bezug auf den Drehpunkt O gleich Null setzt, die Gleichung erhalten:

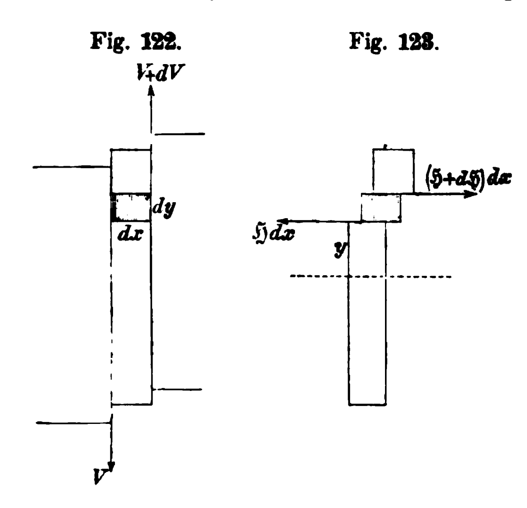


Fig. 122. Fig. 123.

$$1)\quad 0 = \mathfrak{H}\,dx\,.\,dy - \mathfrak{V}\,dy\,.\,dx,$$

in welcher $\mathfrak{V}$ die verticale Abscheerungskraft pro Längeneinheit des Verticalschnitts bedeutet an derjenigen Stelle, welche in der Höhe y über der neutralen Faserschicht liegt.

Ausser den in Fig. 124 angegebenen Kräften wirkt auf das Balkenelement noch das in Fig. 125 dargestellte Kräfte-System, welches nach Weglassung der einander gegenseitig aufhebenden Kräfte auf das in Fig. 126 angegebene Kräfte-System reducirt werden kann. In den Ausdrücken für die in Fig. 125 angegebenen

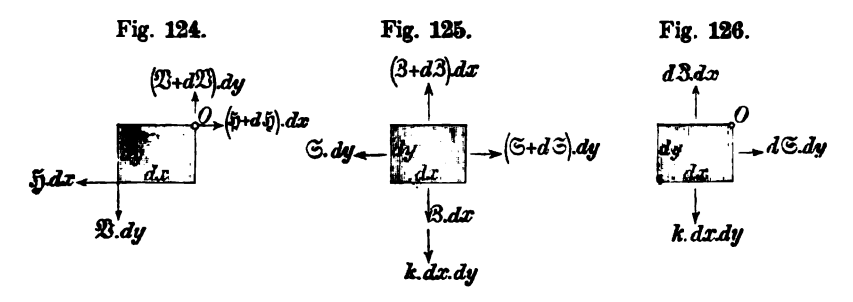


Fig. 124. Fig. 125. Fig. 126.

Kräfte bedeutet $\mathfrak{S}$ die Normalkraft pro Längeneinheit des Verticalschnitts, $\mathfrak{Z}$ die Normalkraft pro Längeneinheit des Horizontalschnitts und k das Eigengewicht des rechteckigen Balkenelements pro Flächeneinheit der Rechteckfläche. Die statischen Momente der in Fig. 126 angegebenen Kräfte in Bezug auf den Drehpunkt O müssten noch hinzugefügt werden zu den in Gleichung 1) zusammengestellten statischen Momenten. Wenn man indessen be-

rücksichtigt, dass die beiden statischen Momente der Gleichung 1) unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung sind, während die hinzuzufügenden statischen Momente der in Fig. 126 angegebenen Kräfte sämmtlich unendlich kleine Grössen dritter Ordnung sind, so erkennt man, dass die Hinzufügung dieser letzteren in dem Resultate nichts ändern würde, dass also die Gültigkeit der Gleichung 1) durch das Fortlassen derselben nicht beeinträchtigt wird. Nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors $dx \,.\, dy$ nimmt jene Gleichung die Form an:

$$2) \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{H}$$

und zeigt, dass die verticale Abscheerungskraft pro Längeneinheit des Verticalschnitts immer gleich ist der horizontalen Abscheerungskraft pro Längeneinheit des Horizontalschnitts. Es können daher die im vorigen Paragraphen in Betreff der horizontalen Abscheerungskräfte gewonnenen Resultate benutzt werden zur Ermittelung und graphischen Darstellung des Gesetzes, nach welchem die ganze verticale Abscheerungskraft V über die ganze Länge h des Verticalschnitts sich vertheilt.

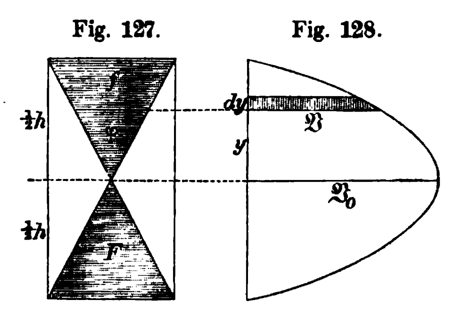


Fig. 127. Fig. 128.

Nach den Gleichungen 3) und 9) des vorigen Paragraphen erhält man z. B. für den in Fig. 127 dargestellten rechteckigen Querschnitt die Werthe:

$$3) \quad \mathfrak{V}_0 = \mathfrak{H}_0 = \frac{V}{\varepsilon} = \frac{V}{\frac{2}{3}h},$$

$$4) \quad \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_0} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_0} = \frac{F - \varphi}{F} = 1 - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}h\right)^2}.$$

Die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem $\mathfrak{V}$ mit y sich ändert, ist — wie Fig. 128 veranschaulicht — ein parabolischer Bogen von der Pfeilhöhe $\mathfrak{V}_0$. Der schraffirte Flächenstreifen stellt die Grösse des Products $\mathfrak{V} \,.\, dy$ dar, und die ganze Parabelfläche:

$$5) \quad \int \mathfrak{V}\, dy = V$$

repräsentirt die ganze verticale Abscheerungskraft des Querschnitts.

Für den in Fig. 129 dargestellten, aus drei Rechtecken zusammengesetzten Querschnitt eines Blechträgers erhält man als graphische Darstellung der verticalen Abscheerungskräfte eine aus drei Parabelbögen zusammengesetzte Curve (Fig. 130). Der mittlere Parabelbogen wird eine um so flachere Form annehmen, je geringer die

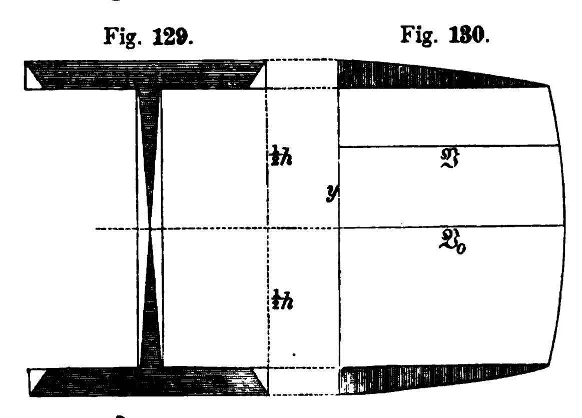


Fig. 129. Fig. 130.

Dicke der Blechwand ist, und wenn zugleich die Höhe der Flanschen-Querschnitte sehr klein ist im Verhältniss zur ganzen Höhe, so wird der von den Flanschen aufgenommene — in Fig. 130 durch die schraffirten Flächenstücke repräsentirte — Theil der ganzen verticalen Abscheerungskraft sehr klein sein im Verhältniss zu dem von der Blechwand aufgenommenen Theile. Die ganze Figur 130 wird in diesem Falle nahezu die Form eines Rechtecks erhalten, und man wird annäherungsweise annehmen dürfen, dass die ganze verticale Abscherungskraft V ausschliesslich von der Blechwand aufgenommen wird, dass sie gleichförmig über die Höhe derselben sich vertheilt, und dass die verticale Abscheerungskraft pro Längeneinheit der Höhe zu bestimmen ist aus der Gleichung:

$$6)\quad \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 = \frac{V}{h}.$$

Zugleich darf unter dieser Voraussetzung die in Fig. 113 mit ε bezeichnete Grösse annäherungsweise gleich h gesetzt, folglich (nach § 23, Gleichung 2) die grösste Biegungsspannung aus der Gleichung:

$$7)\quad \mathfrak{M} = SF\,.\,h, \quad \text{oder:} \quad S = \frac{\mathfrak{M}}{Fh}$$

berechnet werden, in welcher für die Grösse F, als Hälfte der reducirten Querschnittsfläche, annäherungsweise auch der Flanschen-Querschnitt gesetzt werden darf.

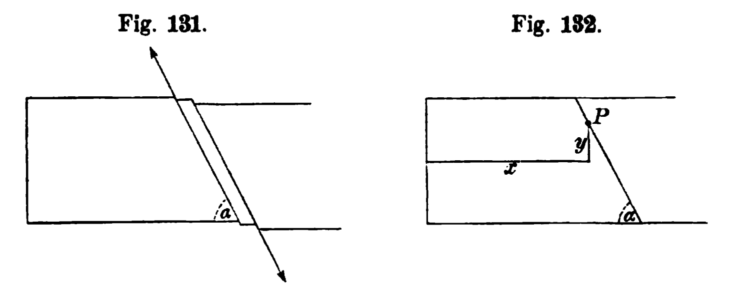
§ 26.

Maxima und Minima der Abscheerungskräfte.

Nicht nur in den horizontalen und verticalen Schnittfugen, sondern auch in jeder beliebigen um irgend einen Winkel α gegen die Horizontale geneigten Schnittfuge sind Abscheerungskräfte thätig. Diese Abscheerungskräfte sollen als positiv angesehen werden, wenn dieselben in dem Sinne wirken, wie in Fig. 131 angegeben; als negativ, wenn dieselben in entgegengesetztem Sinne wirken.

Die ganze längs der Schnittfuge wirkende Abscheerungskraft wird nach irgend einem Gesetze über die Länge derselben sich

Fig. 131. Fig. 132.



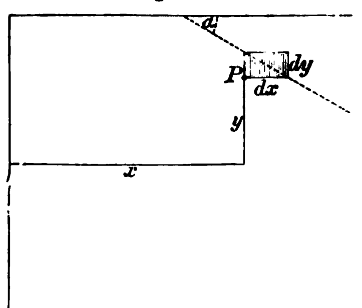
vertheilen, und wenn mit $\mathfrak{A}$ die pro Längeneinheit der Schnittfuge wirkende Abscheerungskraft bezeichnet wird für irgend einen Punkt P, dessen Coordinaten x, y sind, so wird die Grösse $\mathfrak{A}$ als eine Function der drei Grössen α, x, y sich darstellen lassen müssen (Fig. 132). Bei Vergleichung der Fig. 131 mit den Figuren 122 und 123 erkennt man zugleich, dass:



$\mathfrak{A} = +\mathfrak{H}$ wird, wenn $\alpha = 0°$ ist,

$\mathfrak{A} = -\mathfrak{V}$ „ „ $\alpha = 90°$ ist,

Fig. 133.



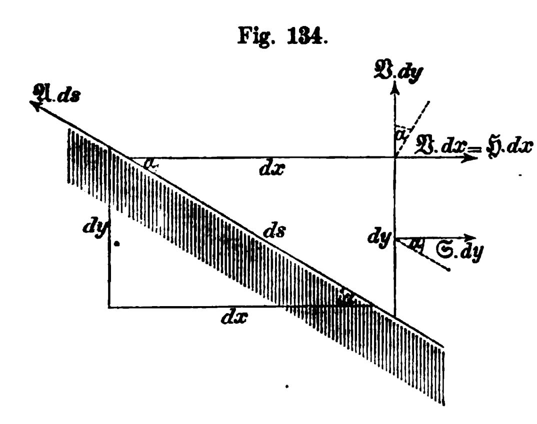
Um für eine bestimmte Stelle P das Gesetz zu finden, nach welchem die Abscheerungskraft $\mathfrak{A}$ mit dem Winkel α sich ändert, hat man sich die Schnittfuge durch das unendlich kleine rechteckige Balkenstück von der Breite dx und der Höhe dy so hindurchgelegt zu denken, dass dieselbe mit der Diagonale dieses Rechtecks zusammenfällt (Fig. 133). Das Rechteck

wird alsdann durch den Schnitt in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt, und wenn die Diagonale des Rechtecks als gemeinschaftliche Hypotenuse der beiden rechtwinkeligen Dreiecke mit ds bezeichnet wird, so finden zwischen dem Winkel α und den Dreieckseiten dx, dy, ds (nach Fig. 134) die Beziehungen statt:

$$1)\quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

In Betreff der Kräfte, welche auf das Balken-Element wirken, soll vorläufig die Voraussetzung gemacht werden, dass in den Horizontalschnitten keine Normalkräfte wirken, dass also die in Fig. 125 mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnete Kraft gleich Null ist. Die Bedingungen, von welchen die Zulässigkeit dieser Voraussetzung abhängt, sollen später geprüft werden.

Fig. 134.



Wenn man sich jede von den auf das eine der beiden Dreieckstücke wirkenden Kräften zerlegt denkt in zwei rechtwinkelig zu einander gerichtete Seitenkräfte, von denen die eine parallel, die andere normal zu der Hypotenuse gerichtet ist, und wenn man alsdann die algebraische Summe der ersteren gleich Null setzt, so ergiebt sich daraus für den längs der Hypotenuse wirkenden Abscheerungswiderstand die Gleichung:

$$2)\quad \mathfrak{A}\,ds = \mathfrak{S}\,dy\cos\alpha + \mathfrak{V}\,dx\cos\alpha - \mathfrak{V}\,dy\sin\alpha,$$

welche auf beiden Seiten durch ds dividirt, nach Substitution der aus den Gleichungen 1) für $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ zu entnehmenden Ausdrücke, die folgende Form annimmt:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\sin\alpha\cos\alpha + \mathfrak{V}(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) \quad \text{oder:}$$

$$3)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}\sin 2\alpha + \mathfrak{V}\cos 2\alpha.$$

Aus dieser Gleichung kann man für jeden Werth von α den zugehörigen Werth von $\mathfrak{A}$ berechnen. Um denjenigen Werth $\alpha = \alpha_m$ zu finden, für welchen die Grösse $\mathfrak{A}$ ein Maximum oder Minimum

wird, hat man den Differenzialquotienten von $\mathfrak{A}$ nach α gleich Null zu setzen. Man erhält dann die Gleichung:

$$4)\quad \frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha} = 0 = \mathfrak{S} \cos 2\alpha_m - 2\mathfrak{B} \sin 2\alpha_m, \quad \text{oder:}$$

$$5)\quad \operatorname{tg} 2\alpha_m = \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{S}}{\mathfrak{B}}.$$

Um denjenigen Werth $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_m$ zu finden, welchen die Abscheerungskraft annimmt, wenn $\alpha = \alpha_m$ wird, hat man der allgemeineren Gleichung 3) zunächst die folgende Form zu geben:

$$6)\quad \mathfrak{A} = \cos 2\alpha \left(\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{S} \operatorname{tg} 2\alpha\right) = \frac{\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{S} \operatorname{tg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + (\operatorname{tg} 2\alpha)^2}}.$$

und hierin für $\operatorname{tg} 2\alpha$ den oben für die Grösse $\operatorname{tg} 2\alpha_m$ gefundenen Ausdruck zu substituiren. Man erhält dann für $\mathfrak{A}_m$ den Werth:

$$7)\quad \mathfrak{A}_m = \pm\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}.$$

Zwischen den hier in Betracht kommenden Grenzwerthen Null und 180 Grad giebt es zwei verschiedene Werthe des Winkels α, welche der Gleichung 5) Genüge leisten. Diese beiden Winkel sind um 90 Grad von einander verschieden. Dem einen entspricht das Maximum, dem andern das Minimum der Grösse $\mathfrak{A}$; und nach Gleichung 7) ist:

$$8)\quad \mathfrak{A}_{(\text{maximum})} = +\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2},$$

$$9)\quad \mathfrak{A}_{(\text{minimum})} = -\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}.$$

§ 27.

Graphische Darstellung der Abscheerungskräfte.

Die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen würde man benutzen können, um das Gesetz, nach welchem $\mathfrak{A}$ mit α sich ändert, graphisch darzustellen. Es empfiehlt sich jedoch, zu diesem Zwecke jene Gleichung zuvor auf eine andere Form zu bringen, indem man die Winkel-Differenz $\alpha - \alpha_m$ mit φ bezeichnet und demgemäss den Werth:

$$1)\quad \alpha = \alpha_m + \varphi$$

in jener Gleichung substituirt. Man gelangt alsdann zu den folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} \sin(2\alpha_m + 2\varphi) + \mathfrak{B} \cos(2\alpha_m + 2\varphi),$$

$$3)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\mathfrak{S}\,(\sin 2\alpha_m \cos 2\varphi + \cos 2\alpha_m \sin 2\varphi) + \mathfrak{B}\,(\cos 2\alpha_m \cos 2\varphi - \sin 2\alpha_m \sin 2\varphi),$$

$$4)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\mathfrak{S}\cos 2\alpha_m\,(\operatorname{tg} 2\alpha_m \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) + \mathfrak{B}\sin 2\alpha_m\left(\frac{\cos 2\varphi}{\operatorname{tg} 2\alpha_m} - \sin 2\varphi\right).$$

Der letzteren Gleichung kann man, da die ausserhalb der Klammern stehenden beiden Grössen nach Gleichung 4) des vorigen Paragraphen einander gleich sind, auch die folgende Form geben:

$$5)\quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B}\sin 2\alpha_m\left(\operatorname{tg} 2\alpha_m \cos 2\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{\operatorname{tg} 2\alpha_m}\right),\ \text{oder:}$$

$$6)\quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha_m} = \mathfrak{B}\cos 2\varphi\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2\alpha_m^2},$$

und nach Substitution des im vorigen Paragraphen für die Grösse $\operatorname{tg} 2\alpha_m$ gefundenen Werthes erhält man die Gleichung:

$$7)\quad \mathfrak{A} = \left(\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}\right)\cos 2\varphi.$$

Nach den Gleichungen 8) und 9) des vorigen Paragraphen repräsentirt der Wurzel-Ausdruck den absoluten Werth der Grösse $\mathfrak{A}_{(max)}$ oder $\mathfrak{A}_{(min)}$, und wenn man diesen absoluten Werth mit $\mathfrak{A}_m$ bezeichnet, so kann man der obigen Gleichung auch die noch einfachere Form geben:

$$8)\quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_m \cos 2\varphi,$$

indem man zugleich unter dem Winkel α_m in Gleichung 1) denjenigen Winkel versteht, für welchen $\mathfrak{A} = +\mathfrak{A}_m$ wird. Aus der obigen Gleichung ergeben sich die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe der Grössen φ und $\mathfrak{A}$:

$$9)\quad \begin{cases} \varphi = & 0^\circ & 45^\circ & 90^\circ & 135^\circ & 180^\circ, \\ \mathfrak{A} = & +\mathfrak{A}_m & 0 & -\mathfrak{A}_m & 0 & +\mathfrak{A}_m. \end{cases}$$

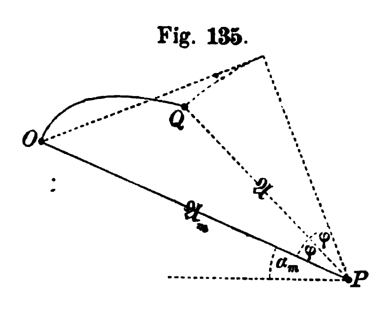
Die Richtungen, in welchen die Abscheerungskraft gleich Null ist, schliessen also Winkel von 45° ein mit den Richtungen der grössten und kleinsten Abscheerungskraft.

Wenn man auf jeder von dem Punkte P ausgehenden geraden Linie die ihrer Richtung entsprechende Grösse von $\mathfrak{A}$ als Längengrösse abträgt, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine krumme Linie, deren Form das Gesetz veranschaulicht, nach welchem die Grösse $\mathfrak{A}$ mit dem Winkel φ sich ändert. Die Construction irgend eines Punktes Q dieser krummen Linie kann auf die in Fig. 135 angedeutete Weise ausgeführt werden. Durch

Wiederholung dieser Construction gelangt man schliesslich zu der in Fig. **136** dargestellten Linie, welche für alle Werthe des Winkels φ zwischen 0° und 180° die Grössen der Abscheerungskräfte erkennen lässt.

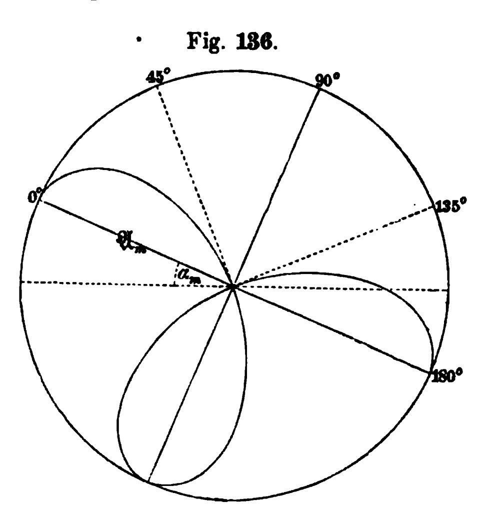
Die Grösse des Winkels α_m oder die Lage der beiden rechtwinkelig zu einander stehenden Achsen, welche die Richtungen der grössten und kleinsten Abscheerungskraft darstellen, hängt ab — wie aus Gleichung 5) des § 26 zu ersehen ist — von den beiden Grössen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$, welche ihrerseits Functionen der Coordinaten x, y sind.

Fig. **135**.



Wenn $\mathfrak{S} = 0$ und $\mathfrak{B}$ zugleich positiv ist, so wird $\alpha_m = 0$ und $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. In diesem Falle ist die Horizontale die Richtung der grössten und die Verticale die Richtung der kleinsten (oder grössten negativen) Abscheerungskraft. Eine solche Lage nimmt das Achsen-System an, erstens: in jedem Punkte des Verticalschnitts an denjenigen Stellen, wo die elastische Linie ihre Wendepunkte hat, weil an diesen Stellen das Biegungsmoment Null ist; zweitens: in jedem Punkte der Achse des Balkens, weil in der neutralen Faserschicht keine Biegungsspannung stattfindet. Bei negativem Werthe von $\mathfrak{B}$ würde die verticale Achse die Richtung der grössten und die horizontale Achse die Richtung der kleinsten (oder grössten negativen) Abscheerungskraft darstellen.

Fig. **136**.



Wenn $\mathfrak{B} = 0$ ist, so wird $\alpha_m = 45°$ und $\mathfrak{A}_m = \frac{1}{2}\mathfrak{S}$. In diesem Falle bildet jede der beiden Achsen einen Winkel von 45° mit der Horizontalen. Eine solche Lage wird das Achsen-System annehmen,

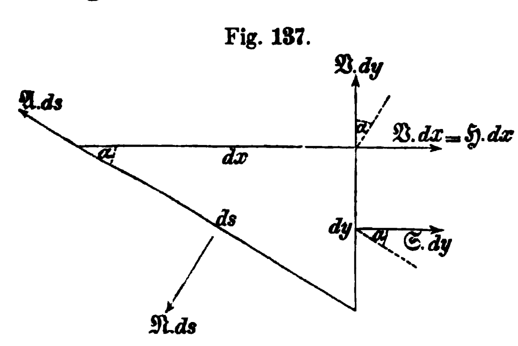
erstens: in dem höchsten und in dem tiefsten Punkte eines jeden Verticalschnitts, weil (nach Fig. 128 und Fig. 130) die Grösse $\mathfrak{V}$ nach oben und nach unten hin bis auf Null abnimmt; zweitens: in jedem Punkte des Verticalschnitts an solchen Stellen der elastischen Linie, wo das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ ein Maximum oder Minimum wird, weil an solchen Stellen $\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$, folglich auch $V = 0$ ist. Wenn $\mathfrak{S}$ positiv ist, so bildet die von rechts nach links ansteigende Achse die Richtung der grössten, die von links nach rechts ansteigende die Richtung der kleinsten (oder grössten negativen) Abscheerungskraft. Bei negativem Werthe von $\mathfrak{S}$ würden die beiden Achsen ihre Bedeutungen mit einander vertauschen, d. h. es würde die nach rechts ansteigende die Richtung der grössten und die nach links ansteigende die Richtung der kleinsten (oder grössten negativen) Abscheerungskraft darstellen.

§ 28.

Maxima und Minima der Normalspannungen.

Ausser dem längs der Hypotenuse wirkenden Abscheerungswiderstande $\mathfrak{A}\,ds$ wird durch die in Fig. 134 dargestellten Kräfte auch noch ein normal zu der Hypotenuse gerichteter Widerstand hervorgerufen. Wenn mit $\mathfrak{N}$ der Normalwiderstand pro Längeneinheit des Hypotenusenschnitts bezeichnet wird, so ist $\mathfrak{N}\,ds$ der gesammte Normalwiderstand, welcher einer Trennung der beiden Hälften des rechteckigen Balken-Elements entgegenwirkt. Indem man auf die rechtwinkelig zu der Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks gerichteten Seitenkräfte des in Fig. 137 dargestellten Kräfte-Systems die allgemeinen Gleichgewichts-Bedingungen anwendet, gelangt man zunächst zu der folgenden Gleichung:

Fig. 137.



$$1)\quad \mathfrak{N}\,ds = \mathfrak{V}\,dy \cos\alpha + \mathfrak{V}\,dx \sin\alpha + \mathfrak{S}\,dy \sin\alpha,$$

welche auf beiden Seiten durch ds dividirt in die folgende Form gebracht werden kann:

2) $\mathfrak{N} = 2\mathfrak{B} \sin\alpha \cos\alpha + \mathfrak{S} \sin\alpha^2$, oder:

3) $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\mathfrak{S}(1 - \cos 2\alpha)$.

Man erkennt aus dieser Gleichung, nach welcher man für jeden Werth von α den zugehörigen Werth von $\mathfrak{N}$ berechnen kann, dass $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$ wird für $\alpha = 90^0$, und dass $\mathfrak{N} = 0$ wird für $\alpha = 0$ (entsprechend der gemachten Voraussetzung, dass in den Horizontalschnitten keine Normalspannungen stattfinden).

Um denjenigen Winkel $\alpha = \alpha_n$ zu finden, für welchen $\mathfrak{N}$ ein Maximum oder Minimum wird, hat man den Differenzialquotienten von $\mathfrak{N}$ nach α genommen gleich Null zu setzen. Man erhält dann die Gleichung:

4) $\frac{d\mathfrak{N}}{d\alpha} = 0 = 2\mathfrak{B} \cos 2\alpha_n + \mathfrak{S} \sin 2\alpha$, oder:

5) $\operatorname{tg} 2\alpha_n = -\frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}\mathfrak{S}}$.

Um denjenigen Werth $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_m$ zu finden, welchen die Normalkraft $\mathfrak{N}$ annimmt, wenn $\alpha = \alpha_n$ wird, hat man der allgemeinen Gleichung 3) zunächst die folgende Form zu geben:

6) $\mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \cos 2\alpha \left(\mathfrak{B} \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)$, oder:

7) $\mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{B} \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{1}{2}\mathfrak{S}}{\pm\sqrt{1 + (\operatorname{tg} 2\alpha)^2}}$,

und hierin für $\operatorname{tg} 2\alpha$ den in Gleichung 5) für $\operatorname{tg} 2\alpha_n$ gefundenen Werth zu substituiren. Man erhält dann für $\mathfrak{N}_m$ die Gleichung:

8) $\mathfrak{N}_m = \frac{1}{2}\mathfrak{S} \pm \frac{\frac{\mathfrak{B}^2}{\frac{1}{2}\mathfrak{S}} + \frac{1}{2}\mathfrak{S}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}\mathfrak{S}}\right)^2}}$, oder:

9) $\mathfrak{N}_m = \frac{1}{2}\mathfrak{S} \pm \sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}$.

Zwischen den Grenzen 0^0 und 180^0 giebt es zwei um 90^0 von einander verschiedene Werthe des Winkels α, welche der Gleichung 5) Genüge leisten. Dem einen entspricht das Maximum, dem andern das Minimum von $\mathfrak{N}$, und nach Gleichung 9) ist:

10) $\mathfrak{N}_{(max)} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}$,

11) $\mathfrak{N}_{(min)} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} - \sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}$.

Die Frage: welchem von jenen beiden Werthen des Winkels α_n das Maximum und welchem das Minimum von $\mathfrak{N}$ entspricht, kann mit Hülfe der allgemeinen Gleichung 3) leicht beantwortet werden.

Bei Vergleichung der in diesem Paragraphen gefundenen Gleichungen mit den in § 26 gefundenen erkennt man, dass zwischen den Grössen $\mathfrak{A}_m$, α_m einerseits und den Grössen $\mathfrak{N}_m$, α_n andrerseits die Beziehungen stattfinden:

$$12) \quad \mathfrak{N}_m = \frac{1}{2}\mathfrak{S} \pm \mathfrak{A}_m,$$

$$13) \quad \operatorname{tg} 2\alpha_n = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_m}.$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass die Flächen der grössten und kleinsten Normalspannungen Winkel von 45° einschliessen mit den Flächen der grössten und kleinsten Abscheerungsspannungen. Aus den Gleichungen 9) des § 27 ergiebt sich zugleich, dass in den Flächen der grössten und kleinsten Normalspannungen die Abscheerungsspannung Null ist.

§ 29.

Graphische Darstellung der Normalspannungen.

Um das Gesetz, nach welchem $\mathfrak{N}$ mit α sich ändert, graphisch darzustellen, hat man die allgemeine Gleichung 3) des vorigen Paragraphen zuvor auf eine einfachere Form zu bringen, indem man die Winkeldifferenz $\alpha - \alpha_n$ mit ψ bezeichnet und dem entsprechend den Werth:

$$1) \quad \alpha = \alpha_n + \psi$$

in jener Gleichung substituirt. Man gelangt alsdann zu den folgenden Gleichungen:

$$2) \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}\sin(2\alpha_n + 2\psi) - \frac{1}{2}\mathfrak{S}\cos(2\alpha_n + 2\psi),$$

$$3) \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}(\sin 2\alpha_n \cos 2\psi + \cos 2\alpha_n \sin 2\psi) - \frac{1}{2}\mathfrak{S}(\cos 2\alpha_n \cos 2\psi - \sin 2\alpha_n \sin 2\psi),$$

$$4) \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}\cos 2\alpha_n(\operatorname{tg} 2\alpha_n \cos 2\psi + \sin 2\psi) - \frac{1}{2}\mathfrak{S}\sin 2\alpha_n\left(\frac{\cos 2\psi}{\operatorname{tg} 2\alpha_n} - \sin 2\psi\right).$$

Der letzteren Gleichung kann man, da die ausserhalb der Klammern stehenden Factoren der letzteren beiden Glieder (nach

Gleichung 4) des vorigen Paragraphen) einander gleich sind, auch die folgenden Formen geben:

$$5)\quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \mathfrak{B}\cos 2\alpha_n\left(\operatorname{tg} 2\alpha_n \cos 2\psi + \frac{\cos 2\psi}{\operatorname{tg} 2\alpha_n}\right),$$

$$6)\quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{B}\cos 2\psi}{\sin 2\alpha_n}.$$

Wenn man hierin die Grösse $\sin 2\alpha_n$ ausdrückt durch $\operatorname{tg} 2\alpha_n$ und alsdann für letztere Grösse den in Gleichung 5) des vorigen Paragraphen gefundenen Ausdruck substituirt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} \pm \mathfrak{B}\cos 2\psi \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_n}\right)^2},$$

$$8)\quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} \pm \left(\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}\right)\cos 2\psi,$$

welcher letzteren man nach Gleichung 7) des § 26 auch die einfachere Form geben kann:

$$9)\quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \mathfrak{A}_m \cos 2\psi.$$

In Gleichung 8) ist das Plus-Zeichen als gültig zu betrachten, wenn unter α_n derjenige Winkel verstanden wurde, welcher dem Maximum von $\mathfrak{N}$ entspricht; das Minus-Zeichen dagegen, wenn unter α_n derjenige Winkel verstanden wurde, welcher dem Minimum von $\mathfrak{N}$ entspricht. Es soll im Folgenden der erstere dieser beiden Fälle vorausgesetzt werden. Dem Werthe $\psi = 0$ entspricht also das Maximum von $\mathfrak{N}$, und für die Grösse $\mathfrak{A}_m$ ist nunmehr unter allen Umständen der positive Werth des Wurzelausdrucks Rechnung zu bringen.

Aus Gleichung 9) ergeben sich die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe der beiden Grössen ψ und $\mathfrak{N}$:

$$10)\quad \begin{cases} \psi = & 0^\circ & 45^\circ & 90^\circ & 135^\circ & 180^\circ, \\ \mathfrak{N} = & \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \mathfrak{A}_m & \frac{1}{2}\mathfrak{S} & \frac{1}{2}\mathfrak{S} - \mathfrak{A}_m & \frac{1}{2}\mathfrak{S} & \frac{1}{2}\mathfrak{S} + \mathfrak{A}_m \end{cases}$$

Da $\mathfrak{A}_m$ positiv ist und stets grösser als $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$, so wird das Maximum der absoluten Werthe von $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{S}$ positiv ist, dem Werthe $\psi = 0$, dagegen, wenn $\mathfrak{S}$ negativ ist, dem Werthe $\psi = 90^\circ$ entsprechen. Die grösste Normalspannung ist im ersteren Falle eine Zug-Spannung, im letzteren eine Druck-Spannung.

Die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem $\mathfrak{N}$ mit ψ sich ändert, würde man aus Fig. 136 ableiten können, indem man für jeden Punkt der dort gefundenen Curve zu der Länge

des Radiusvectors die Grösse $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$ hinzufügt, und alsdann die ganze Figur in diejenige Lage bringt, welche dem Werthe des Winkels α_n entspricht. Für den Fall, in welchem $\mathfrak{S} = 0$ ist, würde also der Form nach eine völlige Uebereinstimmung stattfinden zwischen den beiden Curven, welche die Grössen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}$ als Functionen des Winkels α darstellen. Für diesen Fall wird:

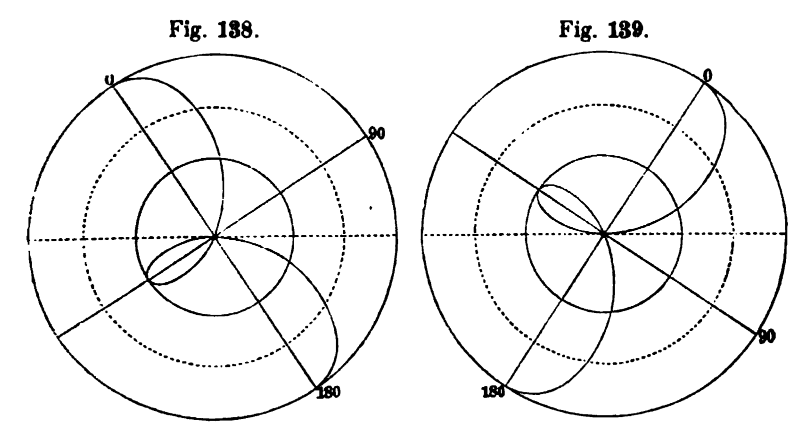
$$11)\quad \mathfrak{N}_m = \pm \mathfrak{A}_m = \pm \mathfrak{V},$$

d. h. an allen denjenigen Stellen, wo keine Biegungsspannung stattfindet, ist die grösste Normalspannung gleich der horizontalen oder verticalen Abscheerungsspannung. Zu diesen Stellen gehören: erstens, alle Punkte der neutralen Faserschicht, zweitens, alle Punkte des Verticalschnitts an solchen Stellen des Balkens, wo das Biegungsmoment Null ist.

Form und Lage der Figur, welche die Grösse $\mathfrak{N}$ als Function des Winkels ψ graphisch darstellt, werden verschieden ausfallen, je nachdem die beiden Grössen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{V}$ positive oder negative Werthe haben, und sind in dieser Beziehung folgende vier Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall (Fig. 138). $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{V}$ sind beide positiv. Der Winkel α_n, für welchen $\mathfrak{N}$ ein positives Maximum wird, liegt

Fig. 138. Fig. 139.



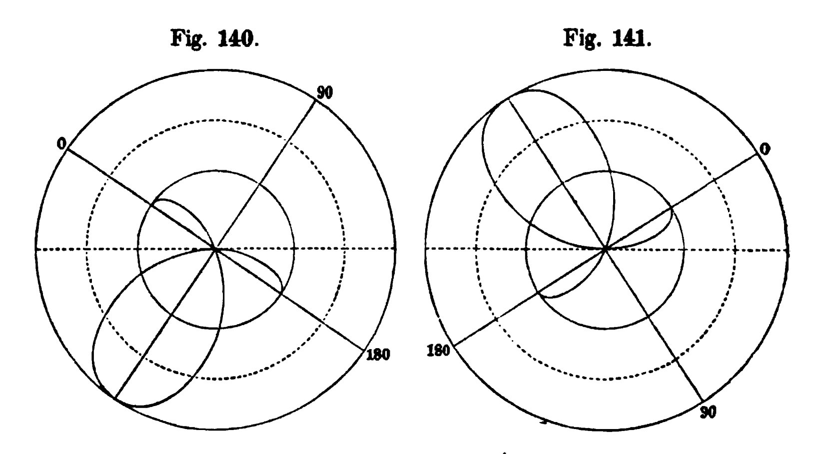
zwischen 45° und 90°. Die Grösse $\mathfrak{N}_{(max)}$ bildet zugleich das Maximum der absoluten Werthe von $\mathfrak{N}$. Die grösste Normalspannung ist eine Zugspannung.

Zweiter Fall (Fig. 139). $\mathfrak{S}$ ist positiv, $\mathfrak{V}$ ist negativ. Der Winkel α_n, für welchen $\mathfrak{N}$ ein positives Maximum wird, liegt zwischen 90° und 135°. Die Grösse $\mathfrak{N}_{(max)}$ bildet zugleich das

Maximum der absoluten Werthe von $\mathfrak{N}$. Die grösste Normalspannung ist eine Zugspannung.

Dritter Fall (Fig. 140). $\mathfrak{S}$ ist negativ, $\mathfrak{B}$ ist positiv. Der Winkel α_n, für welchen $\mathfrak{N}$ ein positives Maximum wird, liegt zwischen 0° und 45°. Das Maximum der absoluten Werthe von $\mathfrak{N}$ wird durch die Grösse $\mathfrak{N}_{(min)}$ gebildet. Die grösste Normalspannung ist eine Druckspannung.

Fig. 140. Fig. 141.



Vierter Fall (Fig. 141). $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{B}$ sind beide negativ. Der Winkel α_n, für welchen $\mathfrak{N}$ ein positives Maximum wird, liegt zwischen 135° und 180°. Das Maximum der absoluten Werthe von $\mathfrak{N}$ wird durch die Grösse $\mathfrak{N}_{(min)}$ gebildet. Die grösste Normalspannung ist eine Druckspannung.

In sämmtlichen vier Figuren ist der Halbmesser des grösseren Kreises gleich der Summe der absoluten Werthe von den beiden Grössen $\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$; der Halbmesser des kleineren Kreises ist gleich dem Ueberschusse des absoluten Werthes der Grösse $\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}\right)^2}$ über den absoluten Werth der Grösse $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$. Als Anfangsrichtung mit „0“ bezeichnet ist in allen vier Figuren diejenige, für welche $\mathfrak{N}$ ein positives Maximum wird. Von dieser dem Werthe $\psi = 0$ entsprechenden Richtung anfangend, sind für alle Werthe des Winkels ψ zwischen 0° und 180° die absoluten Werthe von $\mathfrak{N}$ auf der jedesmaligen Richtung des Radiusvectors abgetragen und zwar nach vorwärts oder nach rückwärts, je nachdem $\mathfrak{N}$ eine positive oder negative Grösse ist.

§ 30.

Berechnung der grössten Normalspannung pro Flächeneinheit.

Bei den vorstehenden Untersuchungen war mit dem Buchstaben $\mathfrak{S}$ die Normalspannung pro Längeneinheit des Verticalschnitts bezeichnet für diejenige Stelle, welche in der Höhe y über der Neutralen liegt. Folglich ist $\mathfrak{S}\,dy$ die ganze Horizontalspannung der in diesem Abstande von der Neutralen befindlichen Faser von der Höhe oder Dicke dy. Wenn also mit $\mathfrak{s}$ die Normalspannung pro Flächeneinheit des Querschnitts an dieser Stelle bezeichnet wird, so ist nach Fig. 142 und Fig. 143:

$$1)\quad \mathfrak{S}\,.\,dy = \mathfrak{s}\,.\,z\,.\,dy, \quad \text{oder:} \quad \mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{S}}{z},$$

d. h. man findet die Spannung pro Flächeneinheit, indem man die Spannung pro Längeneinheit dividirt durch die Breite des Querschnitts an der betreffenden Stelle.

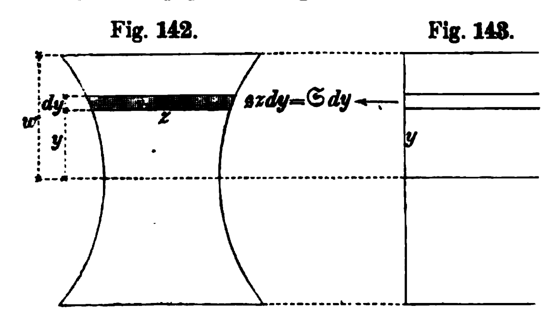


Fig. 142. Fig. 143.

Die analogen Beziehungen finden statt zwischen den Grössen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{A}$ einerseits und den Grössen $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{a}$ andrerseits, wenn überall mit den entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben die betreffenden Spannungen pro Flächeneinheit bezeichnet werden. Es ist also:

$$2)\quad \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{N}}{z}, \quad \mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{H}}{z}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{V}}{z}, \quad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{A}}{z}.$$

Man kann daher die in den vorigen Paragraphen für die Maximalspannungen pro Längeneinheit gefundenen Resultate auch benutzen zur Berechnung der Maximalspannungen pro Flächeneinheit. So z. B. erhält man aus Gleichung 9) des § 28, indem man dieselbe auf beiden Seiten durch die Querschnittsbreite z dividirt, für die grösste Normalspannung pro Flächeneinheit den Ausdruck:

$$3)\quad \mathfrak{n}_m = \frac{1}{2}\,\mathfrak{s} \pm \sqrt{\mathfrak{v}^2 + \left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{s}\right)^2}.$$

Wie im vorigen Paragraphen bereits erklärt wurde, entspricht, wenn $\mathfrak{s}$ positiv ist: das Pluszeichen, dagegen, wenn $\mathfrak{s}$ negativ

ist: das Minuszeichen dem grössten absoluten Werthe von $\mathfrak{n}$. Wenn man also dem Buchstaben $\mathfrak{s}$ die Bedeutung des absoluten Werthes der Biegungsspannung beilegt, so wird der grösste absolute Werth von $\mathfrak{n}$ unter allen Umständen zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$4)\quad \mathfrak{n}_{(max)} = \frac{1}{2}\mathfrak{s} + \sqrt{\mathfrak{v}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}\right)^2}.$$

Für den Fall des rechteckigen Querschnitts würde (nach § 25, Gleichung 4) die Grösse $\mathfrak{v}$ zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$5)\quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0\left(1 - \frac{y^2}{w^2}\right),$$

in welcher für die Grösse $\mathfrak{v}_0$, als grösste verticale oder horizontale Abscheerungsspannung pro Flächeneinheit, der aus § 25, Gleichung 3) zu entnehmende Werth:

$$6)\quad \mathfrak{v}_0 = \frac{V}{\frac{2}{3}bh}$$

zu substituiren ist. Die grösste Biegungsspannung des Querschnitts hat in diesem Falle (nach § 2, Gleichung 16) den Werth:

$$7)\quad S = \frac{6\mathfrak{M}}{bh^2},$$

und die Biegungsspannung in der Höhe y über der Neutralen hat die Grösse:

$$8)\quad \mathfrak{s} = S \cdot \frac{y}{w}.$$

Die allgemeine Gleichung für die grösste Normalspannung pro Flächeneinheit nimmt also für den rechteckigen Querschnitt die Form an:

$$9)\quad \mathfrak{n}_{(max)} = \frac{1}{2}S\frac{y}{w} + \sqrt{\mathfrak{v}_0^2\left(1 - \frac{y^2}{w^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}S\frac{y}{w}\right)^2}.$$

Wenn man hierin abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{\mathfrak{v}_0}{S} = \frac{1}{n}$ und das Verhältniss $\frac{y}{w} = \varphi$ setzt, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$10)\quad \frac{\mathfrak{n}_{(max)}}{S} = \frac{1}{2}\varphi + \sqrt{\left(\frac{1-\varphi^2}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2}.$$

Diese Gleichung kann man nunmehr benutzen, um die grösste in dem Verticalschnitte überhaupt vorkommende Normalspannung aufzusuchen und dieselbe zu vergleichen mit der grössten Biegungsspannung des Verticalschnitts. Für den Fall, in welchem $n = 1$

ist, erhält man aus dieser Gleichung die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\varphi =$ 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,
$\frac{\mathfrak{n}_{(max)}}{S} =$ 1	1,041	1,065	1,072	1,063	1,041	1,007	0,968	0,939	0,938	1.

Diese Tabelle zeigt, dass für $n = 1$ die grösste Normalspannung nahezu in allen Punkten des Verticalschnitts gleiche Werthe hat, und dass dieselbe in allen diesen Punkten nur wenig abweicht von der grössten Biegungsspannung. Der grösste Werth von $\mathfrak{n}_{(max)}$ entspricht einem Werthe von φ, welcher zwischen 0,2 und 0,3 liegt, nämlich dem Werthe $\varphi = 0{,}294$, für welchen $\mathfrak{n}_{(max)} = 1{,}073 \,.\, S = 1{,}073 \,.\, \mathfrak{v}_0$ wird.

Der bei obiger Tabelle angenommene Werth $n = 1$ entspricht dem Falle, in welchem $\mathfrak{v}_0 = S$ ist. Nach Substitution der aus den Gleichungen 6) und 7) zu entnehmenden Ausdrücke erhält man für diesen Fall die Bedingungsgleichung:

$$11) \quad \frac{V}{\frac{2}{3} b h} = \frac{6 \mathfrak{M}}{b h^2}.$$

Wenn man hierin die Werthe $V = K$ und $\mathfrak{M} = Kl$ substituirt — entsprechend dem in Fig. 144 und Fig. 145 dargestellten Falle — so erhält man die Gleichung:

Fig. 144. Fig. 145.

$$12) \quad \frac{K}{\frac{2}{3} b h} = \frac{6 K l}{b h^2}, \text{ oder: } l = \frac{1}{4} h.$$

Es muss also die Länge des Balkens ein Viertel der Höhe betragen, wenn $\mathfrak{v}_0 = S$ sein soll. In diesem Falle ist die grösste Normalspannung an den drei Stellen A, B, C gleich gross und zwar von derselben Grösse wie die grösste Biegungsspannung oder die ihr gleiche grösste Abscheerungsspannung. Die grösste in dem Balken überhaupt vorkommende Normalspannung findet an den beiden Stellen D und E statt und ist um etwa 7 Procent grösser als S oder $\mathfrak{v}_0$. Dieselbe ist bei D eine Zug-Spannung und bei E eine Druck-Spannung von der Grösse:

$$13) \quad \mathfrak{n}_{(max)} = 1{,}073 \,.\, S = 1{,}073 \,.\, \mathfrak{v}_0.$$

Die Lage der Flächen, in welchen an den verschiedenen Stellen des Verticalschnitts die Normalspannung ihren grössten Werth erreicht, kann mit Hülfe der Gleichung 5) des § 28 bestimmt werden, welche auf der rechten Seite im Zähler und Nenner durch die Querschnittsbreite dividirt die Form annimmt:

$$14)\quad \operatorname{tg} 2\alpha_n = -\frac{\mathfrak{v}}{\frac{1}{2}\mathfrak{s}} = -\frac{2\mathfrak{v}_0(1-\varphi^2)}{S\varphi} = -\frac{2(1-\varphi^2)}{n\varphi}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich für den Fall $n = 1$ oder für den Verticalschnitt BC in Fig. 145 die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\varphi =$	$+1$	$+\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$\operatorname{tg} 2\alpha_n =$	0	$-0{,}75$	$-\infty$	$+0{,}75$	0
α_n (Zugsp.) $=$	90°	$71^\circ 34'$	45°	$18^\circ 26'$	0°
α_n (Drucksp.) $=$	180°	$161^\circ 34'$	135°	$108^\circ 26'$	90°

Oberhalb der Neutralen ist es die Zugspannung, unterhalb derselben ist es die Druckspannung, welche den grössten absoluten Werth der Normalspannung repräsentirt.

Wenn man für andere Werthe von n die obige Rechnung wiederholt, so findet man, dass der grösste Werth von $\mathfrak{n}_{(max)}$ immer entweder genau oder wenigstens nahezu übereinstimmt mit dem grössten der beiden Werthe S und $\mathfrak{v}_0$. Für den Fall $n = 1$ beträgt der mit dieser Annahme verbundene Fehler — wie obige Tabelle zeigt — nur etwa 7 Procent. Noch kleiner wird derselbe für andere Werthe von n. Man darf daher bei practischen Anwendungen ohne Bedenken in allen Fällen, wo l grösser ist als $\frac{1}{4}h$, die grösste Biegungsspannung:

$$15)\quad S = \frac{6Kl}{bh^2},$$

und in allen Fällen, wo l kleiner ist als $\frac{1}{4}h$, die grösste (verticale oder horizontale) Abscheerungsspannung:

$$16)\quad \mathfrak{v}_0 = \frac{K}{\frac{2}{3}bh}$$

als grösste in dem Balken überhaupt vorkommende Normalspannung pro Flächeneinheit betrachten.

§ 31.

Berechnung der erforderlichen Querschnittsdimensionen für Blechträger.

Wenn man in Gleichung 4) des vorigen Paragraphen $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} = \mu$ setzt, so erhält man für die grösste Normalspannung pro Flächeneinheit den Werth:

$$1)\quad \mathfrak{n}_{(max)} = \mu \left\{ \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right\} = 1{,}618 \,.\, \mu.$$

Für den in Figur 146 dargestellten Blechträgerquerschnitt darf bei geringer Stärke der Blechwand und geringer Höhe des Flanschenquerschnitts (nach § 25, Gleichung 6) annäherungsweise $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 = \frac{V}{h}$ gesetzt werden, oder:

$$2)\quad \mathfrak{v} = \frac{V}{bh}.$$

An der oberen oder unteren Grenze des Verticalschnitts der Blechwand, also da, wo dieselbe an die Flanschen grenzt, ist die Biegungsspannung nahezu gleich der grössten in den Flanschenquerschnitten selbst stattfindenden Biegungsspannung, und (nach § 25, Gleichung 7) ist dieselbe annäherungsweise zu berechnen aus der Gleichung:

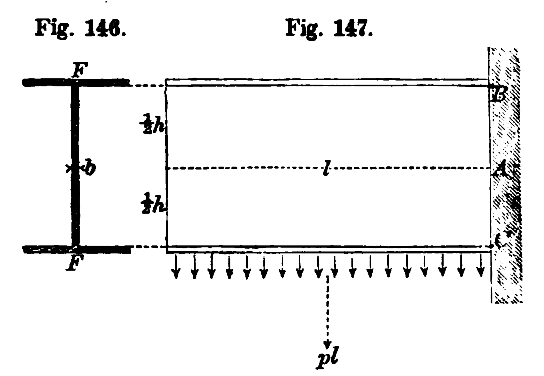


Fig. 146. Fig. 147.

$$3)\quad \mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{M}}{Fh}.$$

Bei dem in Fig. 147 dargestellten Biegungszustande des Balkens erreichen sowohl die Verticalkraft V als auch das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ in dem Verticalschnitte BAC ihr Maximum. Es ist nämlich für diesen Querschnitt:

$$4)\quad V = pl \qquad \text{und} \qquad 5)\quad \mathfrak{M} = \frac{pl^2}{2}.$$

Die grösste in dem Balken vorkommende Normalspannung ist daher in diesem Verticalschnitte zu suchen, und zwar findet dieselbe an den beiden Stellen B und C statt, wo die Blechwand an die Flanschen grenzt, insofern an diesen Stellen die grössten Werthe von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{s}$ zusammentreffen. Wenn also die Querschnittsdimensionen des Balkens so gewählt worden wären, dass an diesen Stellen die Grössen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{v}$ eine jede für sich allein schon die Grösse S der practisch zulässigen Spannung erreichten, so würde der Balken zu schwach sein, da in diesem Falle die grösste Normalspannung (nach Gleichung 1) das 1,618-fache der practisch zulässigen Spannung betragen würde. Es müssten vielmehr die

Querschnittsdimensionen so gewählt werden, dass jede der beiden Grössen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{v}$ nur den Werth:

$$6)\quad \mu = \frac{S}{1,618} = 0,618 \,.\, S$$

an jenen Stellen erreicht, wenn die Grösse $\mathfrak{n}_{(max)}$ daselbst gerade gleich S werden soll.

Bei vorgeschriebener Höhe des Balkens genügt die Berechnung der beiden Grössen b und F zur Bestimmung des erforderlichen Querschnitts. Diese beiden Grössen kann man nunmehr aus den Gleichungen 2) und 3) berechnen, indem man darin $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} = \mu$ setzt. Es ergeben sich daraus die Werthe:

$$7)\quad b = \frac{V}{\mu h}, \qquad 8)\quad F = \frac{\mathfrak{M}}{\mu h}.$$

Hierin sind für die Grössen V und $\mathfrak{M}$ die in den Gleichungen 4) und 5) angegebenen Maximalwerthe und für die Grösse μ der in Gleichung 6) angegebene Werth zu substituiren.

Für einen schmiedeisernen Balken würde $S = 6$ Kil., also $\mu = 0,618 \,.\, 6 = 3^{Kil.},708$ zu setzen sein. Wenn ferner die Werthe $l = 2000^{mm}$, $h = 500^{mm}$, $p = 10$ Kil. gegeben sind, so ist: $V = 10 \,.\, 2000 = 20\,000$ und $\mathfrak{M} = \frac{10 \,.\, 2000^2}{2} = 20\,000\,000$ zu setzen. Man erhält also aus den Gleichungen 7) und 8) die Werthe:

$$b = \frac{20\,000}{3,708 \,.\, 500} = 10^{mm},8,$$

$$F = \frac{20\,000\,000}{3,708 \,.\, 500} = 10\,800^{\square mm}.$$

Für den ganzen Inhalt der erforderlichen Querschnittsfläche ergiebt sich hiernach der Werth:

$$J = 2F + bh = 2 \,.\, 10800 + 10,8 \,.\, 500 = 27\,000^{\square mm}.$$

Die Gleichungen 7) und 8) können auch noch für andere Fälle zur Berechnung des erforderlichen Querschnitts eines Blechbalkens benutzt werden — für alle diejenigen Fälle nämlich, in denen der Balken auf solche Weise unterstützt und belastet ist, dass das Maximum des Biegungsmoments $\mathfrak{M}$ und das Maximum der verticalen Abscheerungskraft V in einem und demselben Balkenquerschnitte zusammentreffen.

Nach § 10 (Gleichung 3) hat bei dem in Fig. 53 dargestellten Balken auf drei Stützen das Biegungsmoment über der Mittelstütze die Grösse:

$$9)\quad \mathfrak{M} = \frac{pl^2}{8},$$

und für die verticale Abscheerungskraft an dieser Stelle ergiebt sich nach § 10 (Gleichung 1) der Werth:

$$10)\quad V = pl - K = \frac{5}{8} pl.$$

Bei dem in Fig. 53 dargestellten Falle ist der über der Mittelstütze befindliche Balkenquerschnitt derjenige, in welchem das Maximum von $\mathfrak{M}$ mit dem Maximum von V zusammentrifft. Wenn also ein solcher Balken auf drei Stützen als prismatischer Blechträger construirt werden soll, so hat man für die Grössen $\mathfrak{M}$ und V die in den Gleichungen 9) und 10) angegebenen Werthe zu substituiren und kann im Uebrigen die Berechnung der erforderlichen Querschnittsdimensionen auf dieselbe Weise wie bei dem in Fig. 147 dargestellten Falle ausführen.

Wenn z. B. die Werthe $p = 10$ Kil. und $l = 100\,000^{mm}$ gegeben sind, so wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{10 \,.\, 100\,000^2}{8} = 12\,500\,000\,000 \quad \text{und} \quad V = \frac{5}{8} \cdot 10 \,.\, 100\,000 = 625\,000.$$

Wenn ferner $h = 10\,000^{mm}$ gegeben ist, und wie bei dem vorigen Zahlenbeispiele wiederum die für Schmiedeisen geltenden Zahlenwerthe $S = 6$ Kil., $\mu = 3^{Kil.},708$ gesetzt werden, so erhält man aus den Gleichungen 7) und 8) resp. die Werthe:

$$b = \frac{625\,000}{3{,}708 \,.\, 10\,000} = 16^{mm},86 \quad \text{und}$$

$$F = \frac{12\,500\,000\,000}{3{,}708 \,.\, 10\,000} = 337\,110^{\square mm}.$$

Für den ganzen Flächeninhalt des erforderlichen Querschnitts ergiebt sich hiernach der Werth:

$$J = 2 \,.\, 337\,110 + 16{,}86 \,.\, 10\,000 = 842\,820^{\square mm}.$$

§ 32.

Minimum der erforderlichen Querschnittsfläche.

Die im vorigen Paragraphen erklärte Berechnungsweise war auf die Voraussetzung gegründet, dass an der Stelle, wo die grösste Normalspannung stattfindet, die beiden Spannungen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{v}$ gleiche Grösse haben sollten. Diese Voraussetzung war eine willkürliche; der vorgeschriebenen Bedingung: dass an jener Stelle $\mathfrak{n}_{(max)} = S$ werden soll, kann auch noch auf andere Weise Genüge geleistet werden.

Nach Gleichung 4) des § 30 würde die eben genannte Bedingung auszudrücken sein durch die Gleichung:

$$1)\quad S = \frac{1}{2}\mathfrak{s} + \sqrt{\mathfrak{v}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}\right)^2}.$$

Wenn man diese Gleichung quadrirt (nachdem zuvor das Glied $\frac{1}{2}\mathfrak{s}$ auf die linke Seite gebracht worden), so erhält man die Gleichung:

$$2)\quad S^2 - S\,.\,\mathfrak{s} = \mathfrak{v}^2,$$

welche nach Substitution der aus den Gleichungen 2) und 3) des vorigen Paragraphen für die Grössen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{s}$ zu entnehmenden Werthe die folgende Form annimmt:

$$3)\quad S^2 - \frac{S\mathfrak{M}}{Fh} = \frac{V^2}{b^2h^2}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man für die Grösse F den Werth:

$$4)\quad F = \frac{S\mathfrak{M}hb^2}{S^2h^2b^2 - V^2}.$$

Aus dieser Gleichung würde man die Grösse F berechnen können, wenn die Grösse b schon bekannt wäre. Die zur Bestimmung der Grösse b noch erforderliche zweite Gleichung kann man sich dadurch verschaffen, dass man noch die Bedingung hinzufügt: es soll die Grösse:

$$5)\quad J = 2F + bh,$$

als Flächeninhalt des ganzen Querschnitts, zugleich ein Minimum werden.

Um diese letztere Bedingung durch eine Gleichung auszudrücken, hat man zunächst den oben für F gefundenen Werth in Gleichung 5) zu substituiren, welche dann die Form annimmt:

$$6)\quad J = \frac{2S\mathfrak{M}hb^2}{S^2h^2b^2 - V^2} + bh$$

und hierauf den Differentialquotienten $\frac{dJ}{db}$ gleich Null zu setzen. Man erhält dann die Gleichung:

$$7)\quad \frac{4S\mathfrak{M}hb(S^2h^2b^2 - V^2) - 4S^3\mathfrak{M}h^3b^3}{(S^2h^2b^2 - V^2)^2} + h = 0,$$

welche, als Gleichung vierten Grades nach Potenzen von b geordnet, auch auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$8)\quad b^4 - \frac{2V^2}{S^2h^2}\cdot b^2 - \frac{4\mathfrak{M}V^2}{S^3h^4}\cdot b + \frac{V^4}{S^4h^4} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist zunächst die Grösse b zu bestimmen. Nach Substitution des gefundenen Werthes kann alsdann die andere unbekannte Grösse F aus Gleichung 4) berechnet werden.

Bei dem ersten Zahlenbeispiele des vorigen Paragraphen war $S = 6$ Kil., $h = 500^{mm}$, $V = 20\,000$, $\mathfrak{M} = 20\,000\,000$. Nach Substitution dieser Zahlenwerthe nimmt die Gleichung 8) folgende Form an:

$$b^4 - 89\,.\,b^2 - 2370\,.\,b + 1975 = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man für die Stärke der Blechwand den Werth: $b = 15^{mm},4$. Wenn man diesen Werth in Gleichung 4) substituirt, so erhält man für den erforderlichen Flanschenquerschnitt den Werth: $F = 8204^{\square mm}$. Der Flächeninhalt des ganzen Querschnitts würde hiernach die Grösse erhalten:

$$J = 2 \,.\, 8204 + 15{,}4 \,.\, 500 = 24\,108^{\square mm},$$

also $2892^{\square mm}$ weniger betragen als der im vorigen Paragraphen gefundene Werth.

Bei dem zweiten Zahlenbeispiele des vorigen Paragraphen war $S = 6$ Kil., $h = 10\,000^{mm}$, $V = 625\,000$, $\mathfrak{M} = 12\,500\,000\,000$. Nach Substitution dieser Zahlenwerthe nimmt die Gleichung 8) die folgende Form an:

$$b^4 - 217 \,.\, b^2 - 9042 \,.\, b + 11\,774 = 0.$$

Durch Auflösung derselben erhält man für die erforderliche Stärke der Blechwand den Werth $b = 24^{mm}$, und nach Substitution desselben erhält man aus Gleichung 4) für den erforderlichen Flanschenquerschnitt den Werth: $F = 256\,690^{\square mm}$. Der Flächeninhalt des ganzen Querschnitts würde hiernach die Grösse erhalten:

$$J = 2 \,.\, 256\,690 + 24 \,.\, 10\,000 = 753\,380^{\square mm},$$

also $89\,440^{\square mm}$ weniger betragen als der im vorigen Paragraphen gefundene Werth.

§ 33.

Grösste Normalspannung im Blechbalken auf zwei Stützen.

In den vorigen beiden Paragraphen wurde gezeigt, wie der erforderliche Querschnitt eines Blechbalkens für den allerungünstigsten Fall zu berechnen ist — für denjenigen Fall nämlich, in welchem das Maximum des Biegungsmoments $\mathfrak{M}$ und das Maximum der verticalen Abscheerungskraft V in einem und demselben Balkenquerschnitte zusammentreffen. In diesem Falle erreichen die Spannungen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{v}$ in einem und demselben Punkte der Blechwand ihre Maximalwerthe;. es musste daher jeder einzelne derselben kleiner sein als die practisch zulässige Spannung S, wenn die grösste Normalspannung selbst gleich S werden sollte.

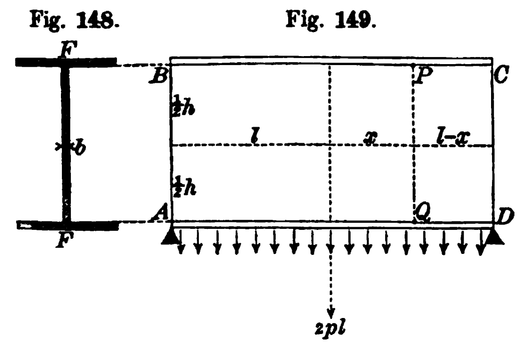


Fig. 148. Fig. 149.

Einen Gegensatz zu jenem ungünstigsten Falle bildet der in Fig. 148 und Fig. 149 dargestellte Fall eines an beiden Enden unterstützten Blechbalkens mit gleichförmig über

seine Länge vertheilter Belastung. Hier erreicht das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ seinen grössten Werth:

$$1)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{pl^2}{2}$$

in der Mitte des Balkens, und an dieser Stelle ist zugleich die verticale Abscheerungskraft V gleich Null. Die Grösse V dagegen erreicht ihren grössten Werth:

$$2)\quad V_1 = pl$$

an den beiden Enden des Balkens, und an diesen Stellen ist zugleich das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ gleich Null. Es trifft daher der Maximalwerth der Biegungsspannung $\mathfrak{s}$, nämlich der Werth:

$$3)\quad \mathfrak{s}_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{Fh}$$

mit dem Werthe $\mathfrak{v} = 0$ zusammen, und der Maximalwerth von $\mathfrak{v}$, nämlich der Werth:

$$4)\quad \mathfrak{v}_1 = \frac{V_1}{bh}$$

trifft mit dem Werthe $\mathfrak{s} = 0$ zusammen. In diesem Falle darf daher jede der beiden Grössen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{v}_1$ unmittelbar gleich der practisch zulässigen Spannung S gesetzt werden. Für die Grössen F und b ergeben sich hiernach aus den obigen Gleichungen die Werthe:

$$5)\quad F = \frac{\mathfrak{M}_1}{Sh} = \frac{pl^2}{2Sh},$$

$$6)\quad b = \frac{V_1}{Sh} = \frac{pl}{Sh}.$$

Um zu beweisen, dass bei Annahme solcher Querschnittsdimensionen die grösste Normalspannung an keiner Stelle des Balkens grösser wird als die practisch zulässige Spannung S, hat man die allgemeine Gleichung abzuleiten für die grösste in irgend einem beliebigen Verticalschnitte stattfindende Normalspannung. In dem Abstande x von der Mitte haben die Grössen $\mathfrak{M}$ und V resp. die Werthe:

$$7)\quad \mathfrak{M} = p\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right), \qquad 8)\quad V = px.$$

Die grössten Biegungsspannungen in den verschiedenen Querschnitten verhalten sich wie die Werthe des Biegungsmoments $\mathfrak{M}$, und die grössten verticalen Abscheerungsspannungen verhalten sich wie die Werthe der ganzen Verticalkraft V. Wenn also mit $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{v}$ die Werthe bezeichnet werden, welche resp. die grösste

Biegungsspannung und die grösste verticale Abscheerungsspannung im Abstande x von der Mitte annehmen, so ist:

$$9)\quad \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}_1} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1} = \frac{\frac{1}{2}p(l^2 - x^2)}{\frac{1}{2}pl^2} = 1 - \frac{x^2}{l^2},$$

$$10)\quad \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_1} = \frac{V}{V_1} = \frac{px}{pl} = \frac{x}{l}.$$

Da $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{v}_1 = S$ angenommen wurde, so ergeben sich für die Grössen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{v}$ resp. die Werthe:

$$11)\quad \mathfrak{s} = S\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right), \qquad 12)\quad \mathfrak{v} = S\frac{x}{l}.$$

Die grösste in dem betreffenden Verticalschnitt vorkommende Normalspannung findet an den Stellen P und Q statt, wo die Blechwand an die Flanschen grenzt, und nach Gleichung 4) des § 30 hat dieselbe die Grösse:

$$13)\quad \mathfrak{n}_{(max)} = \frac{1}{2}\mathfrak{s} + \sqrt{\mathfrak{v}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}\right)^2}.$$

Wenn man hierin die obigen Werthe für $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{v}$ substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$14)\quad \mathfrak{n}_{(max)} = \frac{1}{2}S\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + \sqrt{\left(S\frac{x}{l}\right)^2 + \left[\frac{1}{2}S\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\right]^2}, \text{ oder:}$$

$$15)\quad \mathfrak{n}_{(max)} = \frac{1}{2}S\left\{1 - \frac{x^2}{l^2} + \sqrt{4\frac{x^2}{l^2} + \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist das Quadrat von $1 + \frac{x^2}{l^2}$. Es ist also:

$$16)\quad \mathfrak{n}_{(max)} = \frac{1}{2}S\left\{1 - \frac{x^2}{l^2} + 1 + \frac{x^2}{l^2}\right\} = S.$$

Hieraus folgt, dass die Grösse $\mathfrak{n}_{(max)}$ unabhängig ist von x, und dass längs des ganzen Umfangs $ABCD$ der rechteckigen Blechwand die grösste Normalspannung überall den constanten Werth S hat. Gleichzeitig ergiebt sich hieraus, dass man an keiner Stelle des Balkens die Querschnittsdimensionen vermindern kann, ohne dass die practisch zulässige Spannung überschritten wird. Obwohl die Biegungsspannung in den Flanschen von der Mitte nach den Enden hin allmählich bis auf Null abnimmt, so muss trotzdem der Querschnitt derselben an allen Stellen dieselbe Grösse haben wie in der Mitte, weil sonst — zwar nicht in den Flanschen selbst, wohl aber — in der Blechwand an den Stellen,

wo dieselbe mit den Flanschen verbunden ist, die grösste Normalspannung grösser werden würde als die practisch zulässige Spannung. Der in Fig. 149 dargestellte prismatische Blechbalken ist daher in gewissem Sinne als „Balken von gleichem Widerstande" zu betrachten, insofern die grösste Normalspannung in allen Querschnitten dieselbe Grösse hat.

Wenn z. B. ein schmiedeiserner Blechbalken von 4 Metern Länge und 0,5 Metern Höhe eine gleichförmig über seine Länge vertheilte Belastung von 48 000 Kil. zu tragen hat, so würde man zur Bestimmung der erforderlichen Querschnittsdimensionen in den Gleichungen 5) und 6) die Werthe: $S = 6$ Kil., $l = 2000^{mm}$, $h = 500^{mm}$, $p = 12$ Kil. zu substituiren haben. Man erhält dann die Werthe:

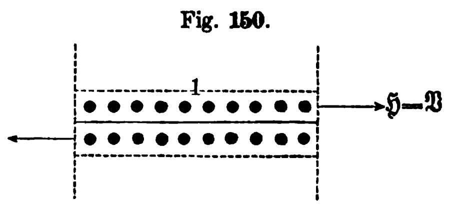
$$F = \frac{12 \cdot 2000^2}{2 \cdot 6 \cdot 500} = 8000^{\square mm} \quad \text{und} \quad b = \frac{12 \cdot 2000}{6 \cdot 500} = 8^{mm}.$$

§ 34.

Berechnung der erforderlichen Anzahl von Nietbolzen in den Nietfugen.

In den horizontalen Nietfugen sind es lediglich die horizontalen Abscheerungskräfte, welche die Abscheerungswiderstände der Nietbolzen in Anspruch nehmen, da nach der in § 26 gemachten Voraussetzung die Normalkräfte in den Horizontalfugen gleich Null sind (Fig. 150). Wenn also mit n die pro Längeneinheit der Nietfuge erforderliche Anzahl von Nietbolzen bezeichnet wird, mit d der Durchmesser des Nietbolzens und mit S die practisch zulässige Abscheerungsspannung pro Flächeneinheit des Nietquerschnitts, so ist die Zahl n zu berechnen aus der Gleichung:

Fig. 150.



$$1) \quad n \cdot S \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \mathfrak{V}.$$

Es ist hierbei einseitige Vernietung vorausgesetzt, d. h. eine solche Vernietungsweise, bei welcher an jedem Nietbolzen nur in einem Querschnitte der Widerstand gegen Abscheerung in Anspruch genommen wird. (Wenn statt dessen die Vernietung so beschaffen ist, dass bei jedem Nietbolzen gleichzeitig in zwei Querschnitten der Widerstand gegen Abscheerung in Anspruch genommen wird, so braucht die Zahl der Nietbolzen nur halb so gross zu sein.)

Für schmiedeiserne Nietbolzen würde $S = 4$ Kil. zu setzen sein. Bei dem in § 32 als zweites Zahlenbeispiel gewählten Falle des Blechbalkens auf drei Stützen war $h = 10\,000^{mm}$ angenommen, und für die verticale Abscheerungskraft unmittelbar neben der Mittelstütze der Werth $V = 625\,000$ Kil. gefunden. Nach § 25 (Gleichung 6) ist also:

$$\mathfrak{V} = \frac{V}{h} = \frac{625\,000}{10\,000} = 62{,}5 \text{ Kil.}$$

Wenn also der Durchmesser jedes Nietbolzens 20 Millimeter beträgt, so ist die Zahl n zu berechnen aus der Gleichung:

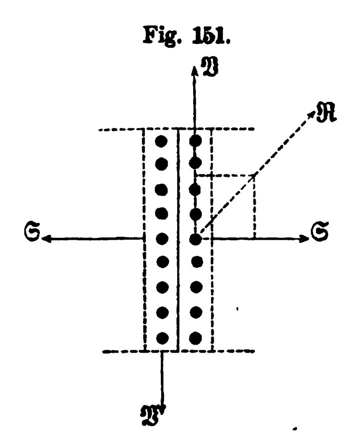
$$n \,.\, 4 \cdot \frac{20^2 \,.\, 3{,}14}{4} = 62{,}5, \quad \text{oder:} \quad n = 0{,}0497.$$

Es müssen also in der Nähe der Mittelstütze die Nietbolzen der horizontalen Nietfugen so nahe bei einander gesetzt werden, dass circa 50 Nietbolzen auf die Länge eines Meters kommen.

Bei den verticalen Nietfugen ist es — wie Fig. 151 zeigt — die Mittelkraft von den beiden Kräften $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{S}$, also die Kraft:

$$2) \quad \mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{V}^2 + \mathfrak{S}^2} = \mathfrak{V}\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{S}^2}{\mathfrak{V}^2}},$$

Fig. 151.



welche die Abscheerungswiderstände der Nietbolzen in Anspruch nimmt. Wenn also mit ν die pro Längeneinheit der verticalen Nietfuge erforderliche Anzahl von Nietbolzen bezeichnet wird, so ist:

$$3) \quad \nu \,.\, S \cdot \frac{d^2\pi}{4} = \mathfrak{R} = \mathfrak{V}\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{S}^2}{\mathfrak{V}^2}}$$

zu setzen, und nach Gleichung 1) hat das Verhältniss der beiden Nietzahlen die Grösse:

$$4) \quad \frac{\nu}{n} = \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{S}^2}{\mathfrak{V}^2}}.$$

Da nach § 30 statt $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{V}}$ auch $\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{v}}$ gesetzt werden darf, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$5) \quad \frac{\nu}{n} = \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{v}^2}}.$$

Hierin bedeutet n die pro Längeneinheit erforderliche Anzahl der Nietbolzen für eine an derselben Stelle der Blechwand befindliche horizontale Nietfuge.

Bei dem in § 32 als zweites Zahlenbeispiel berechneten Blechbalken auf drei Stützen war $h = 10\,000^{mm}$, $b = 24^{mm}$, $F = 256\,690^{\square mm}$, und in dem Verticalschnitte unmittelbar neben der Mittelstütze war $V = 625\,000$,

$\mathfrak{M} = 12\,500\,000\,000$. Nach den Gleichungen 2) und 3) des § 31 haben die Spannungen der Blechwand in diesem Verticalschnitte an der Stelle, wo die Blechwand an die Flanschen grenzt, die Werthe:

$$\mathfrak{v} = \frac{625\,000}{24\,.\,10\,000} = 2{,}608,$$

$$\mathfrak{s} = \frac{12\,500\,000\,000}{256\,690\,.\,10\,000} = 4{,}87,$$

und wenn man dieselben in Gleichung 5) substituirt, so erhält man für das Verhältniss der beiden Nietzahlen den Werth:

$$\frac{\nu}{n} = \sqrt{1 + \frac{4{,}87^2}{2{,}608^2}} = 2{,}118.$$

Für dieselbe Stelle war im vorigen Zahlenbeispiele $n = 0{,}0497$ gefunden; folglich ist $\nu = 2{,}118\,.\,0{,}0497 = 0{,}105$.

Da in der neutralen Faserschicht $\mathfrak{s} = 0$ ist, so wird für die Mitte der verticalen Nietfuge $\nu = n$. Es muss also die Zahl der Nietbolzen pro Längeneinheit der verticalen Nietfuge von der Mitte nach oben und unten hin allmählich zunehmen, und zwar von 50 Nietbolzen pro Meter bis auf 105 Nietbolzen pro Meter.

§ 35.

Berechnung der Verticalständer.

In § 26 und § 28 wurde bei Ableitung der allgemeinen Gleichungen für die Abscheerungsspannungen und Normalspannungen die Voraussetzung gemacht: dass in den Horizontalfugen die Normalspannungen gleich Null sind. Die in den vorstehenden Paragraphen gefundenen Resultate sind daher nur dann als gültig zu betrachten, wenn die in Fig. 135 mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnete Kraft überall gleich Null ist. Um die Bedingung zu finden, von welcher die Zulässigkeit jener Voraussetzung abhängt, hat man zunächst die allgemeine Gleichung für $\mathfrak{Z}$ abzuleiten und nachher in dieser Gleichung $\mathfrak{Z} = 0$ zu setzen.

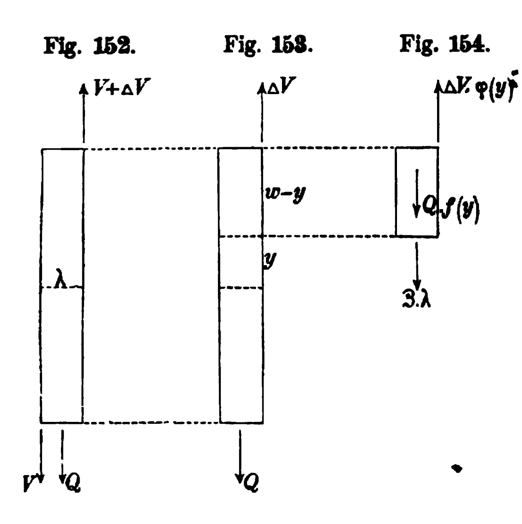
Wenn man sich aus dem Balken durch zwei nahe bei einander befindliche Verticalschnitte einen Theil von der Länge λ herausgeschnitten denkt und die algebraische Summe der auf dieses Balkenstück wirkenden Verticalkräfte gleich Null setzt, so erhält man nach Fig. 152 und Fig. 153 die Gleichung:

$$1)\quad 0 = Q - \Delta V.$$

Hierin bedeutet Q die ganze Belastung des Balkenstückes. Es ist anzunehmen, dass diese Belastung nach irgend einem Gesetze über die Höhe des Balkenstücks vertheilt ist, und von der Art dieser Vertheilung wird die Grösse desjenigen Belastungstheils abhängen, welcher für den in Fig. 154 dargestellten oberen Theil von der Höhe $w - y$ die Belastung bildet. Dieser Belastungstheil

ist als eine Function von y zu betrachten und kann gleich $Q.f(y)$ gesetzt werden.

Das Gesetz, nach welchem die ganze verticale Abscheerungskraft V über die Höhe des Balkens sich vertheilt, wurde bereits in § 25 aufgefunden und graphisch dargestellt. Nach demselben Gesetze vertheilt sich auch die Kraft $V + \Delta V$ über die Höhe des Verticalschnitts; folglich gilt dasselbe Vertheilungsgesetz auch für den Kraftüberschuss ΔV. Der Bruchtheil von ΔV, welcher auf den in Fig. 154 dargestellten oberen Theil des Balkenstücks wirkt, ist daher ebenfalls eine Function von y und kann gleich $\Delta V . \varphi(y)$ gesetzt werden. Wenn man nunmehr für diesen Theil die algebraische Summe sämmtlicher auf denselben wirkenden Verticalkräfte gleich Null setzt, so erhält man die Gleichung:



$$2) \quad 0 = \mathfrak{Z} . \lambda + Q . f(y) - \Delta V . \varphi(y),$$

welcher man nach Substitution des aus Gleichung 1) für ΔV zu entnehmenden Werthes auch die Form geben kann:

$$3) \quad \mathfrak{Z} . \lambda = Q [\varphi(y) - f(y)].$$

Wenn also $\mathfrak{Z} = 0$ sein soll, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$4) \quad f(y) = \varphi(y),$$

d. h. die Belastung Q muss über die Höhe des Balkens nach demselben Gesetze vertheilt sein, welches in § 25 für die Vertheilung der Verticalkraft V gefunden wurde.

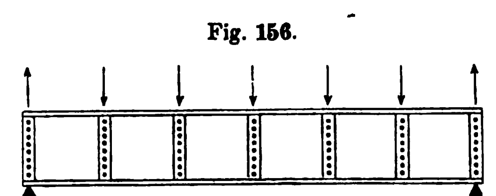
Bei einem Blechbalken darf die Verticalkraft V als gleichförmig über die Höhe des Verticalschnitts der Blechwand vertheilt angenommen werden. Die Gültigkeit der in Bezug auf den Blechbalken gefundenen Resultate ist daher an die Bedingung geknüpft: dass die einzelnen Belastungen desselben — sowie auch die sonstigen auf denselben wirkenden Verticalkräfte, wie z. B.

die vertical aufwärts wirkenden Gegendrücke der Stützpunkte — gleichförmig über die Höhe der Blechwand vertheilte Kräfte bilden.

Fig. 155.

Eine solche Vertheilung der Belastung Q würde man annähernd dadurch herbeiführen können, dass man dieselbe in n gleiche Theile zerlegt und an dem Verticalstreifen der Blechwand in verticaler Reihe ebenso viele gleichweit von einander abstehende Nietbolzen anbringt, an deren jedem ein Blechtäfelchen mit dem Belastungstheile $\frac{Q}{n}$ aufgehängt ist (Fig. 155). Wenn alsdann alle diese Blechtäfelchen zu einem Körper vereinigt werden, so nimmt derselbe die Form eines an die Blechwand genieteten Verticalständers an, welcher mit der Summe jener Belastungstheile, also mit dem ganzen Gewichte Q belastet ist, und es kann nachher jeder beliebige Punkt dieses Verticalständers als Angriffspunkt jener Verticalkraft gewählt werden, ohne dass in dem Gesetze der Vertheilung etwas geändert wird. So z. B. dürfte bei dem in Fig. 156 dargestellten Blechbalken jene Bedingung als erfüllt betrachtet werden, obwohl für die Belastungen die oberen Endpunkte und für die Gegendrücke der Stützpunkte die unteren Endpunkte der betreffenden Verticalständer die unmittelbaren Angriffspunkte bilden.

Fig. 156.



Die Stärke des (prismatisch vorausgesetzten) Verticalständers muss so gewählt werden, dass an der Stelle des Angriffspunktes der betreffenden Verticalkraft die Spannung pro Flächeneinheit des Querschnitts gleich der practisch zulässigen Spannung wird. Die erforderliche Anzahl der Nietbolzen, welche den Verticalständer mit der Blechwand verbinden, findet man wie im vorigen Paragraphen, indem man die Summe der Abscheerungswiderstände aller dieser Nietbolzen gleich der Verticalkraft setzt, welche dieselben in Anspruch nimmt.

Bei dem in § 32 und § 34 als Beispiel gewählten Blechbalken auf drei Stützen betrug der Gegendruck der Mittelstütze 1 250 000 Kil. Da diese Kraft an der Unterkante des Balkens ihren Angriffspunkt hat, so muss über der Mittelstütze ein Verticalständer angebracht werden, und wenn die practisch zulässige Druckspannung gleich 6 Kil. gesetzt wird, so muss die Querschnitts-

fläche dieses Verticalständers $\frac{1\,250\,000}{6} = 208\,300$ Quadratmillimeter enthalten. Die Anzahl der Nietbolzen, welche diesen Verticalständer mit der Blechwand verbinden, ist auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphen zu berechnen aus der Gleichung:

$$n \,.\, S \cdot \frac{d^2\pi}{4} = 1250\,000,$$

und wenn man wieder $S = 4$ Kil., $d = 20^{mm}$ setzt, so erhält man für die erforderliche Nietzahl den Werth:

$$n = \frac{4 \,.\, 1250\,000}{4 \,.\, 20^2 \,.\, 3{,}14} = 995{,}2.$$

§ 36.

Brückenbalken auf drei Stützen. Berechnung der grössten verticalen Abscheerungskräfte mit Berücksichtigung der mobilen Belastung.

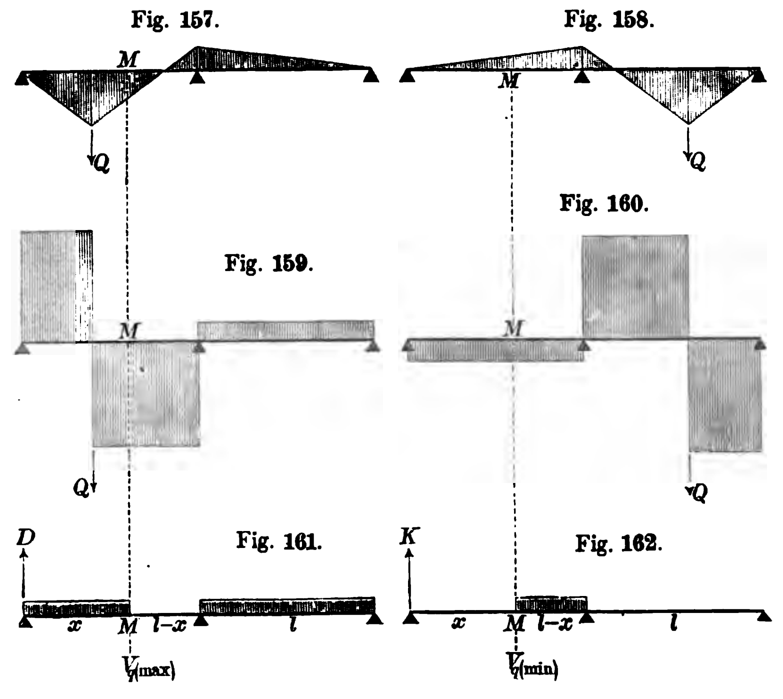
In § 34 wurde bei Berechnung der erforderlichen Nietzahlen eine gegebene constante Belastung vorausgesetzt. Wenn ausser einer solchen permanenten Belastung noch eine (veränderliche) mobile Belastung vorhanden ist, so hat man die Berechnung der für eine bestimmte Nietfugenstrecke erforderlichen Anzahl von Nietbolzen stets unter Voraussetzung des ungünstigsten Belastungszustandes auszuführen, d. h. man hat zuvor denjenigen Belastungszustand aufzusuchen, bei welchem die Abscheerungswiderstände der an jener Stelle befindlichen Nietbolzen am stärksten in Anspruch genommen werden. Bei den horizontalen Nietfugen sind es lediglich die horizontalen Abscheerungskräfte, welche die Abscheerungswiderstände der Nietbolzen in Anspruch nehmen, und da für den Blechbalken (nach § 25):

$$1) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{V} = \frac{V}{h}$$

zu setzen ist, so würde man bei der Berechnung der Nietzahl für die horizontale Nietfuge zuvor denjenigen Belastungszustand aufzusuchen haben, bei welchem die Grösse V an der betreffenden Stelle ihren Maximalwerth annimmt.

Für den Blechbalken auf drei Stützen kann man bei dieser Untersuchung die (schon in Fig. 60 ausgeführte) graphische Darstellung der von einer Einzellast Q hervorgebrachten Biegungsmomente benutzen, insofern man mit Benutzung der Gleichung 1) des § 15 aus jener Figur unmittelbar die graphische Darstellung der von jener Belastung hervorgebrachten verticalen Abscheerungskräfte ableiten kann. Wenn man sich den Angriffspunkt der Kraft Q allmählich von einem Endpunkte des Balkens bis zum anderen

Endpunkte fortrückend und sich zugleich für jede Lage desselben die graphische Darstellung der Biegungsmomente (Fig. 157 und Fig. 158), sowie die aus derselben abzuleitende graphische Dar-



stellung der verticalen Abscheerungskräfte (Fig. 159 und Fig. 160) ausgeführt denkt, so kann man auf solche Weise leicht diejenigen Strecken ermitteln, deren Belastungen positive Beiträge liefern zu der verticalen Abscheerungskraft an einer bestimmten Stelle M, und diejenigen Strecken, deren Belastungen negative Beiträge zu derselben liefern. Man erkennt alsdann, dass es die in Fig. 161 und Fig. 162 dargestellten Belastungszustände sind, bei denen die von der mobilen Belastung an der Stelle M hervorgebrachte verticale Abscheerungskraft V_q resp. ein Maximum und ein Minimum wird. Nach Fig. 162 ist:

$$2)\quad V_{q(\min)} = -K$$

zu setzen, und wenn man hierin für K den aus der Gleichung 22) des § 10 zu berechnenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

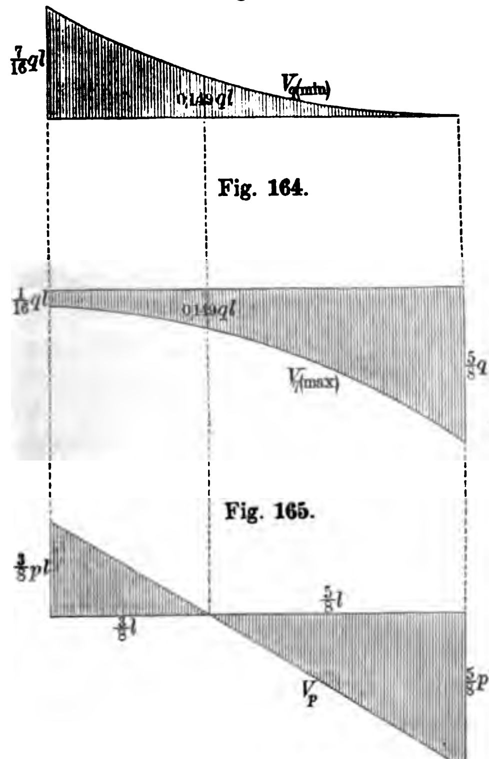
$$3)\quad V_{q(\min)} = -\frac{ql}{16}\left\{7 - 16\frac{x}{l} + 10\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^4}{l^4}\right\}.$$

Für das Maximum der Grösse V_q ergiebt sich aus Fig. 161 zunächst der Ausdruck:

$$4)\quad V_{q(\max)} = qx - D.$$

Der Gegendruck der Endstütze ist wieder nach der in § 10 erklärten Methode zu berechnen und hat die Grösse:

$$5)\quad D = \frac{3}{8}\,ql - K = \frac{3}{8}\,ql - \frac{ql}{16}\left\{7 - 16\,\frac{x}{l} + 10\,\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^4}{l^4}\right\},$$



und wenn man diesen Ausdruck substituirt in der vorigen Gleichung, so erhält man für die Grösse $V_{q(\max)}$ den Werth:

$$6)\quad V_{q(\max)} = \frac{ql}{16}\left\{1 + 10\,\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^4}{l^4}\right\}.$$

Wenn mit p die permanente Belastung pro Längeneinheit und mit V_p der Beitrag bezeichnet wird, welchen zu der ganzen verticalen Abscheerungskraft an der Stelle M die permanente Belastung liefert, so ist (nach § 10):

$$7)\quad V_p = px - \frac{3}{8}\,pl.$$

Aus den Gleichungen 3), 6), 7) ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{x}{l} =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1,
$-\frac{V_{q(\min)}}{ql} =$	0,4375	0,2263	0,1492	0,0898	0,0193	0.
$\frac{V_{q(\max)}}{ql} =$	0,0625	0,1013	0,1492	0,2148	0,3943	0,625,
$\frac{V_p}{pl} =$	—0,375	—0,125	0	+0,125	+0,375	+0,625.

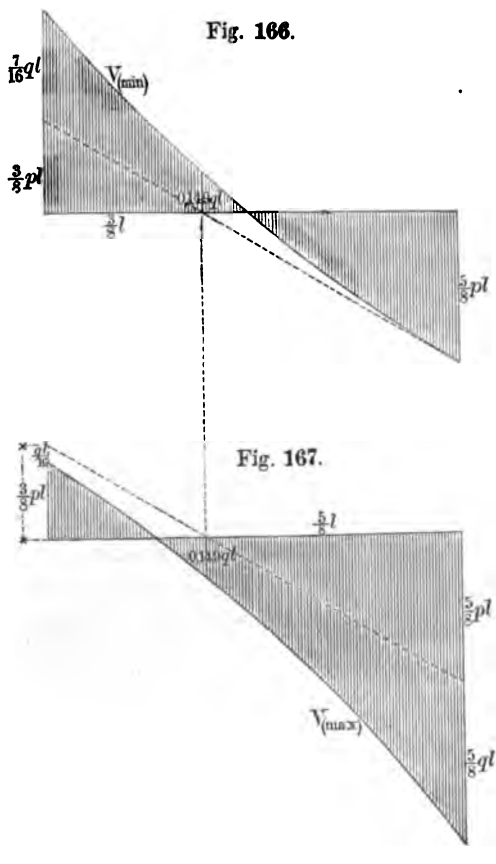


Fig. 166.

Fig. 167.

Die Gesetze, nach welchen die drei Grössen $V_{q(\min)}$, $V_{q(\max)}$, V_p mit x sich ändern, sind resp. in den Figuren **163**, **164**, **165** für die eine Hälfte des Balkens graphisch dargestellt. Die ganze verticale Abscheerungskraft V setzt sich aus den zwei Beiträgen V_q und V_p zusammen. Es ist also:

8) $V_{(\min)} = V_{q(\min)} + V_p$,

9) $V_{(\max)} = V_{q(\max)} + V_p$.

Die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem $V_{(\min)}$ mit x sich ändert (Fig. **166**), kann man aus den beiden Figuren **163** und **165** in der Weise ableiten, dass man an jedem Punkte der Horizontalen eine Ordinate errichtet, welche gleich der algebraischen Summe der aus jenen beiden Figuren für diese Stelle zu entnehmenden Ordinaten ist.

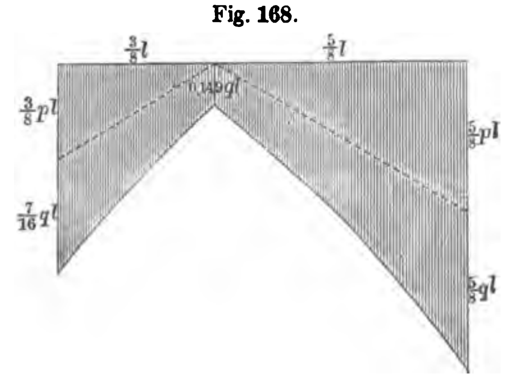


Fig. 168.

Auf gleiche Weise ist die graphische Darstellung der Grösse $V_{(\max)}$ aus den beiden Figuren **164** und **165** abzuleiten (Fig. **167**). Wenn man endlich noch das Gesetz, nach welchem das Maximum des absoluten Werthes von V

mit x sich ändert, graphisch darstellen will (Fig. 168), so hat man an jedem Punkte der Horizontalen eine Ordinate zu errichten, welche so gross ist wie die grössere von den beiden aus Fig. 166 und Fig. 167 für diese Stelle zu entnehmenden Ordinaten.

§ 37.

Berechnung des grössten Biegungsmoments für jede Stelle des Brückenbalkens auf drei Stützen.

Nach § 10 (Gleichung 17) erhält man für den Gegendruck der linksseitigen Endstütze bei dem in Fig. 169 dargestellten Belastungszustande, indem man abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{x}{l} = \varphi$ setzt, die Gleichung:

$$1) \quad K = \frac{Q}{4}(4 - 5\varphi + \varphi^3).$$

Um diejenige Stelle zu finden, an welcher das Biegungsmoment gleich Null ist, hat man in der Gleichung:

$$2) \quad 0 = Q(z - x) - Kz$$

für K den obigen Werth zu substituiren und die Gleichung alsdann für z aufzulösen. Wenn man abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{z}{l} = \psi$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$3) \quad \psi = \frac{4}{5 - \varphi^2}.$$

Aus den Gleichungen 1) und 3) ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

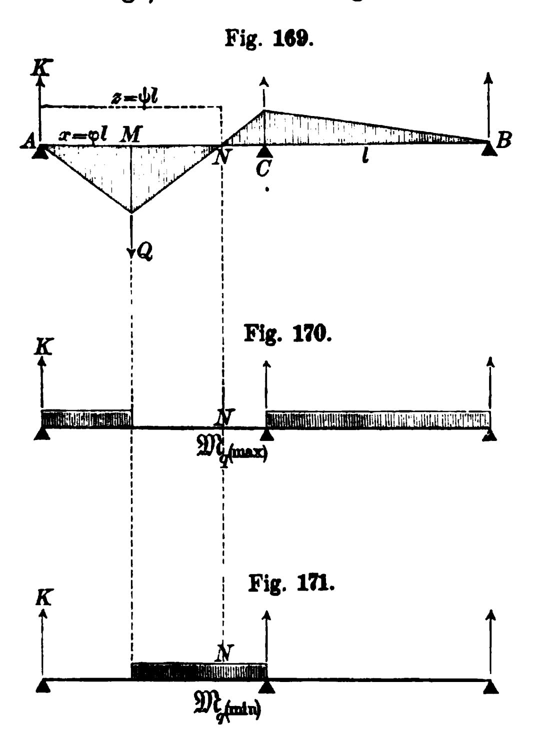
$\varphi =$ 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,
$\psi =$ 0,8	0,802	0,806	0,815	0,826	0,842	0,862	0,887	0,917	0,955	1,
$\frac{K}{Q} =$ 1	0,875	0,752	0,632	0,516	0,406	0,304	0,211	0,128	0,057	0.

Wie man nach Gleichung 3) für jede Lage der Belastung Q diejenige Stelle finden kann, an welcher dieselbe das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = 0$ hervorbringt, so kann man diese Gleichung auch umgekehrt in der Form:

$$4) \quad \varphi = \sqrt{5 - \frac{4}{\psi}}$$

dazu benutzen, um diejenige Stelle M zu finden, an welcher das Gewicht Q aufgehängt werden muss, wenn an einer bestimmten gegebenen Stelle N das von demselben hervorgebrachte Biegungs-

moment $\mathfrak{M}$ gleich Null werden soll. Aus der graphischen Darstellung der Biegungsmomente erkennt man, dass $\mathfrak{M}$ einen positiven Werth annehmen würde, wenn der Aufhängepunkt M weiter links läge, und dass $\mathfrak{M}$ negativ wird, wenn der Punkt M etwas nach rechts verschoben wird. Hieraus ergiebt sich, dass alle Belastungen der Strecke AM positive, alle Belastungen der Strecke CM dagegen negative Beiträge zu dem an der Stelle N hervorgebrachten Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ liefern würden. Wenn man ferner berücksichtigt, dass nach Fig. 158 jede Belastung der rechtsseitigen Balkenhälfte BC einen positiven Beitrag zu dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ liefert, so erkennt man, dass es die in Fig. 170 und Fig. 171 dargestellten Belastungszustände sind, für welche das von der mobilen Belastung hervorgebrachte Biegungsmoment $\mathfrak{M}_q$ an der Stelle N resp. ein Maximum und ein Minimum wird.



Wenn $\psi = 0{,}8$ ist, so wird $\varphi = 0$, d. h. wenn $AN = 0{,}8 \,.\, l$ ist, so fällt der Grenzpunkt M mit dem Endpunkte A zusammen, und die Strecke $AM = x$ reducirt sich in diesem Falle auf Null. Letzteres findet auch dann statt, wenn $AN < 0{,}8 \,.\, l$ ist, da in diesen Fällen für die Grösse φ ein imaginärer Werth aus Gleichung 4) sich ergeben würde.

Nach Fig. 170 und Fig. 171 sind nunmehr resp. das Maximum und das Minimum des allein von der mobilen Belastung an der Stelle N hervorgebrachten Biegungsmoments zu berechnen aus den Gleichungen:

$$5)\quad \mathfrak{M}_{q(\max)} = qx\left(z - \frac{x}{2}\right) - Kz,$$

$$6)\quad \mathfrak{M}_{q(\min)} = \frac{q(z-x)^2}{2} - Kz,$$

in welchen für K der dem jedesmaligen Belastungszustande entsprechende Werth zu substituiren ist.

Um das Maximum und das Minimum des ganzen Biegungsmoments $\mathfrak{M}$ zu erhalten, hat man zu den obigen Werthen noch die Grösse:

$$7)\quad \mathfrak{M}_p = \frac{pz^2}{2} - \frac{3}{8}pl \, . \, z$$

als den von der permanenten Belastung zu dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ gelieferten Beitrag hinzu zu addiren.

Aus den letzteren drei Gleichungen ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

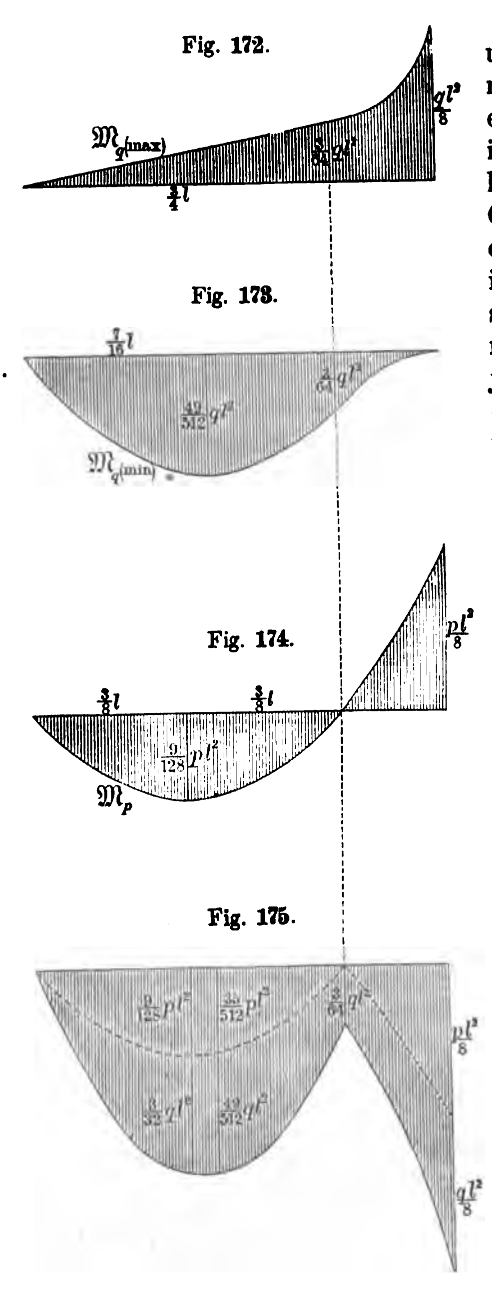
$\frac{z}{l} =$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0,8	1
$\frac{\mathfrak{M}_{q(\max)}}{ql^2} =$	0	$\frac{3}{128}$	$\frac{7}{256}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{64}$	0,05	$\frac{1}{8}$
$-\frac{\mathfrak{M}_{q(\min)}}{ql^2} =$	0	$\frac{3}{32}$	$\frac{49}{512}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	0,03	0
$\frac{\mathfrak{M}_p}{pl^2} =$	0	$-\frac{9}{128}$	$-\frac{35}{512}$	$-\frac{1}{16}$	0	$+0,02$	$+\frac{1}{8}$

Die Gesetze, nach welchen die Grössen $\mathfrak{M}_{q(\max)}$, $\mathfrak{M}_{q(\min)}$, $\mathfrak{M}_p$ mit z sich ändern, sind resp. in den Figuren **172**, **173**, **174** graphisch dargestellt. Wenn man die letztere das eine Mal mit Fig. **172**, das andere Mal mit Fig. **173** zusammensetzt in der Weise, dass man die Ordinaten mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens zu einer algebraischen Summe vereinigt, so erhält man die graphischen Darstellungen der beiden Grössen:

$$8)\quad \mathfrak{M}_{(\max)} = \mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_{q(\max)},$$

$$9)\quad \mathfrak{M}_{(\min)} = \mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_{q(\min)},$$

und wenn man endlich von den absoluten Werthen dieser letzteren beiden Grössen jedesmal den grösseren auswählt, also an jedem Punkte der Horizontalen eine Ordinate errichtet, welche den grösseren der beiden absoluten Werthe darstellt, so erhält man die in Fig. **175** ausgeführte graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem das Maximum des absoluten Werthes von $\mathfrak{M}$ mit z sich ändert.



Die beiden Figuren **168** und **175** würde man nunmehr bei Berechnung der erforderlichen Nietzahlen in der Weise benutzen können, dass man in den Gleichungen des § 34 für die Grössen 𝔙 und 𝔖 ihre Maximalwerthe einsetzt — diejenigen Werthe nämlich, welche den aus jenen beiden Figuren zu entnehmenden Maximalwerthen der Grössen V und 𝔐 entsprechen. Zwar würde man hinsichtlich der verticalen Nietfugen hierbei einen kleinen Fehler begehen, insofern — wie die Vergleichung der Figuren **170**, **171** mit den Figuren **161**, **162** zeigt — es nicht ein und derselbe Belastungszustand ist, bei welchem die Grössen V und 𝔐 ihre Maximalwerthe annehmen. Indessen wird bei practischen Anwendungen dieser Fehler keinen nachtheiligen Einfluss haben, da die auf solche Weise berechneten Nietzahlen für die verticalen Nietfugen etwas grösser ausfallen werden, als dieselben in Wirklichkeit zu sein brauchen.

DRITTER ABSCHNITT.

Berechnung des Material-Aufwandes für Blech- und Gitter-Brücken.

---

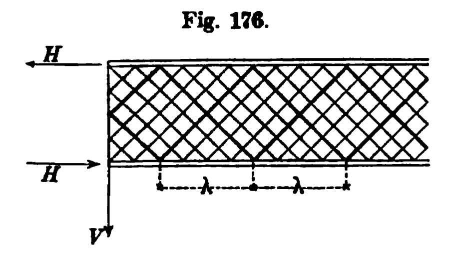
§ 38.

Erklärung der anzuwendenden Berechnungs-Methode.

Bei einem Blechbalken von geringer Stärke der Blechwand und geringer Höhe des Flanschenquerschnitts darf man — wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde — annäherungsweise annehmen, dass es ausschliesslich die Blechwand ist, welche durch die verticale Abscheerungskraft V in Anspruch genommen wird, und dass diese Kraft gleichförmig über die Höhe des Verticalschnitts der Blechwand sich vertheilt.

Denkt man sich zwischen die beiden Flanschen des Blechbalkens statt der Blech-Wand eine Gitter-Wand eingeschaltet (Fig. 176), so überzeugt man sich leicht, dass in diesem Falle die Verticalkraft V Zug- und Druck-Widerstände in den vom Verticalschnitte getroffenen Gitterstäben hervorruft, und dass die verticalen Seitenkräfte dieser Widerstände in ihrer Gesammtheit eine ähnliche Wirkung haben, wie die Abscheerungswiderstände der Blechwand.

Fig. 176.



Je kleiner die (in Fig. 176 mit λ bezeichnete) Horizontal-Projection des einzelnen Gitterstabes im Verhältniss zur ganzen Länge des Gitterbalkens ist, um so kleiner wird der Fehler sein, den man begeht, indem man auf die in Fig. 177 angedeutete Weise die einzelnen Gitterstäbe gruppenweise einander näher

gerückt und nachher die zu einer und derselben Gruppe gehörigen Gitterstäbe zu einem Stabe zusammengeschweisst sich denkt (Fig. 178). Für die Zug- und Druck-Widerstände der in ihrem Kreuzungspunkte durch den Verticalschnitt getroffenen beiden Stäbe ergiebt sich nunmehr aus Fig. 178 die Gleichung:

Fig. 177.

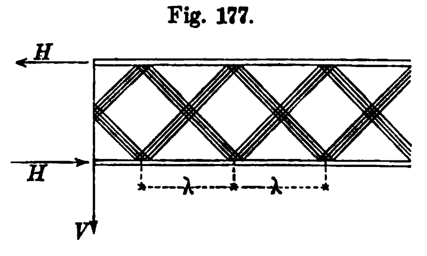
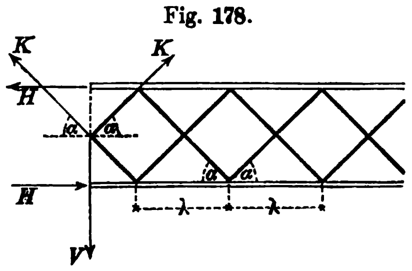


Fig. 178.



$$1)\quad 2K \sin\alpha = V, \text{ oder: } K = \frac{V}{2\sin\alpha}.$$

Wenn also mit S die practisch zulässige Spannung (pro Flächeneinheit der Querschnittsfläche) bezeichnet wird, so ist:

$$2)\quad F = \frac{K}{S} = \frac{V}{2S\sin\alpha}$$

die erforderliche Querschnittsfläche jedes der beiden Gitterstäbe, und da ein jeder die Länge $\frac{\lambda}{\cos\alpha}$ hat, so ergiebt sich für den körperlichen Inhalt der beiden Stäbe zusammengenommen der Werth:

$$3)\quad G = 2F\frac{\lambda}{\cos\alpha} = \frac{V\lambda}{S\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2V\lambda}{S\sin 2\alpha}.$$

Wenn es statt der Gitter-Wand eine Blech-Wand wäre, welche die verticale Abscheerungskraft aufzunehmen hätte, so würde man unter der Voraussetzung, dass in derselben nicht gleichzeitig auch Biegungsspannungen stattfinden, für die erforderliche verticale Querschnittsfläche derselben den Werth:

$$4)\quad \varphi = \frac{V}{S}$$

erhalten, und es würde unter der genannten Voraussetzung für die Strecke λ eine Materialmenge erforderlich sein von der Grösse:

$$5)\quad B = \varphi\lambda = \frac{V\lambda}{S}.$$

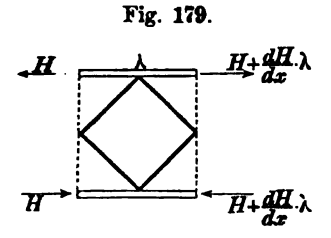
Aus den beiden Gleichungen 3) und 5) ergiebt sich für das Verhältniss der beiden Materialmengen G und B der Werth:

$$6)\quad k = \frac{G}{B} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Die Berechnung der erforderlichen Materialmenge für die Gitterwand eines Gitterbalkens kann mit Hülfe dieser Gleichung zurückgeführt werden auf die im vorigen Abschnitte entwickelte Theorie der Blechträger, und es ergiebt sich aus obiger Gleichung die folgende Methode der Berechnung:

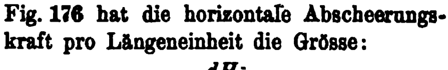
Man berechnet zunächst die Materialmenge, welche zu der Blechwand in dem Falle erforderlich sein würde, wenn dieselbe an den Biegungsspannungen nicht theilnähme — also ausschliesslich auf Abscheerung in Anspruch genommen würde. Den auf solche Weise gefundenen Werth multiplicirt man alsdann mit dem Coefficienten k, dessen Grösse von dem Neigungswinkel der Gitterstäbe abhängt und nach Gleichung 6) berechnet werden kann.

Fig. 179.



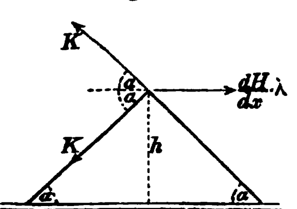
Denkt man sich die Anzahl der Gitterstäbe unendlich gross und alsdann die Gitterstäbe zu einer massiven Blechwand zusammengeschweisst, so erkennt man, dass die auf solche Weise gefundene Materialmenge auch für die Blechwand eines Blechbalkens eine ausreichende Grösse besitzen würde. In solchen Fällen also, wo es sich nur um die Berechnung eines vorläufigen Annäherungswerthes der Materialmenge handelt, ist es nicht erforderlich, zwischen Gitterbalken und Blechbalken einen Unterschied zu machen.

Zu denselben Resultaten wie oben würde man auch gelangt sein, wenn man statt der verticalen Abscheerungskraft die horizontale Abscheerungskraft als Ausgangspunkt für die Rechnung gewählt hätte. Nach § 24 und Fig. 176 hat die horizontale Abscheerungskraft pro Längeneinheit die Grösse:



$$7)\quad \mathfrak{H} = \frac{dH}{dx},$$

Fig. 180.



und da man dieselbe annäherungsweise als längs der kleinen Strecke λ constant betrachten darf, so ist:

$$8)\quad \mathfrak{H}\lambda = \frac{dH}{dx}\cdot\lambda$$

die Horizontalkraft, welche an dem oberen Verbindungspunkte der beiden Gitterstäbe angreifend die Zug- und Druck-Widerstände in denselben hervorruft (Fig. 179). Für die Grösse jedes dieser beiden Widerstände ergiebt sich aus Fig. 180 die Gleichung:

$$9)\quad 2K\cos\alpha = \frac{dH}{dx}\cdot\lambda,$$

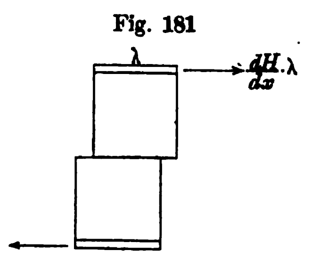
und nach Substitution des aus dieser Gleichung für K zu entnehmenden Werthes erhält man für den Querschnitt F die Gleichung:

$$10)\quad F = \frac{K}{S} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dH}{dx}\cdot\frac{\lambda}{S\cos\alpha}.$$

Die Länge jedes Gitterstabes hat nach Fig. 180 die Grösse $\frac{h}{\sin\alpha}$; folglich ist:

$$11)\quad G = 2F\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{dH}{dx}\cdot\frac{\lambda h}{S\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Fig. 181



Um die in Gleichung 5) mit B bezeichnete Grösse zu berechnen, würde man zunächst nach Fig. 181, indem man mit b die Stärke der Blechwand bezeichnet:

$$12)\quad \frac{dH}{dx}\lambda = S b \lambda$$

zu setzen haben, woraus für die Grösse B alsdann der Werth sich ergiebt:

$$13)\quad B = b h \lambda = \frac{dH}{dx}\cdot\frac{\lambda h}{S}.$$

Indem man die Gleichung 11) durch diese letztere Gleichung dividirt, erhält man für den Coefficienten k wie oben den Werth:

$$14)\quad k = \frac{G}{B} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

§ 39.

Träger von constanter Höhe.

Bei dem in Fig. 182 dargestellten Balken auf zwei Stützen hat das Biegungsmoment im Abstande x von der Mitte (nach § 3) die Grösse:

$$1)\quad \mathfrak{M} = (p+q)\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right).$$

Zu dieser Grösse des Biegungsmoments liefert jeder Belastungstheil einen positiven Beitrag: das Hinwegnehmen irgend eines Theiles der Belastung würde stets eine Verkleinerung des Biegungsmoments zur Folge haben. Wenn also p die permanente und q die mobile Belastung pro Längeneinheit bedeutet, so stellt der obige Werth — als derjenige, welchen das Biegungsmoment bei voller Belastung des Trägers annimmt — zugleich den grössten Werth dar, welchen das Biegungsmoment an jener Stelle überhaupt erreichen kann. Nach Fig. 183 ist also die Grösse F, als die an dieser Stelle erforderliche Querschnittsfläche jeder von den beiden Gurtungen, zu bestimmen aus der Gleichung:

$$2)\quad SFh = \mathfrak{M},$$

in welcher S die practisch zulässige Spannung pro Flächeneinheit des Querschnitts bedeutet. Folglich ist:

$$3)\quad F = \frac{\mathfrak{M}}{Sh} = \frac{(p+q)(l^2 - x^2)}{2Sh}.$$

Für die unendlich kleine Strecke dx würde an dieser Stelle zu den beiden Gurtungen zusammen genommen eine Materialmenge erforderlich sein von dem körperlichen Inhalte:

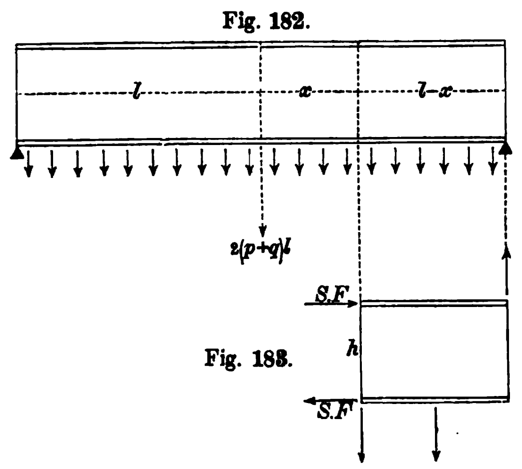


Fig. 182.

Fig. 183.

$$4)\quad dJ_1 = 2\,F dx.$$

Die ganze zu den beiden Gurtungen erforderliche Materialmenge hat also den körperlichen Inhalt:

$$5)\quad J_1 = 2\int_0^l 2\,F dx.$$

Nach Substitution des oben für F gefundenen Werthes nimmt diese Gleichung die Form an:

$$6)\quad J_1 = \frac{2(p+q)}{Sh}\int_0^l (l^2 - x^2)\,dx, \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad J_1 = \frac{4(p+q)l^3}{3Sh}.$$

Um die Materialmenge J_2 zu berechnen, welche zu der Blechwand in dem Falle erforderlich sein würde, wenn dieselbe an den Biegungsspannungen nicht theilnähme, hat man zunächst diejenigen Belastungszustände aufzusuchen, bei welchen die verticale Abscheerungskraft V an der im Abstande x von der Mitte befindlichen Stelle resp. ein Maximum oder Minimum wird. Jeder Belastungstheil links von der Stelle M liefert einen positiven Beitrag, jeder Belastungstheil rechts von der Stelle M liefert einen negativen Beitrag zu der an dieser Stelle hervorgebrachten verticalen Abscheerungskraft. Es sind also die in Fig. 184 und Fig. 185 dargestellten Belastungszustände, bei welchen die Grösse V_q —

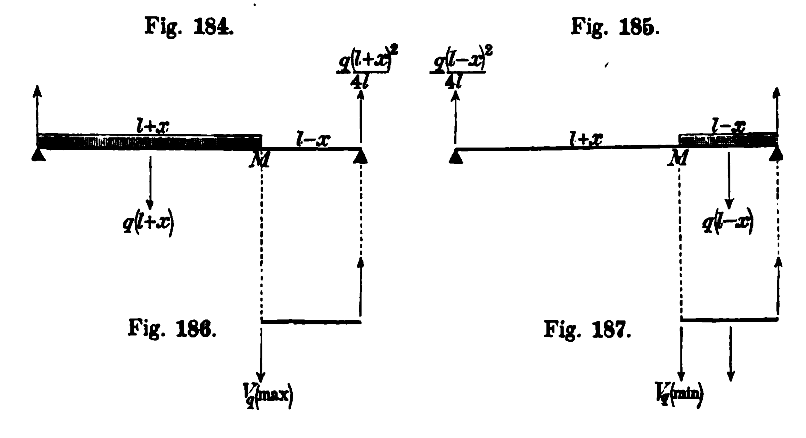
als die von der mobilen Belastung allein hervorgebrachte verticale Abscheerungskraft — resp. ein Maximum und ein Minimum wird. Nach Fig. 186 und Fig. 187 ist:

$$8)\quad V_{q\,(\max)} = +\frac{q\,(l+x)^2}{4\,l}, \qquad 9)\quad V_{q\,(\min)} = -\frac{q\,(l-x)^2}{4\,l}.$$

Die permanente Belastung liefert zu der verticalen Abscheerungskraft den Beitrag:

$$10)\quad V_p = +px.$$

Da die Grösse x hier als positiv vorausgesetzt wird, so hat der



grösste absolute Werth, welchen die verticale Abscheerungskraft an jener Stelle annehmen kann, die Grösse:

$$11)\quad V = px + \frac{q\,(l+x)^2}{4\,l}.$$

Wenn also die Blechwand an den Biegungsspannungen nicht theilnähme, so würde die Grösse b, als die an jener Stelle erforderliche Stärke dieser hypothetischen Blechwand, zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$12)\quad Sbh = V,$$

aus welcher man für den Verticalschnitt der Blechwand den Werth erhält:

$$13)\quad bh = \frac{V}{S} = \frac{px}{S} + \frac{q\,(l+x)^2}{4\,S\,l}.$$

Die ganze Materialmenge, welche unter obiger Voraussetzung zu der Blechwand erforderlich sein würde, hat also den körperlichen Inhalt:

$$14)\quad J_2 = 2\int_0^l bh\,dx = 2\int_0^l \left\{\frac{px}{S} + \frac{q(l+x)^2}{4Sl}\right\} dx, \quad \text{oder:}$$

$$15)\quad J_2 = \frac{pl^2}{S} + \frac{7}{6}\frac{ql^2}{S}.$$

Nach der im vorigen Paragraphen gefundenen Regel hat man diesen Werth noch mit dem Coefficienten k zu multipliciren, um die zur Blech- oder Gitter-Wand wirklich erforderliche Materialmenge zu erhalten. Die zu dem ganzen Träger wirklich erforderliche Materialmenge hat also den körperlichen Inhalt:

$$16)\quad J = J_1 + kJ_2.$$

Nach Substitution der oben für die Grössen J_1 und J_2 gefundenen Werthe nimmt diese Gleichung die Form an:

$$17)\quad J = \frac{4(p+q)l^3}{3Sh} + k\left(\frac{pl^2}{S} + \frac{7}{6}\frac{ql^2}{S}\right).$$

Wenn man hierin $2l = L$ und $\frac{L}{h} = n$ setzt, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$18)\quad J = \frac{L^2}{24S}\left\{(4n + 6k)p + (4n + 7k)q\right\}.$$

Nach den Gleichungen 6) und 14) des vorigen Paragraphen wird $k = 2$, wenn $\alpha = 45^\circ$ ist. Wenn man ausserdem $n = 10$ setzt, so erhält man für einen Träger, dessen Länge das Zehnfache der Höhe ist, den Werth:

$$19)\quad J = \frac{L^2}{24S}\left\{52p + 54q\right\}.$$

Anstatt bei der Berechnung der Grösse J_2 von der verticalen Abscheerungskraft V auszugehen, hätte man auch die horizontale Abscheerungskraft $\frac{dH}{dx}$ als Ausgangspunkt wählen können. Bei dem in Fig. 188 dargestellten Belastungszustande ist nach Fig. 189:

$$20)\quad Hh = \frac{Qz}{2l}(l-x), \quad \text{oder:} \quad 21)\quad \frac{dH}{dx} = -\frac{Qz}{2lh}.$$

Wenn man in der letzteren Gleichung $q\,dz$ statt Q setzt und alsdann zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = l + x$ integrirt, so erhält man für den grössten negativen Werth, welchen die von der mobilen Belastung allein hervorgebrachte horizontale Abscheerungskraft annehmen kann, die Gleichung:

$$22)\quad \frac{dH}{dx}(\text{min}) = -\int_0^{l+x}\frac{qz\,dz}{2lh} = -\frac{q(l+x)^2}{4lh}.$$

Die Stärke b_q, welche die hypothetische Blechwand haben müsste, wenn nur die mobile Belastung vorhanden wäre, ist also zu bestimmen aus der Gleichung:

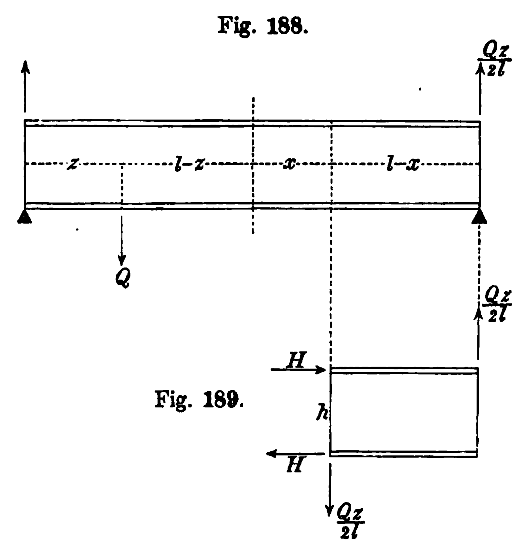


Fig. 188.

Fig. 189.

$$23)\quad S \,.\, b_q \,.\, 1 = \frac{q\,(l+x)^2}{4\,l\,h}.$$

Die Stärke b_p, welche erforderlich sein würde, wenn nur die permanente Belastung vorhanden wäre, ist zu berechnen aus den Gleichungen:

$$24)\quad H h = p\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right),$$

$$25)\quad \frac{dH}{dx} = -\frac{p\,x}{h},$$

$$26)\quad S \,.\, b_p \,.\, 1 = \frac{p\,x}{h}.$$

Die in Gleichung 12) mit b bezeichnete Grösse ist gleich der Summe $b_p + b_q$ zu setzen. Nach Substitution der für diese beiden Grössen aus den Gleichungen 26) und 23) zu entnehmenden Ausdrücke erhält man für den Verticalschnitt der Blechwand wiederum den schon in Gleichung 13) gefundenen Werth:

$$27)\quad b\,h = (b_p + b_q)\,h = \frac{p\,x}{S} + \frac{q\,(l+x)^2}{4\,S\,l}.$$

§ 40.

Träger mit constanten Horizontalspannungen der Gurtungen.

(Parabolischer Träger.)

Bei dem in Fig. 190 dargestellten Träger sind die horizontalen Seitenkräfte der Spannungen in den Gurtungen nach Fig. 191 zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1)\quad H u = p\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right).$$

Wenn mit H_0 der Werth bezeichnet wird, welchen die Grösse H für $x = 0$ annimmt, so ist:

$$2)\quad H_0 h = \frac{p\,l^2}{2}.$$

Durch Gleichsetzung der aus diesen beiden Gleichungen resp. für die Grössen H und H_0 zu entnehmenden Werthe erhält man die Gleichung:

$$3)\quad \frac{u}{h} = \frac{l^2 - x^2}{l^2}$$

als Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn H eine von x unabhängige constante Grösse, und demgemäss die horizontale Abscheerungskraft $\frac{dH}{dx}$ überall gleich Null sein soll. Die obige Gleichung nimmt nach Substitution des Werthes $h - u = y$ die einfachere Form an:

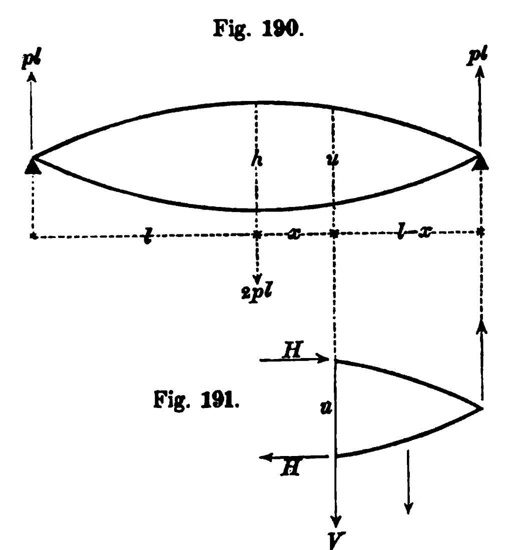


Fig. 190.

Fig. 191.

$$4)\quad \frac{y}{h} = \frac{x^2}{l^2}.$$

Wenn man hierin $h = h_1 + h_2$ und $y = y_1 + y_2$ setzt, so erkennt man, dass dieser Bedingung auf die in Fig. 192 angegebene Weise Genüge geleistet werden kann, sobald die Formen der beiden Bögen den Parabel-Gleichungen entsprechen:

$$5)\quad \frac{y_1}{h_1} = \frac{x^2}{l^2} \quad \text{und} \quad 6)\quad \frac{y_2}{h_2} = \frac{x^2}{l^2};$$

denn man erhält durch Verbindung derselben wiederum die mit der obigen Bedingung übereinstimmende Gleichung:

$$7)\quad \frac{y_1 + y_2}{h_1 + h_2} = \frac{x^2}{l^2} = \frac{y}{h}.$$

Bei einem solchen Träger mit parabolisch gekrümmten Gurtungen würde man also, wenn derselbe stets nur eine gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilte Belastung zu tragen hätte, die Blech- oder Gitterwand zwischen den beiden Gurtungen ganz fortlassen dürfen. Jeder von den beiden Bögen würde in diesem Falle als eine in ihrer Gleichgewichtslage befindliche

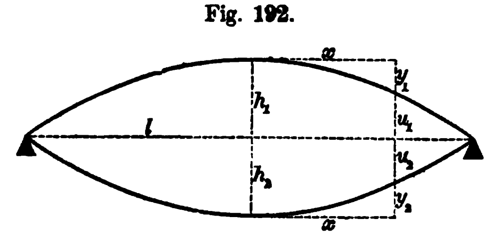


Fig. 192.

vollkommen biegsame Kette betrachtet werden können, deren Spannung an jeder Stelle eine Kraft bildet, welche mit der Tangenten-Richtung daselbst zusammenfällt. Für die constante horizontale Seitenkraft dieser Spannung ergiebt sich aus Gleichung 2) der Werth:

$$8)\quad H = \frac{p l^2}{2 h},$$

und da in der Mitte des Trägers die verticalen Seitenkräfte der Bogenspannungen gleich Null sind, so ist der an dieser Stelle erforderliche Querschnitt jedes der beiden Bögen zu berechnen aus der Gleichung:

$$9)\quad F_0 = \frac{H}{S} = \frac{p l^2}{2 h S},$$

in welcher S die practisch zulässige Spannung pro Flächeneinheit des Querschnitts bedeutet.

Fig. 193.

Im Abstande x von der Mitte hat nach Fig. 193 die Spannung des oberen Bogens die Grösse:

$$10)\quad R = \frac{H}{\cos \alpha_1}.$$

Wenn also mit F der an dieser Stelle erforderliche Querschnitt bezeichnet wird, so ist:

$$11)\quad \frac{F}{F_0} = \frac{R}{H} = \frac{1}{\cos \alpha_1}$$

zu setzen, und der Verticalschnitt des Bogens an dieser Stelle hat nach Fig. 194 die Grösse:

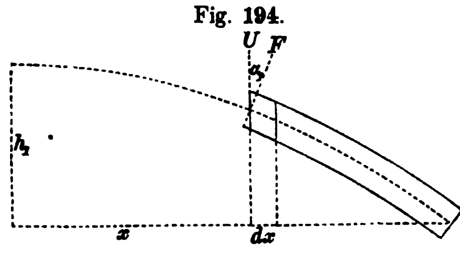


Fig. 194.

$$12)\quad U = \frac{F}{\cos \alpha_1} = \frac{F_0}{\cos \alpha_1^2} = F_0 (1 + \operatorname{tg} \alpha_1^2).$$

Für $\operatorname{tg} \alpha_1$ erhält man nach Gleichung 5), indem man dieselbe differenziirt, den Werth:

$$13)\quad \frac{d y_1}{d x} = \frac{2 h_1 x}{l^2} = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

und nach Substitution desselben nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an:

$$14)\quad U = F_0\left(1 + \frac{4 h_1^2 x^2}{l^4}\right).$$

Der körperliche Inhalt der zu dem oberen Bogen erforderlichen Materialmenge ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$15)\quad J_1 = 2\int_0^l U\,dx = 2 F_0 \int_0^l \left(1 + \frac{4 h_1^2 x^2}{l^4}\right) dx, \quad \text{oder:}$$

$$16)\quad J_1 = 2 F_0\left(l + \frac{4 h_1^2}{3 l}\right).$$

Auf gleiche Weise findet man für die zu dem unteren Bogen erforderliche Materialmenge die Gleichung:

$$17)\quad J_2 = 2 F_0\left(l + \frac{4 h_2^2}{3 l}\right).$$

Wenn man in den letzteren beiden Gleichungen für F_0 den in Gleichung 9) gefundenen Werth substituirt, so erhält man durch Addition derselben für die zu beiden Bögen zusammengenommen erforderliche Materialmenge die Gleichung:

$$18)\quad J_1 + J_2 = \frac{p l^3}{S h}\left\{2 + \frac{4}{3}\left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{l^2}\right)\right\}.$$

§ 41.

Berechnung der für die Blech- oder Gitter-Wand des parabolischen Trägers erforderlichen Materialmenge.

Wenn zu der permanenten Belastung noch mobile Belastungen hinzukommen, so werden die Abscheerungswiderstände der zwischen die beiden Bögen einzuschaltenden Blech- oder Gitter-Wand in Anspruch genommen. Nach Fig. 195 und Fig. 196 sind die von dem Einzelgewichte Q hervorgebrachten Horizontalspannungen der Bögen zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad H u = \frac{Q z}{2 l}(l - x),$$

welche für H aufgelöst nach Substitution des aus Gleichung 3) des vorigen Paragraphen für u zu entnehmenden Werthes die Form annimmt:

$$2)\quad H = \frac{Q l z}{2 h (l + x)}.$$

Die von dem Gewichte Q hervorgebrachte horizontale Abscheerungskraft pro Längeneinheit hat also die Grösse:

$$3)\quad \frac{dH}{dx} = -\frac{Q l z}{2h(l+x)^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, das jede Belastung links von dem Verticalschnitte einen negativen Beitrag zu der an dieser Stelle hervorgebrachten horizontalen Abscheerungskraft liefert. Um den grössten negativen Werth zu erhalten, welchen $\frac{dH}{dx}$ unter Einwirkung der mobilen Belastungen annehmen kann, hat man $q\,dz$ statt Q zu setzen und alsdann auf der rechten Seite zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = l + x$ zu integriren. Es ist also:

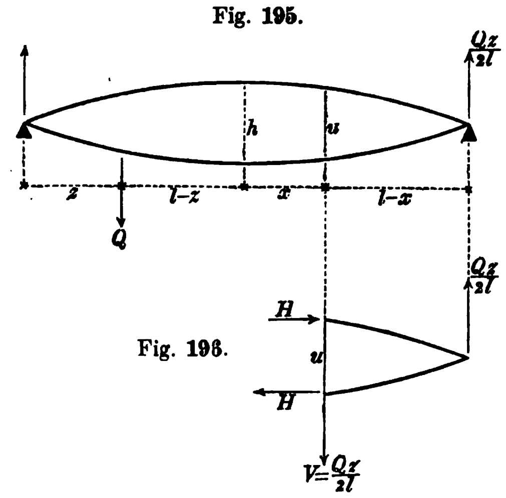


Fig. 195.

Fig. 196.

$$4)\quad \frac{dH}{dx}(\min) = \int_{z=0}^{z=l+x} \frac{-q\,dz\,.\,lz}{2h(l+x)^2} = \frac{-ql}{2h(l+x)^2}\int_0^{l+x} z\,dz, \text{ oder:}$$

$$5)\quad \frac{dH}{dx}(\min) = -\frac{ql}{4h}.$$

Die Wirkung eines rechts von dem Verticalschnitte angebrachten Einzelgewichts Q ist nach Fig. 197 und Fig. 198 auf analoge Weise zu berechnen aus den Gleichungen:

$$6)\quad Hu = \frac{Qz}{2l}(l+x), \quad \text{oder:} \quad H = \frac{Qlz}{2h(l-x)} \quad \text{und:}$$

$$7)\quad \frac{dH}{dx} = +\frac{Qlz}{2h(l-x)^2}.$$

Jede Belastung rechts von dem Verticalschnitte liefert also einen positiven Beitrag zu der horizontalen Abscheerungskraft. Folglich ist der grösste positive Werth von $\frac{dH}{dx}$ zu berechnen aus der Gleichung:

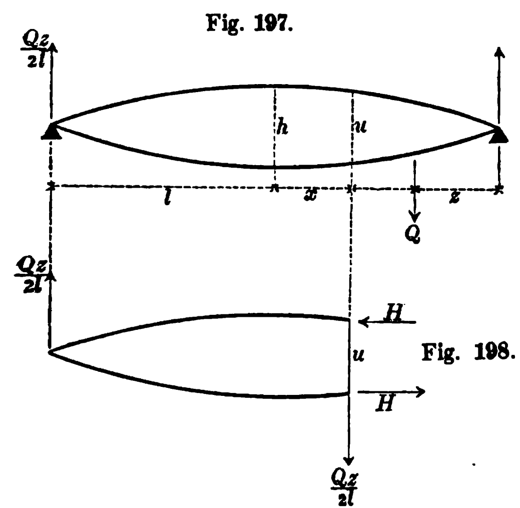
$$8)\quad \frac{dH}{dx}(\max) = \int_{z=0}^{z=l-x} \frac{q\,dz\,.\,lz}{2h(l-x)^2} = \frac{ql}{2h(l-x)^2}\int_0^{l-x} z\,dz, \text{ oder:}$$

9) $\frac{dH}{dx}\,(\max) = + \frac{ql}{4h}$.

Das Maximum und das Minimum der horizontalen Abscheerungskraft haben also an allen Stellen des Trägers den von x unabhängigen Werth:

10) $\frac{dH}{dx}\left\{\begin{matrix}\max\\\min\end{matrix}\right\} = \pm \frac{ql}{4h}$.

Eine zwischen die beiden Bögen eingeschaltete Blechwand würde demnach, wenn dieselbe an den Biegungsspannungen nicht theilnehmend nur auf Abscheerung in Anspruch genommen würde, überall gleich stark zu machen sein, und diese Blechstärke b würde zu berechnen sein aus der Gleichung:



11) $b \,.\, S \,.\, 1 = \frac{ql}{4h}$.

Für die Strecke dx würde daher eine Materialmenge erforderlich sein vom körperlichen Inhalte:

12) $dJ_3 = b\,u\,dx = \frac{q\,l\,u\,dx}{4hS} = \frac{q\,(l^2 - x^2)\,dx}{4lS}$.

Die ganze Materialmenge, welche zu dieser hypothetischen Blechwand erforderlich sein würde, hat also die Grösse:

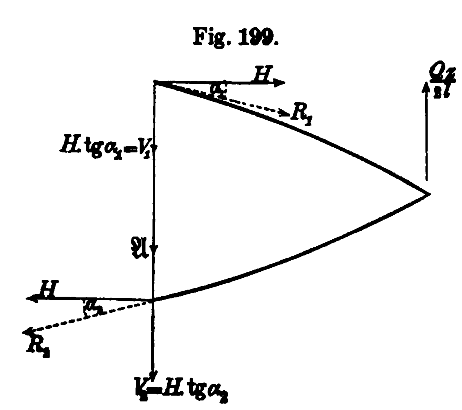
13) $J_3 = 2\int_{x=0}^{x=l} b\,u\,dx = \frac{q}{2lS}\int_0^l (l^2 - x^2)\,dx$, oder:

14) $J_3 = \frac{ql^2}{3S}$.

Diesen Werth hat man, um die wirklich erforderliche Materialmenge zu erhalten (nach § 38), noch mit dem Coefficienten k zu multipliciren.

Zu demselben Resultate würde man auch gelangen, wenn man statt der horizontalen Abscheerungskraft die verticale Abscheerungskraft als Ausgangspunkt wählte. Die ganze in dem Verticalschnitte auftretende Verticalkraft V kann man sich auf die in Fig. 199 angedeutete Weise in drei Theile zerlegt denken. Die beiden ersten Theile V_1 und V_2 bilden die verticalen Seitenkräfte der Bogenspannungen, der dritte Theil $\mathfrak{A}$ bildet die verticale Abscheerungskraft für die Blech- oder Gitter-Wand. Nach Fig. 199 hat also die ganze Verticalkraft die Grösse:

Fig. 199.



$$15)\quad V = H\,(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2) + \mathfrak{A}.$$

Diese Gleichung nimmt, für $\mathfrak{A}$ aufgelöst, nach Substitution der aus Gleichung 13) des vorigen Paragraphen zu berechnenden Werthe von $\operatorname{tg}\alpha_1$ und $\operatorname{tg}\alpha_2$ die Form an:

$$16)\quad \mathfrak{A} = V - H \cdot \frac{2hx}{l^2}.$$

Wenn man hierin für die Grössen V und H resp. die in Fig. 195 und Gleichung 2) angegebenen Werthe einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$17)\quad \mathfrak{A} = + \frac{Q(l-x)z}{2l(l+x)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass jede Belastung links von dem Verticalschnitte einen positiven Beitrag zu der verticalen Abscheerungskraft liefert. Das Maximum desselben ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$18)\quad \mathfrak{A}_{(max)} = \int_{z=0}^{z=l+x} \frac{q\,dz\,.\,(l-x)z}{2l(l+x)} = \frac{q(l-x)}{2l(l+x)} \int_0^{l+x} z\,dz, \quad \text{oder:}$$

$$19)\quad \mathfrak{A}_{(max)} = + \frac{q(l^2-x^2)}{4l}.$$

Wenn man ein anderes Mal in Gleichung 16) für V und H die Werthe substituirte, welche dem in Fig. 197 angegebenen Belastungszustande entsprechen, so würde man auf analoge Weise zu den Gleichungen gelangen:

$$20)\quad \mathfrak{A} = - \frac{Q(l+x)z}{2l(l-x)},$$

$$21)\quad \mathfrak{A}_{(min)} = - \int_{z=0}^{z=l-x} \frac{q\,dz\,(l+x)z}{2l(l-x)} = - \frac{q(l+x)}{2l(l-x)} \int_0^{l-x} z\,dz,$$

$$22)\quad \mathfrak{A}_{(min)} = - \frac{q(l^2-x^2)}{4l}.$$

Das Maximum und das Minimum der verticalen Abscheerungskraft haben also im Abstande x von der Mitte die Grösse:

$$23)\quad \mathfrak{A}\left\{\begin{matrix}\max\\\min\end{matrix}\right\} = \pm \frac{q(l^2 - x^2)}{4l}.$$

Folglich ist die oben mit b bezeichnete Stärke der Blechwand zu berechnen aus der Gleichung:

$$24)\quad Sbu = \frac{q(l^2 - x^2)}{4l},$$

aus welcher man für die Grösse dJ_3 wiederum den Werth erhält, welcher oben in Gleichung 12) gefunden wurde.

§ 42.

Methode der statischen Momente.

Die in dem Punkte P_1 an den oberen Bogen gelegte Tangente schneidet die Horizontale AB in einem Punkte O, dessen

Fig. 200.

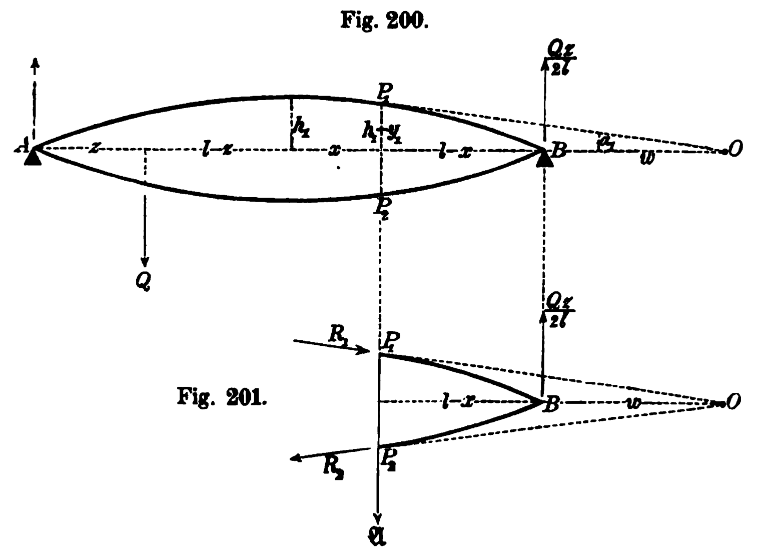


Fig. 201.

Abstand von dem Verticalschnitte P_1P_2 nach Fig. 200 zu berechnen ist aus der Gleichung:

$$1)\quad w + l - x = \frac{h_1 - y_1}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

welche für w aufgelöst nach Substitution der aus den Gleichungen 5) und 13) des § 40 für die Grössen y_1 und $\operatorname{tg} \alpha_1$ zu entnehmenden Werthe die Form annimmt:

$$2)\quad w = \frac{(l - x)^2}{2x}.$$

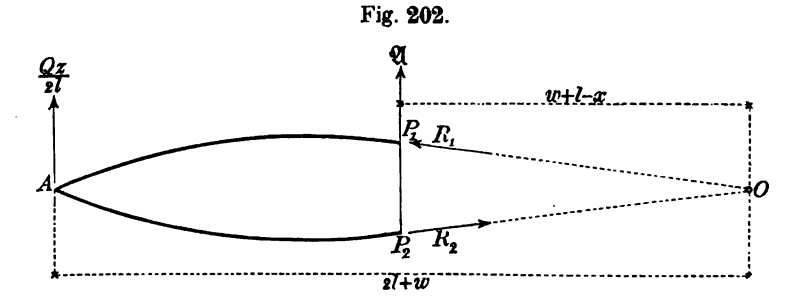
Diese Gleichung zeigt, dass die Lage des Durchschnittspunktes O unabhängig ist von der Pfeilhöhe des Bogens. Es wird daher die Horizontale AB von der in dem Punkte P_2 an den unteren Bogen gelegten Tangente ebenfalls an der Stelle O geschnitten.

Wenn man den Träger durch den Verticalschnitt P_1P_2 in zwei Theile zerlegt, so hat man an dem rechts von diesem Verticalschnitte befindlichen Theile (Fig. 201), um den Gleichgewichtszustand desselben wieder herzustellen, drei Kräfte hinzuzufügen. An den Schnittstellen der Bögen sind die Kräfte R_1 und R_2 hinzuzufügen, welche die Spannungen der Bögen darstellen und mit den Tangentenrichtungen derselben zusammenfallen. Ausserdem ist noch die längs des Verticalschnitts wirkende Kraft $\mathfrak{A}$ hinzuzufügen, welche die von der Blech- oder Gitter-Wand aufgenommene Abscheerungskraft darstellt, und welche am Schlusse des vorigen Paragraphen bereits berechnet wurde. Man erkennt aus Fig. 201, dass diese Kraft $\mathfrak{A}$ auch noch auf andere Weise berechnet werden kann. Indem man nämlich die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher auf diesen Theil wirkenden Kräfte gleich Null setzt und dabei den Durchschnittspunkt O der beiden Bogenspannungen R_1 und R_2 als Drehpunkt wählt, erhält man die Gleichung:

$$3)\quad 0 = \frac{Qz}{2l} \cdot w - \mathfrak{A}\,(w + l - x),$$

welche für $\mathfrak{A}$ aufgelöst nach Substitution des oben für w gefun-

Fig. 202.



denen Werthes die (mit Gleichung 17 des vorigen Paragraphen übereinstimmende) Form annimmt:

$$4)\quad \mathfrak{A} = \frac{Q\,(l - x)\,z}{2l\,(l + x)}.$$

Auf gleiche Weise würde man für den in Fig. 197 dargestellten Belastungszustand nach Fig. 202 die Gleichung erhalten:

$$5)\quad 0 = \frac{Qz}{2l}\cdot(2l+w) + \mathfrak{A}(w+l-x),$$

welche für $\mathfrak{A}$ aufgelöst nach Substitution des oben für w gefundenen Werthes die (mit Gleichung 20 des vorigen Paragraphen übereinstimmende) Form annimmt:

$$6)\quad \mathfrak{A} = -\frac{Q(l+x)z}{2l(l-x)}.$$

Dieselbe Methode würde man auch anwenden können, um die beiden Bogenspannungen R_1 und R_2 (oder deren horizontale Seitenkräfte) zu berechnen. Um die Kraft R_1 (oder deren horizontale Seitenkraft) zu berechnen, würde man den Punkt P_2, als Durchschnittspunkt der beiden Kräfte $\mathfrak{A}$ und R_2 als Drehpunkt zu wählen haben. Um die Kraft R_2 (oder deren horizontale Seitenkraft) zu berechnen, würde man den Punkt P_1 als Durchschnittspunkt der beiden Kräfte $\mathfrak{A}$ und R_1 als Drehpunkt zu wählen haben. Man würde alsdann für die horizontalen Seitenkräfte der Bogenspannungen dieselben Werthe erhalten, welche in den Gleichungen 2) und 6) des vorigen Paragraphen gefunden wurden.

§ 43.

Berechnung der ganzen Materialmenge des parabolischen Trägers.

Für die zu den beiden Bögen erforderliche Materialmenge erhält man nach § 40, Gleichung 18) — indem man darin $2l = L$ setzt und zugleich wegen Vorhandenseins der mobilen Belastung die Grösse p mit der Grösse $p+q$ vertauscht — den Werth:

$$1)\quad J_1 + J_2 = \frac{(p+q)L^3}{4Sh}\left\{1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{L^2}\right)\right\}.$$

Hierzu kommt nach § 41 (Gleichung 14) die zur Blech- oder Gitter-Wand erforderliche Materialmenge:

$$2)\quad kJ_3 = \frac{kqL^2}{12S}.$$

Die ganze zu dem parabolischen Träger erforderliche Materialmenge ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$3)\quad J = J_1 + J_2 + kJ_3,$$

welche nach Substitution der oben angegebenen Werthe die Form annimmt:

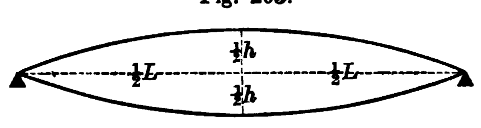
$$4)\quad J = \frac{(p+q)L^3}{4Sh}\left\{1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{L^2}\right)\right\} + \frac{kqL^2}{12S}.$$

Für den in Fig. 203 dargestellten Fall, in welchem $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$ zu setzen ist, erhält man hiernach den Werth:

$$5)\quad J = \frac{(p+q)\,L^3}{4\,S\,h}\left\{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{h^2}{L^2}\right\} + \frac{k\,q\,L^2}{12\,S}.$$

Nach den Gleichungen 6) und 14) des § 38) ist $k = 2$ zu setzen für eine Gitterwand, deren Stäbe um 45° gegen die Horizontale geneigt sind. Wenn also z. B. $\frac{h}{L} = \frac{1}{10}$ ist, so wird:

Fig. 203.



$$6)\quad J = \frac{L^2}{24\,S}\left\{60{,}8p + 64{,}8q\right\}.$$

Für den in Fig. 204 dargestellten Fall, in welchem $h_1 = h$ und $h_2 = 0$ zu setzen ist, erhält man die Gleichung:

$$7)\quad J = \frac{(p+q)\,L^3}{4\,S\,h}\left\{1 + \frac{8}{3}\,\frac{h^2}{L^2}\right\} + \frac{k\,q\,L^2}{12\,S}.$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für den in Fig. 205 dargestellten Fall, bei welchem $h_1 = 0$ und $h_2 = h$ zu setzen ist.

Wenn man wiederum $k = 2$ und $\frac{h}{L} = \frac{1}{10}$ setzt, so erhält man für die in jedem dieser beiden Fälle erforderliche Materialmenge den Werth:

$$8)\quad J = \frac{L^2}{24\,S}\left\{61{,}6p + 65{,}6q\right\}.$$

Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich, dass nur die zu den beiden Bögen erforderliche Materialmenge von dem Höhenverhältniss $\frac{h}{L}$ abhängt, dass dagegen die zu der Blech- oder Gitterwand erforderliche Materialmenge unabhängig ist von der Höhe des Trägers.

Fig. 204.

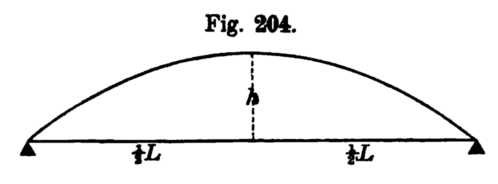


Fig. 205.

Wenn das Verhältniss $\frac{h}{L} = \frac{1}{n}$ gesetzt wird, so nimmt die Gleichung 5) die Form an:

$$9)\quad J = \frac{(p+q)\,L^2}{4\,S}\cdot\left(n + \frac{4}{3n}\right) + \frac{k\,q\,L^2}{12\,S}.$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass die Materialmenge abhängt von der Function:

10) $f(n) = n + \frac{4}{3n}$.

Um den Werth von n zu finden, für welchen die Materialmenge ein Minimum wird, hat man den Differenzialquotienten dieser Function gleich Null zu setzen und erhält dann die Gleichung:

11) $0 = f'(n) = 1 - \frac{4}{3n^2}$, oder: $n = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Nach Substitution dieses Werthes erhält man aus Gleichung 9), indem man wiederum $k = 2$ setzt, für das Minimum der erforderlichen Materialmenge den Werth:

12) $J_{(min)} = \frac{L^2}{24\,S}\left\{13{,}86 \,.\, p + 17{,}86 \,.\, q\right\}$.

Auf gleiche Weise erhält man für die beiden in Fig. **204** und Fig. **205** dargestellten Fälle die Gleichungen:

13) $J = \frac{(p + q)\,L^2}{4\,S}\left(n + \frac{8}{3n}\right) + \frac{k\,q\,L^2}{12\,S}$.

14) $f(n) = n + \frac{8}{3n}$.

15) $0 = f'(n) = 1 - \frac{8}{3n^2}$, oder: $n = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

16) $J_{(min)} = \frac{L^2}{24\,S}\left\{19{,}6 \,.\, p + 23{,}6 \,.\, q\right\}$.

Es ist hierbei jedoch zu berücksichtigen, dass die in den Gleichungen 12) und 16) gefundenen Werthe wegen Ungenauigkeit der gemachten Voraussetzungen noch einer Correction bedürfen, insofern die in § 38 bei der Berechnung des Coefficienten k gemachten Voraussetzungen um so weniger zutreffen werden, je grösser das Verhältniss $\frac{h}{L}$ ist.

§ 44.

Continuirlicher parabolischer Träger mit Gelenken.

Wenn die Horizontalspannungen der Gurtungen überall gleich gross sein sollen, so müssen — wie in § 40 mit Bezug auf Fig. **190** erklärt wurde — die Höhen des Trägers an den verschiedenen Stellen sich verhalten wie die Biegungsmomente an diesen Stellen: in solcher Weise, dass die Figur des Trägers selbst zugleich als graphische Darstellung der Biegungsmomente gelten kann. Denkt man sich das Biegungsmoment an allen Stellen des Trägers um

eine constante Grösse vermindert, so erkennt man, dass in diesem Falle auch die Höhe des Trägers an allen Stellen um eine constante Grösse vermindert werden müsste, wenn derselbe die Eigenschaft eines „Trägers mit constanten Horizontalspannungen der Gurtungen" beibehalten soll. Da ferner nach § 40 (Gleichung 1) die Horizontalspannung gleich dem constanten Verhältniss des Biegungsmoments zur Höhe ist, so wird die Grösse der Horizontalspannung dabei selbst ungeändert bleiben, wenn jene constanten Grössen, um welche resp. die Biegungsmomente und die Höhen vermindert wurden, ebenfalls in diesem Verhältniss zu einander stehen.

Bei einem Balken auf zwei Stützen kann man — wie in § 8 gezeigt wurde — durch Einmauerung der beiden Enden bewirken, dass das Biegungsmoment überall um eine constante Grösse vermindert wird. Genau auf dieselbe Weise also, wie man aus Fig. **18** durch Subtraction einer constanten Grösse von sämmtlichen Ordinaten der Parabel die Fig. **39** ableiten konnte, als graphische Darstellung der Biegungsmomente eines an beiden Enden eingemauerten Balkens: so kann man aus Fig. **190**, indem man die Höhen des Trägers überall um eine constante Grösse verkleinert, die in Fig. **206** dargestellte Form ableiten. Wenn also wieder mit h_1 und h_2 die Pfeilhöhen der beiden Bögen bezeichnet werden, so ist auch bei dieser Form des Trägers die zu den beiden Bögen erforderliche Materialmenge wieder nach Gleichung 1) des vorigen Paragraphen zu berechnen, in welcher man für den in Fig. **207** dargestellten speciellen Fall die Werthe $h_1 = 0$ und $h_2 = h$ zu substituiren haben würde.

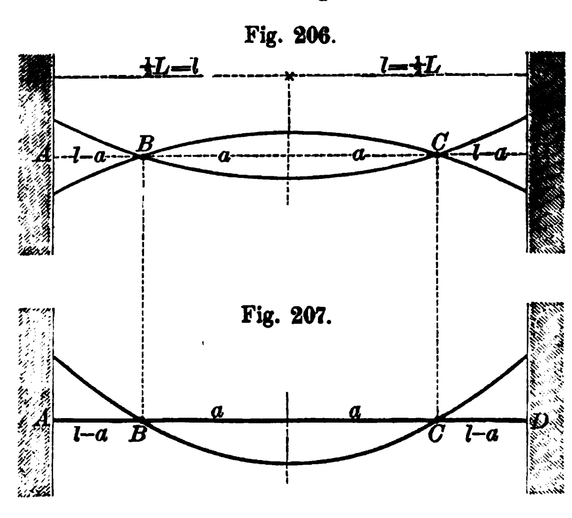


Fig. 206.

Fig. 207.

Man erkennt aus den Figuren **206** und **207**, indem man dieselben als graphische Darstellungen der Biegungsmomente be-

trachtet, dass an den Stellen B und C, wo die Höhe des Trägers gleich Null ist, auch das Biegungsmoment gleich Null sein muss, wenn die oben genannte Bedingung erfüllt sein soll. Dieses Nullwerden der Biegungsmomente wird durch die von den Wänden auf die Enden des Trägers übertragenen Kräftepaare bewirkt, deren Moment:

$$1)\quad \mathfrak{M} = (p + q)\left(\frac{l^2 - a^2}{2}\right)$$

die constante Grösse bildet, um welche in Folge der Einmauerung die Biegungsmomente des vollbelasteten Trägers überall vermindert wurden.

An den Stellen, wo das Biegungsmoment gleich Null ist, würde man (nach § 8) Gelenke einschalten können, ohne dass dadurch in den Biegungszuständen der einzelnen Theile des Trägers etwas geändert wird. Da die Horizontalspannungen in beiden Gurtungen gleich gross sind, so werden in jenen Gelenkpunkten nur Verticaldrücke von dem Mittelstücke BC auf die beiden angrenzenden Theile AB und CD übertragen. Der Theil BC ist daher als Balken auf zwei Stützen zu behandeln, und die zur Blech- oder Gitterwand dieses Theiles erforderliche Materialmenge ist auf dieselbe Weise wie für den gewöhnlichen parabolischen Träger nach den Gleichungen des § 41 zu berechnen. Es bleibt also nur noch übrig, die zur Blech- oder Gitter-Wand eines der

Fig. 208.

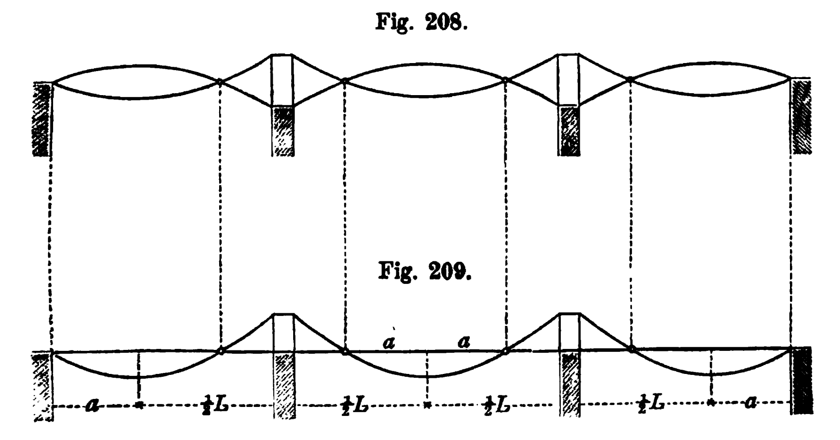


Fig. 209.

beiden Endstücke AB oder CD erforderliche Materialmenge zu berechnen. Sobald diese Materialmenge gefunden ist, wird man alsdann auch für die in Fig. 208 und Fig. 209 dargestellten con-

tinuirlichen Träger über drei Oeffnungen durch Summation der für die einzelnen Theile gefundenen Materialmengen die Gleichung für die Gesammtmenge des erforderlichen Materials aufstellen können.

§ 45.

Berechnung der Blech- oder Gitter-Wand.

Die obere Gurtung des in Fig. 210 dargestellten Theiles ist nach einer Parabel gekrümmt, für welche nach § 40 die Gleichungen gelten:

$$1)\quad \frac{y}{f} = \frac{x^2}{a^2}, \quad \text{oder:} \quad \frac{u+f}{f} = \frac{x^2}{a^2},$$

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2fx}{a^2} = \frac{du}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Die von dem Einzelgewichte Q an den Stellen M und N hervorgebrachte Horizontalspannung H ist nach Fig. 211 zu berechnen aus der Gleichung:

$$3)\quad Hu = Q(x - z),$$

welche nach Substitution des für u aus Gleichung 1) zu entnehmenden Werthes, für H aufgelöst, die Form annimmt:

$$4)\quad H = \frac{Qa^2(x-z)}{f(x^2-a^2)}.$$

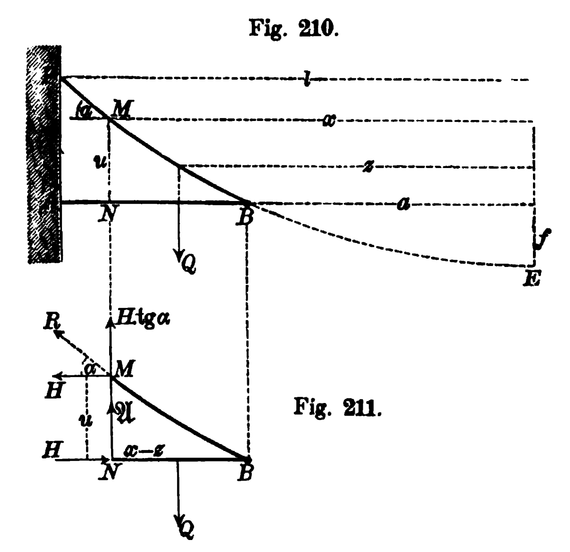


Fig. 210.

Fig. 211.

Die ganze in dem Verticalschnitte MN wirkende Verticalkraft hat die Grösse Q. Dieselbe setzt sich aus den beiden Theilen $H \operatorname{tg} \alpha$ und $\mathfrak{A}$ zusammen. Folglich ist:

$$5)\quad \mathfrak{A} = Q - H \operatorname{tg} \alpha.$$

Hierin sind für die Grössen H und $\operatorname{tg} \alpha$ die resp. in Gleichung 4) und Gleichung 2) angegebenen Werthe zu substituiren. Für die von dem Gewichte Q hervorgebrachte verticale Abscheerungskraft ergiebt sich alsdann der Werth:

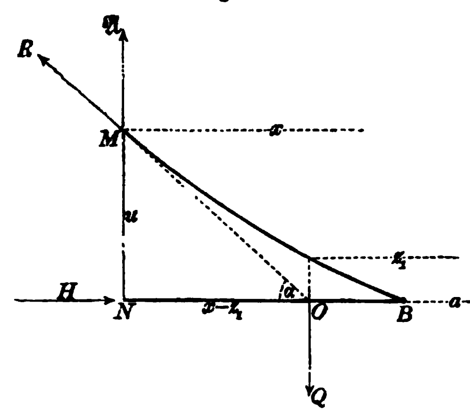
$$6)\quad \mathfrak{A} = \frac{Q(2xz - x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}.$$

Wenn mit z_1 derjenige Werth von z bezeichnet wird, für welchen $\mathfrak{A} = 0$ wird, so ist:

$$7)\quad z_1 = \frac{x^2 + a^2}{2x}.$$

Die Bedeutung der Grösse z_1 kann man auf die in Fig. 212 angedeutete Weise sich veranschaulichen. Wenn man nämlich zur Bestimmung der Kraft $\mathfrak{A}$ die in § 42 erklärte Methode der statischen Momente benutzt, so erkennt man, dass der Durchschnittspunkt O, in welchem die Richtungslinien der beiden Kräfte R und H einander schneiden, die Stelle bezeichnet, an welcher das Gewicht Q aufgehängt werden muss, damit $\mathfrak{A} = 0$ werde. Nach Fig. 212 würde die Grösse z_1 zu bestimmen sein aus der Gleichung:

Fig. 212.

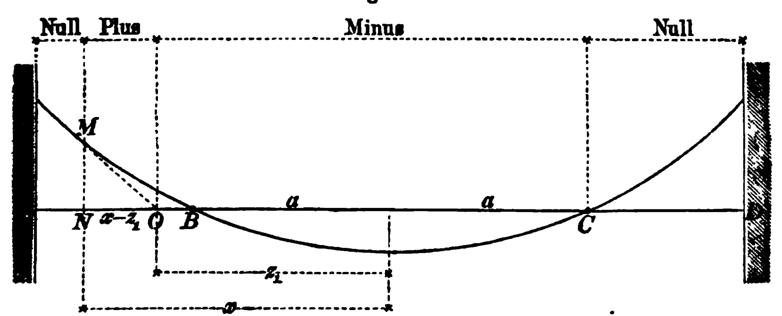


$$8)\quad x - z_1 = \frac{u}{\operatorname{tg}\alpha},$$

welche für z_1 aufgelöst, nach Substitution der für u und $\operatorname{tg}\alpha$ aus den Gleichungen 1) und 2) zu entnehmenden Werthe, ebenfalls zu dem in Gleichung 7) gefundenen Resultate führt.

Die Gleichung 6) zeigt, dass $\mathfrak{A}$ positiv wird, wenn $z > z_1$ ist, und dass $\mathfrak{A}$ negativ wird, wenn $z < z_1$ ist. Folglich wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{(max)}$, wenn die in Fig. 213 mit „Plus" bezeichnete Strecke

Fig. 213.



allein belastet ist, und es wird $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{(min)}$, wenn die mit „Minus" bezeichneten Strecken allein belastet sind, während die Belastungen

der mit „Null" bezeichneten Strecken gar keinen Beitrag zu der Grösse $\mathfrak{A}$ liefern. Um die Grösse $\mathfrak{A}_{(max)}$ zu erhalten, hat man $q\,dz$ statt Q zu setzen in Gleichung 6) und dann die Integration auszuführen zwischen den Grenzen $z = z_1$ und $z = x$. Folglich ist:

$$9)\quad \mathfrak{A}_{(max)} = \int_{z=z_1}^{z=x} q\,dz \left\{\frac{2zx - (x^2 + a^2)}{x^2 - a^2}\right\},$$

$$10)\quad \mathfrak{A}_{(max)} = \left(\frac{q}{x^2 - a^2}\right)\left\{x\int_{z_1}^{x} 2z\,dz - (x^2 + a^2)\int_{z_1}^{x} dz\right\}, \text{ oder:}$$

$$11)\quad \mathfrak{A}_{(max)} = \left(\frac{q}{x^2 - a^2}\right)\left\{x(x^2 - z_1^2) - (x^2 + a^2)(x - z_1)\right\}.$$

Die letztere Gleichung nimmt nach Substitution des in Gleichung 7) für z_1 gefundenen Werthes die Form an:

$$12)\quad \mathfrak{A}_{(max)} = \frac{q(x^2 - a^2)}{4x}.$$

Die Grösse $\mathfrak{A}_{(min)}$ kann man sich in die zwei Theile $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zerlegt denken, indem man mit $\mathfrak{A}_1$ den Beitrag bezeichnet, welchen die Belastung der Strecke OB, und mit $\mathfrak{A}_2$ den Beitrag, welchen die Belastung der Strecke BC zu der Grösse $\mathfrak{A}_{(min)}$ liefert. Für die erstere erhält man die (den vorigen analog gebildeten) Gleichungen:

$$13)\quad \mathfrak{A}_1 = \int_{z=a}^{z=z_1} q\,dz \left\{\frac{2xz - (x^2 + a^2)}{x^2 - a^2}\right\},$$

$$14)\quad \mathfrak{A}_1 = \left(\frac{q}{x^2 - a^2}\right)\left\{x\int_{a}^{z_1} 2z\,dz - (x^2 + a^2)\int_{a}^{z_1} dz\right\},$$

$$15)\quad \mathfrak{A}_1 = \left(\frac{q}{x^2 - a^2}\right)\left\{x(z_1^2 - a^2) - (x^2 + a^2)(z_1 - a)\right\},$$

welche letztere nach Substitution des in Gleichung 7) für z_1 gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$16)\quad \mathfrak{A}_1 = -\frac{q(x - a)^3}{4x(x + a)}.$$

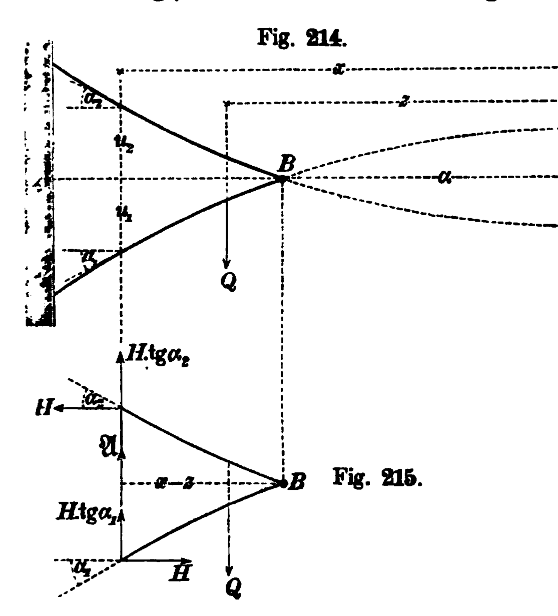
Für die Grösse $\mathfrak{A}_2$ erhält man unmittelbar aus Gleichung 6), indem man darin a statt z und qa statt Q setzt, den Werth:

$$17)\quad \mathfrak{A}_2 = -qa\left(\frac{x - a}{x + a}\right).$$

Die Grösse $\mathfrak{A}_{(min)}$ ist gleich der Summe der beiden letzteren Ausdrücke zu setzen; also ist:

$$18)\quad \mathfrak{A}_{(min)} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = -\frac{q\,(x^2 - a^2)}{4x}.$$

Die beiden Gleichungen 12) und 18) zeigen, dass die absoluten Werthe der beiden Grössen $\mathfrak{A}_{(max)}$ und $\mathfrak{A}_{(min)}$ einander gleich sind. Hieraus folgt, dass bei voller Belastung $\mathfrak{A} = 0$ ist, insofern dann die positiven und negativen Beiträge, welche die Belastungen der mit „Plus" und „Minus" bezeichneten Strecken zu der Grösse $\mathfrak{A}$ liefern, einander gegenseitig aufheben.



Die verticale Querschnittsfläche, welche die Blechwand haben müsste, wenn dieselbe an den Biegungsspannungen nicht theilnehmend nur Abscheerungswiderstände zu leisten hätte, ist demnach zu berechnen aus der Gleichung:

$$19)\quad \varphi = \frac{q\,(x^2 - a^2)}{4\,S x},$$

und die Materialmenge, welche unter dieser Voraussetzung zu der ganzen Blechwand des Stückes AB erforderlich sein würde, hat die Grösse:

$$20)\quad B = \int_a^l \varphi\, dx = \int_a^l \frac{q\,(x^2 - a^2)}{4\,S x}\, dx, \quad \text{oder:}$$

$$21)\quad B = \frac{q}{4\,S}\left\{\frac{l^2 - a^2}{2} - a^2 \lg\left(\frac{l}{a}\right)\right\}.$$

Dieselbe Gleichung ist auch für die in Fig. 206 dargestellte Form des Trägers als gültig zu betrachten. Denn für diesen Fall würde man nach Fig. 214 und Fig. 215 die Gleichungen erhalten:

$$22)\quad H(u_1 + u_2) = Q(x - z),$$
$$23)\quad \mathfrak{A} = Q - H(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2),$$

und wenn man in diesen Gleichungen die aus § 40 zu entnehmenden Werthe substituirt:

$$24)\quad u_1 = f_1\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right), \qquad 25)\quad u_2 = f_2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

$$26)\quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2 f_1 x}{a^2}, \qquad 27)\quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2 f_2 x}{a^2},$$

so erhält man für die von dem Gewichte Q hervorgebrachte verticale Abscheerungskraft den Werth:

$$28)\quad \mathfrak{A} = Q\left\{\frac{2xz - x^2 - a^2}{x^2 - a^2}\right\},$$

welcher mit dem in Gleichung 6) gefundenen Werthe übereinstimmt. Es folgt hieraus, dass die zu der Blech- oder Gitter-Wand erforderliche Materialmenge ebenso wie bei dem gewöhnlichen parabolischen Träger ganz unabhängig ist von den Pfeilhöhen der beiden Bögen.

Die Materialmenge, welche zu der Blechwand des Mittelstücks BC (in Fig. 206) erforderlich sein würde, wenn dieselbe nur Abscheerungswiderstände zu leisten hätte, ist nach § 41 zu berechnen aus der Gleichung:

$$29)\quad \mathfrak{B} = \frac{q a^2}{3 S}.$$

Hiernach erhält man für die zu der Blech- oder Gitter-Wand des ganzen in Fig. 206 dargestellten Trägers wirklich erforderliche Materialmenge die Gleichung:

$$30)\quad M = k(2B + \mathfrak{B}), \quad \text{oder:}$$

$$31)\quad M = \frac{kq}{4S}\left\{l^2 - a^2 - a^2 \,.\, 2\lg\left(\frac{l}{a}\right)\right\} + \frac{kqa^2}{3S}, \quad \text{oder:}$$

$$32)\quad M = \frac{kqL^2}{48S}\left\{3 + \frac{a^2}{l^2} - 3\,\frac{a^2}{l^2}\lg\left(\frac{l^2}{a^2}\right)\right\}.$$

Wenn man hierin z. B. $\frac{a^2}{l^2} = \frac{1}{2}$ setzt, so erhält man für M den Werth:

$$33)\quad M = \frac{kqL^2}{12S} \cdot 0{,}615.$$

Die Vergleichung desselben mit dem in § 43 (Gleichung 2), für den gewöhnlichen parabolischen Träger gefundenen Werthe zeigt, dass die Ersparung an Material für die Blech- oder Gitter-Wand etwa 38,5 Procent beträgt.

§ 46.

Continuirlicher Parallelträger mit Gelenken.

Da das Mittelstück BC als ein an beiden Enden frei aufliegender Balken zu betrachten ist und die zu demselben erforder-

liche Materialmenge demnach aus den Gleichungen des § 39 entnommen werden kann, so ist hier nur noch nöthig, für eines der beiden Endstücke AB oder CD die erforderliche Materialmenge zu berechnen (Fig. 216).

Für die Querschnittsflächen der Gurtungen ergiebt sich aus Fig. 217 die Gleichung:

$$1) \quad SFh = pa(x-a) + \frac{p(x-a)^2}{2}, \quad \text{oder:} \quad F = \frac{p(x^2-a^2)}{2Sh}.$$

Die zu den beiden Gurtungen des Stückes AB erforderliche Materialmenge hat also die Grösse:

$$2) \quad M_1 = \int_a^l 2F\,dx = \int_a^l \frac{p(x^2-a^2)}{Sh}\,dx, \quad \text{oder:}$$

$$3) \quad M_1 = \frac{p(l^3 - 3la^2 + 2a^3)}{3Sh}.$$

Für die verticale Abscheerungskraft im Abstande x von der Mitte ergiebt sich aus Fig. 217 der Werth:

$$4) \quad V = pa + p(x-a) = px.$$

Der Verticalschnitt der Blechwand müsste also, wenn dieselbe an

Fig. 216.

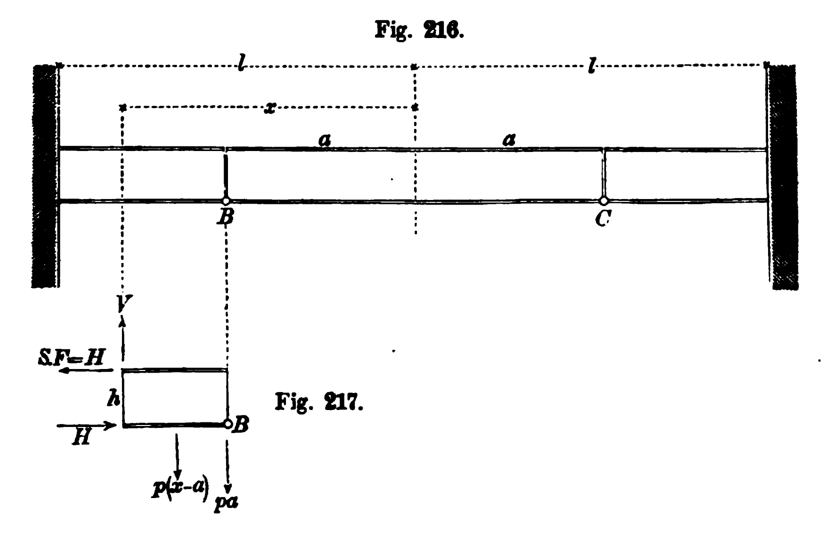


Fig. 217.

den Biegungsspannungen nicht theilnehmend nur Abscheerungswiderstände zu leisten hätte, die Grösse haben:

$$5)\quad \varphi = \frac{V}{S} = \frac{px}{S},$$

und zu der Blechwand des Stückes AB würde in diesem Falle die Materialmenge erforderlich sein:

$$6)\quad M_2 = \int_a^l \varphi\, dx = \int_a^l \frac{px}{S}\, dx = \frac{p(l^2 - a^2)}{2S}.$$

Die zu dem ganzen Stücke AB **wirklich** erforderliche Materialmenge hat also die Grösse:

$$7)\quad M = M_1 + kM_2 = \frac{p(l^3 - 3la^2 + 2a^3)}{3Sh} + \frac{kp(l^2 - a^2)}{2S}.$$

In dieser Gleichung hat man $p + q$ statt p zu setzen, wenn ausser der permanenten Belastung p noch die mobile Belastung q zu berücksichtigen ist. Für diesen Fall wird also:

$$8)\quad M = \left(\frac{p+q}{S}\right)\left\{\frac{l^3 - 3la^2 + 2a^3}{3h} + k\left(\frac{l^2 - a^2}{2}\right)\right\}.$$

Die zu dem Mittelstücke BC erforderliche Materialmenge hat nach § 39 die Grösse:

$$9)\quad J = \frac{4(p+q)a^3}{3Sh} + \frac{ka^2}{S}\left(p + \frac{7}{6}q\right).$$

Für die Materialmenge, welche zu dem ganzen Träger AD erforderlich sein würde, erhält man hiernach die Gleichung:

$$10)\quad 2M + J = \frac{2(p+q)}{3Sh}\left\{l^3 - 3la^2 + 4a^3\right\} + \frac{k}{S}\left\{pl^2 + q\left(l^2 + \frac{a^2}{6}\right)\right\}.$$

Wenn z. B. $\frac{a}{l} = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, so kann man dieser Gleichung, indem man zugleich $l = \frac{1}{2}L$ und $\frac{L}{h} = n$ setzt, auch die folgende Form geben:

$$11)\quad 2M + J = \frac{L^2}{96S}\left\{(6n + 24k)p + (6n + 25k)q\right\}.$$

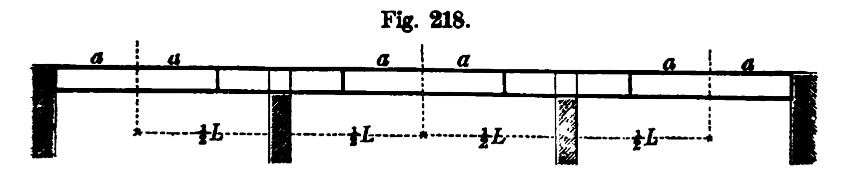
Wenn man ferner — wie bei dem in § 39 berechneten Zahlenbeispiele — wieder $n = 10$ und $k = 2$ setzt, so erhält man den Werth:

$$12)\quad 2M + J = \frac{L^2}{48S}\left\{54p + 55q\right\}.$$

Die Vergleichung desselben mit dem in § 39 (Gleichung 19) gefundenen Werthe zeigt, dass die erforderliche Materialmenge bei gleichem Höhenverhältniss etwa die Hälfte von derjenigen Materialmenge beträgt, welche für den an beiden Enden frei aufliegenden Träger erforderlich sein würde.

Für die ganze Materialmenge, welche zu den drei zwischen den Pfeilern liegenden Abtheilungen des in Fig. 218 dargestellten

Fig. 218.



Brückenträgers über drei Oeffnungen erforderlich ist, ergiebt sich hiernach der Werth:

$$13)\quad 4M + 3J = \frac{L^2}{48S}(124p + 127q).$$

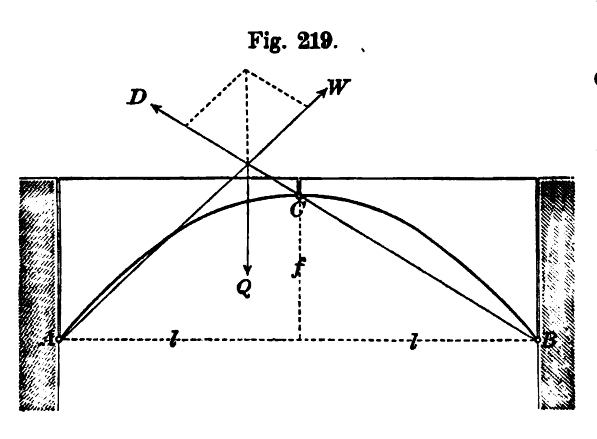
§ 47.
Bogenbrücke mit Scharnier.

Bei dem in Fig. 204 dargestellten parabolischen Träger würde — wie in § 40 erklärt wurde — die Blech- oder Gitter-Wand zwischen den beiden Gurtungen ganz überflüssig sein, so lange die Belastung gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilt ist. Denkt man sich die untere horizontale Gurtung ebenfalls hinweggenommen, so erkennt man, dass die horizontalen Zugkräfte, welche vorher von derselben auf die beiden Enden des Bogens übertragen wurden, in diesem Falle ersetzt werden durch die horizontalen Gegendrücke der festen Unterstützungspunkte. Der Bogen ist nunmehr zu betrachten als eine an beiden Endpunkten unterstützte parabolische Kette, welche unter Einwirkung der gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilten Belastung in ihrer labilen Gleichgewichtslage sich befindet.

Bei ungleichförmiger Lastvertheilung würde die Kette eine Formänderung erleiden, und wenn eine solche verhindert werden soll, so muss die Kette auf irgend eine Weise abgesteift werden. Diesen Zweck kann man dadurch erreichen, dass man die hori-

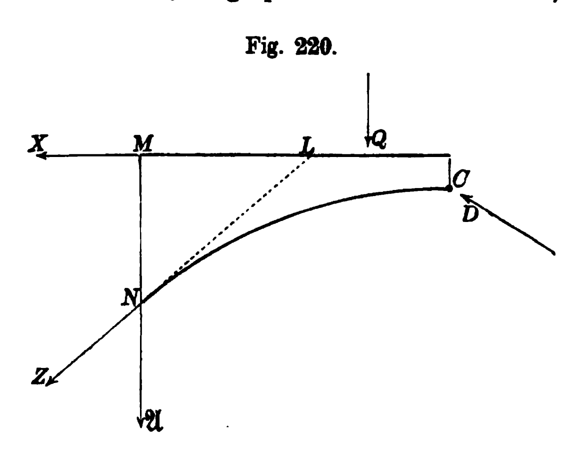
zontale Gurtung über dem Bogen anbringt und mit demselben durch eine Blech- oder Gitter-Wand verbindet. Denkt man sich alsdann durch die Mitte einen Verticalschnitt gelegt und die beiden getrennten Hälften durch ein Scharnier wieder verbunden, so erhält man die in Fig. 219 dargestellte Bogenbrücke, bei welcher die von einem Einzelgewichte Q hervorgerufenen Gegendrücke der Unterstützungspunkte durch die in der Figur angedeutete Construction des Kräfteparallelogramms ermittelt werden können.

Fig. 219.



Die drei Constructionstheile, aus denen das Ganze zusammengesetzt ist, nämlich: erstens die obere horizontale Gurtung, zweitens die untere bogenförmige Gurtung, und drittens die zwischen beiden befindliche Blech- oder Gitter-Wand werden durch das Gewicht Q in gespannten Zustand versetzt, und die drei Spannungen, welche in einem bestimmten Verticalschnitte durch das Gewicht Q hervorgebracht werden, können mit Hülfe der in § 42 erklärten Methode der statischen Momente berechnet werden. Zu diesem Zwecke hat man für den zwischen dem Verticalschnitte und dem Scharniere befindlichen Theil dreimal die Gleichung der statischen Momente

Fig. 220.



aufzustellen, indem man bei Berechnung einer jeden von den drei Spannungen den jedesmaligen Durchschnittspunkt der zwei anderen als Drehpunkt wählt. Nach Fig. 220 würde also bei der Berechnung von X der Punkt N, bei der Berechnung von Z der Punkt M, bei der Berechnung von $\mathfrak{A}$ der Punkt L als Drehpunkt zu wählen sein.

Fig. 221.

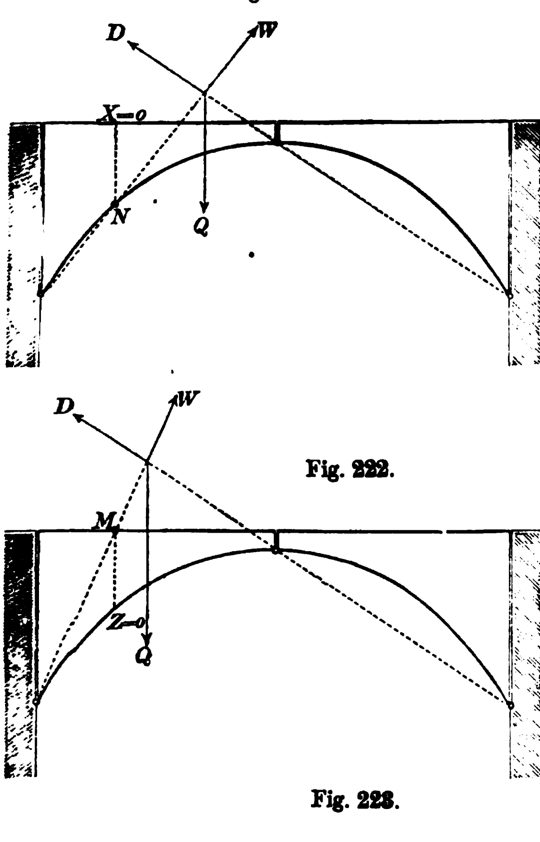
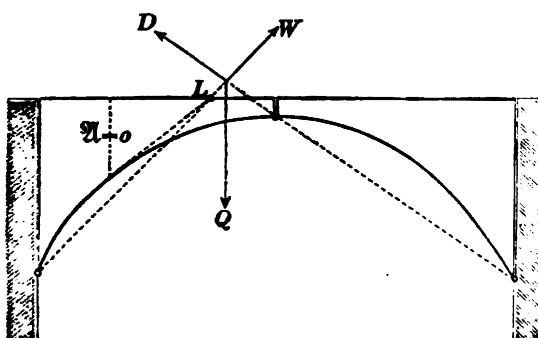


Fig. 222.

Fig. 223.



Denkt man sich zugleich die beiden Kräfte Q und D durch ihre Mittelkraft $R = W$ ersetzt, so überzeugt man sich leicht, dass die betreffende Spannung allemal dann gleich Null wird, wenn die Richtungslinie dieser Mittelkraft R durch den betreffenden Drehpunkt selbst hindurchgeht. Es ergeben sich hieraus die in Fig. 221, Fig. 222, Fig. 223 dargestellten Lagen, welche der Belastungspunkt haben muss, wenn resp. $X = 0$ oder $Z = 0$ oder $\mathfrak{A} = 0$ werden soll.

§ 48.

Berechnung der oberen horizontalen Gurtung.

Die Verticale des Punktes O, durch welchen die Richtungslinie des Gewichts Q hindurchgehen muss, wenn die Spannung X gleich Null werden soll, zerlegt die ganze Spannweite in zwei Abtheilungen, welche mit den Ueberschriften „Plus" und „Minus" bezeichnet werden können, insofern alle Belastungen der einen Abtheilung positive, alle Belastungen der anderen Abtheilung dagegen negative Beiträge zu der Grösse X liefern würden (Fig. 224). Die Spannung X wird ein Maximum, wenn die mit „Plus" bezeichnete Strecke allein belastet ist, und ein Minimum, wenn die mit „Minus" bezeichnete Strecke allein belastet ist.

Fig. 224.

Für die Lage des Punktes O erhält man aus Fig. 224, indem man die Linie OP das eine Mal als Seite des Dreiecks APO, das andere Mal als Seite des Dreiecks BPO berechnet und die beiden Werthe alsdann einander gleich setzt, die Gleichung:

$$1)\quad (l-u)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = (l+u)\,\mathrm{tg}\,\omega, \quad \text{oder:}\ \frac{u}{l} = \frac{\mathrm{tg}\,\varepsilon - \mathrm{tg}\,\omega}{\mathrm{tg}\,\varepsilon + \mathrm{tg}\,\omega}.$$

Die Grössen $\mathrm{tg}\,\omega$ und $\mathrm{tg}\,\varepsilon$ sind nach Fig. 224 zu berechnen aus den Gleichungen:

$$2)\quad \mathrm{tg}\,\omega = \frac{f}{l}, \qquad 3)\quad \mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{f-y}{l-x}.$$

In letzterer Gleichung hat man für y den aus der Parabel-Gleichung:

$$4)\quad \frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}$$

zu entnehmenden Werth einzusetzen. Man erhält dann für $\mathrm{tg}\,\varepsilon$ die Gleichung:

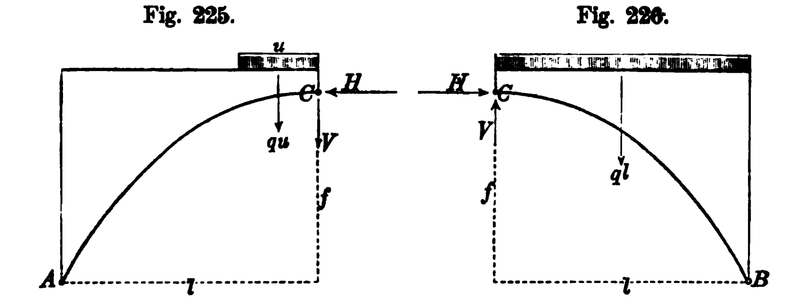
$$5)\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{f(l^2 - x^2)}{l^2(l - x)}, \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{f(l + x)}{l^2}.$$

Wenn man für die Grössen tg ε und tg ω die obigen Werthe in Gleichung 1) substituirt, so nimmt dieselbe die Form an:

$$6)\quad \frac{u}{l} = \frac{x}{2l + x}.$$

Um den Druck zu berechnen, welcher im Scharnierpunkte C durch die Belastung der Plus-Abtheilung hervorgebracht wird, hat man nach Fig. 225 und Fig. 226 für jede der beiden Hälften die

Fig. 225. Fig. 226.



Gleichung der statischen Momente aufzustellen und den festen Unterstützungspunkt dabei als Drehpunkt zu wählen; man erhält dann die Gleichungen:

$$7)\quad Hf - Vl = qu\left(l - \frac{1}{2}u\right),$$

$$8)\quad Hf + Vl = \frac{1}{2}ql^2.$$

Hieraus ergeben sich für die beiden Seitenkräfte jenes Druckes die Werthe:

$$9)\quad H = \frac{ql^2}{4f}\left(1 + 2\frac{u}{l} - \frac{u^2}{l^2}\right),$$

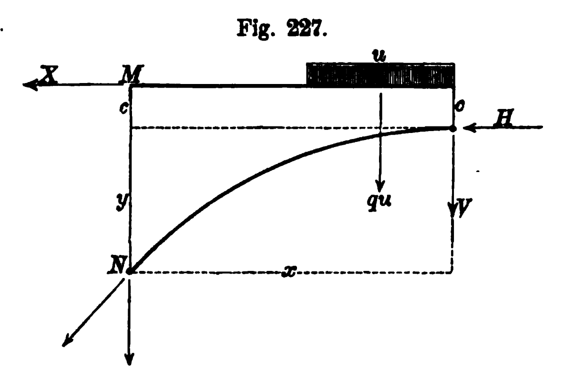
$$10)\quad V = \frac{ql}{4}\left(1 - \frac{u}{l}\right)^2.$$

Die Spannung X, welche bei diesem Belastungszustande an der Stelle M hervorgebracht wird, kann man nunmehr nach Fig. 227 berechnen aus der Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt N:

$$11)\quad X(c + y) = qu\left(x - \frac{1}{2}u\right) - Hy + Vx.$$

Wenn z. B. die Werthe $l = 20^m$, $f = 5^m$, $c = 0^m,5$, $q = 2000$ Kil. gegeben sind und $x = 10^m$ gesetzt wird, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen die Werthe:

Fig. 227.



$y = 1^m,25,$
$u = 4^m,$
$H = 54\,400$ Kil.,
$V = 6400$ Kil.

und nach Substitution derselben erhält man aus Gleichung 11) für X den Werth:

$$X = +\ 34\,200 \text{ Kil.}$$

Da bei voller Belastung $X = 0$ ist, so muss der absolute Werth von $X_{(min)}$ ebenso gross sein wie $X_{(max)}$; also ist:

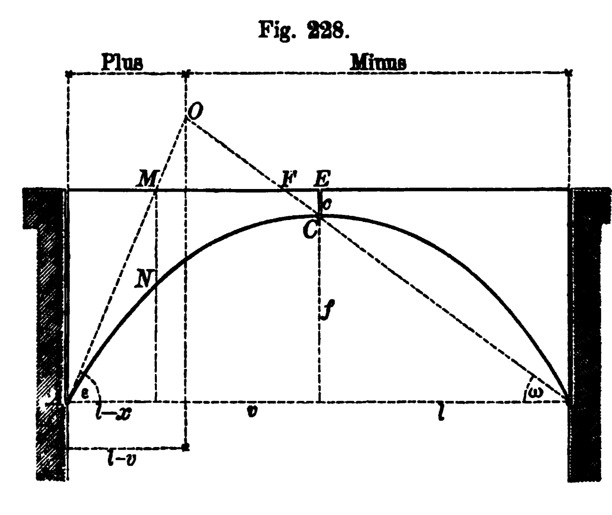
$$X\begin{Bmatrix}\text{max}\\\text{min}\end{Bmatrix} = \pm\ 34\,200 \text{ Kil.}$$

§ 49.

Spannungen im Bogen.

Die Belastungszustände, bei welchen die Spannung Z ein Maximum oder Minimum wird, sind in Fig. 228 durch die Ueberschriften Plus und Minus angedeutet. Die durch den Punkt O gelegte Verticale bildet die Belastungsgrenze, und die Lage derselben ist wie im vorigen Paragraphen zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 228.



$$1)\quad (l - v)\,\text{tg}\,\varepsilon = (l + v)\,\text{tg}\,\omega, \quad \text{oder:}\quad \frac{v}{l} = \frac{\text{tg}\,\varepsilon - \text{tg}\,\omega}{\text{tg}\,\varepsilon + \text{tg}\,\omega}.$$

In dieser Gleichung sind für die Grössen $\operatorname{tg}\varepsilon$ und $\operatorname{tg}\omega$ resp. die aus Fig. 228 zu entnehmenden Werthe zu setzen:

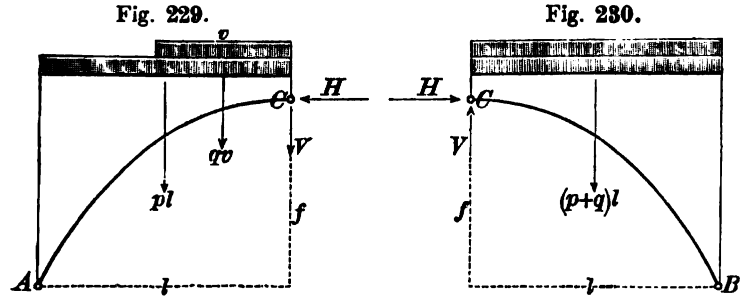
$$2)\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{c+f}{l-x}, \qquad 3)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{f}{l},$$

und nach Substitution derselben erhält man für das Verhältniss $\frac{v}{l}$ den Werth:

$$4)\quad \frac{v}{l} = \frac{cl + fx}{(c+2f)\,l - fx}.$$

Den Druck, welcher in dem Scharnierpunkte C stattfindet, wenn die mit „Minus" bezeichnete Abtheilung allein belastet ist, kann

Fig. 229. Fig. 230.



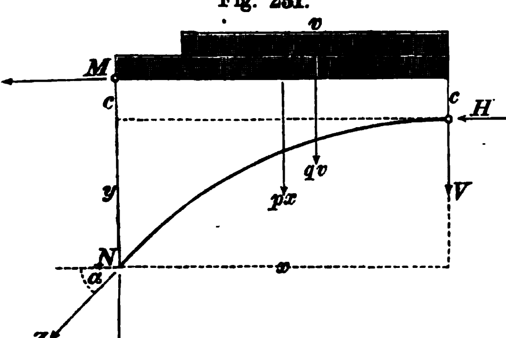
man nach Fig. 229 und Fig. 230 berechnen aus den Gleichungen:

$$5)\quad Hf - Vl = \frac{1}{2}pl^2 + qv\left(l - \frac{1}{2}v\right),$$

$$6)\quad Hf + Vl = \frac{1}{2}(p+q)\,l^2,$$

aus welchen man für die beiden Seitenkräfte jenes Druckes die Werthe erhält:

Fig. 231.



$$7)\quad H = \frac{pl^2}{2f} + \frac{ql^2}{4f}\left(1 + 2\frac{v}{l} - \frac{v^2}{l^2}\right),$$

$$8)\quad V = \frac{ql}{4}\left(1 - \frac{v}{l}\right)^2.$$

Um die Spannung Z zu berechnen, welche bei diesem Belastungszustande an der Stelle N des Bogens stattfindet, hat man für den in Fig. 231 dargestellten Theil die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt M:

$$9)\quad Z\cos\alpha\,.\,(c+y) = -\frac{1}{2}px^2 - qv\left(x-\frac{1}{2}v\right) - Hc - Vx$$

aufzustellen und die darin vorkommende Grösse $\cos\alpha$ zu berechnen aus den Gleichungen:

$$10)\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}}, \qquad 11)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{2fx}{l^2}.$$

Wenn die permanente Belastung $p = 1200$ Kil. pro Meter gesetzt wird, und ausserdem wieder die im vorigen Paragraphen angenommenen Zahlenwerthe: $q = 2000$ Kil., $l = 20^m$, $f = 5^m$, $c = 0^m,5$ substituirt werden, so erhält man für $x = 10^m$ die Werthe:

$y = 1^m,25$, $v = 7^m,5$, $H = 112\,375$ Kil., $V = 3\,906$ Kil., $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = 0,97$, und mit Benutzung derselben erhält man aus Gleichung 9) für das Minimum von Z den Werth:

$$Z_{(min)} = -146\,700 \text{ Kil.}$$

Um das Maximum von Z zu berechnen, würde man die Plus-Abtheilung allein belastet anzunehmen und im Uebrigen auf analoge Weise zu verfahren haben. Man findet alsdann:

$$Z_{(max)} = -34\,800 \text{ Kil.}$$

und überzeugt sich auf diese Weise, dass die Berechnung der Grösse $Z_{(max)}$ überflüssig war, insofern bei der Bestimmung der an dieser Stelle erforderlichen Querschnittsfläche des Bogens die Zahl $Z_{(min)}$ den Ausschlag geben wird.

Denkt man sich den Verticalschnitt MN durch den Punkt F hindurchgelegt (Fig. 228), so erkennt man, dass in diesem Falle die drei Punkte O, M, F in dem Punkte F zusammentreffen würden. Für diesen Fall wird $x = \frac{c}{\operatorname{tg}\omega} = \frac{cl}{f}$, und diesem Werthe entspricht nach Gleichung 4) der Werth $v = \frac{cl}{f} = x$. Wenn x kleiner ist als $\frac{cl}{f}$, d. h. wenn der Verticalschnitt zwischen den beiden Punkten F und E hindurchgeht, so giebt es keinen Nullpunkt mehr, d. h. keine Stelle, welche als Belastungspunkt gewählt den Werth $Z = 0$ ergeben würde. In diesem Falle tritt also die stärkste Spannung des Bogens bei voller Belastung ein. Es ist daher die betreffende Abtheilung des Bogens wie eine parabolische Kette mit gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung zu berechnen. So z. B. würde für den Scheitelpunkt selbst die grösste Druckspannung des Bogens zu berechnen sein aus der Gleichung:

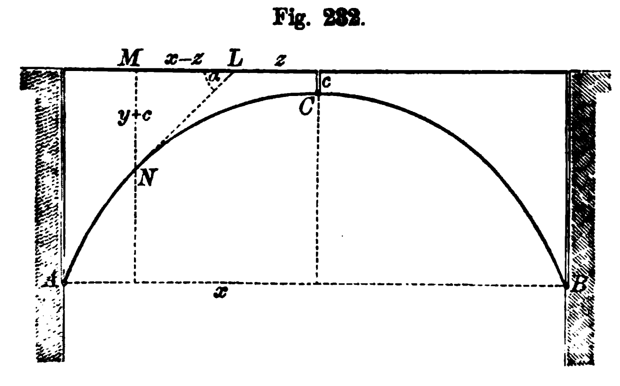
$$12)\quad H_{(max)} = \frac{(p+q)\,l^2}{2f} = 128\,000 \text{ Kil.}$$

§ 50.

Berechnung der Blech- oder Gitter-Wand.

Die Lage des Punktes L, welcher bei der Berechnung der verticalen Abscheerungskraft $\mathfrak{A}$ als Drehpunkt zu wählen ist, kann nach Fig. 232 berechnet werden aus der Gleichung:

Fig. 232.



1) $x - z = \frac{y + c}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Wenn man hierin die aus der Parabel-Gleichung und deren Differenzial-Gleichung:

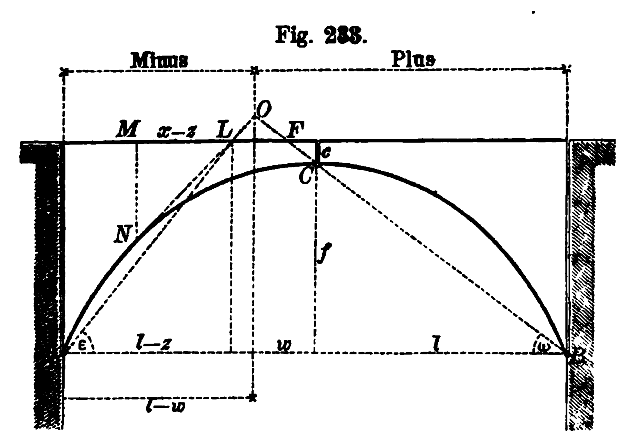
2) $\frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}$, 3) $\frac{dy}{dx} = \frac{2fx}{l^2} = \operatorname{tg} \alpha$

resp. für die Grössen y und $\operatorname{tg} \alpha$ zu entnehmenden Werthe substituirt, so nimmt die obige Gleichung für z aufgelöst die Form an:

4) $z = \frac{fx^2 - cl^2}{2fx}$.

Die Belastungszustände, bei welchen die Kraft $\mathfrak{A}$ ein Maximum oder Minimum wird, sind in Fig. 233 durch die Ueberschriften „Plus" und „Minus" angedeutet. Die Verticale des Durchschnittspunktes O bildet die Belastungsgrenze, und die Lage derselben ist wie in den vorigen beiden Paragraphen zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 233.



$$5)\quad (l - w)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = (l + w)\,\mathrm{tg}\,\omega, \quad \text{oder:}\quad \frac{w}{l} = \frac{\mathrm{tg}\,\varepsilon - \mathrm{tg}\,\omega}{\mathrm{tg}\,\varepsilon + \mathrm{tg}\,\omega}.$$

In dieser Gleichung sind für die Grössen tg ε und tg ω resp. die Werthe zu setzen:

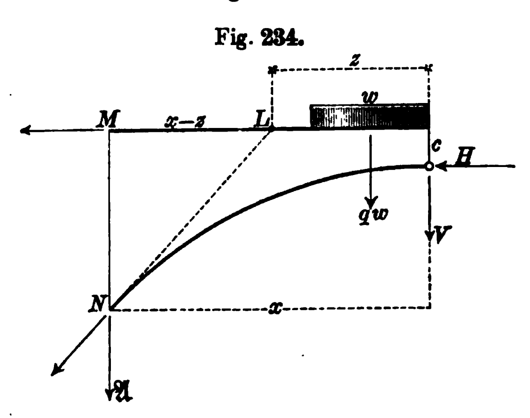
$$6)\quad \mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{c + f}{l - z}, \qquad 7)\quad \mathrm{tg}\,\omega = \frac{f}{l},$$

worauf dieselbe nach Substitution des oben für z gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$8)\quad \frac{w}{l} = \frac{f x^2 - c l (l - 2x)}{f x (4l - x) + c l (l + 2x)}.$$

Da bei gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung keine Abscheerungsspannung in der Blech- oder Gitter-Wand stattfindet, so darf die permanente Belastung bei der Berechnung der Grösse $\mathfrak{A}$ unberücksichtigt gelassen werden. Um das Maximum von $\mathfrak{A}$ zu berechnen, hat man die mit „Plus“ bezeichnete Abtheilung allein belastet anzunehmen und die beiden Seitenkräfte des durch diese Belastung im Scharnierpunkte hervorgebrachten Druckes nach den Gleichungen 9) und 10) des § 48 zu berechnen, indem man darin w statt u setzt. Die bei diesem Belastungszustande stattfindende verticale Abscheerungskraft kann man alsdann nach Fig. 234 berechnen aus der Gleichung:

Fig. 234.



$$9)\quad \mathfrak{A}\,(x - z) = q w \left(z - \frac{1}{2} w\right) + H c + V z.$$

Wenn man mit Beibehaltung der in den vorigen beiden Paragraphen angenommenen Zahlenwerthe: $l = 20^{\mathrm{m}}$, $f = 5^{\mathrm{m}}$, $c = 0^{\mathrm{m}},5$, $q = 2000$ Kil. wiederum $x = 10^{\mathrm{m}}$ setzt, so wird:

$$z = 3^{\mathrm{m}},\quad w = 2^{\mathrm{m}},564,\quad H = 49\,600 \text{ Kil.},\quad V = 7\,600 \text{ Kil.},$$

und man erhält aus Gleichung 9) für das Maximum von $\mathfrak{A}$ den Werth:

$$\mathfrak{A}_{(max)} = + 8060 \text{ Kil.}$$

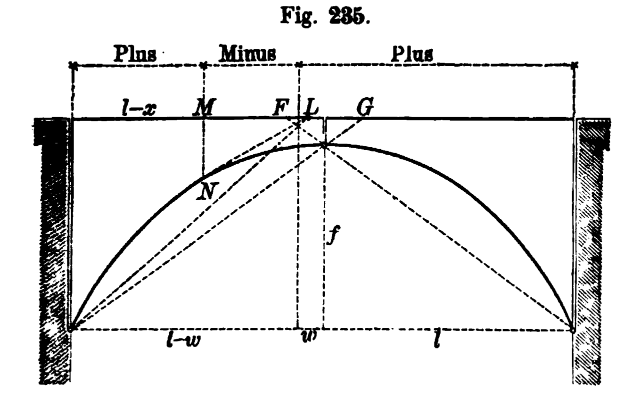
Ebenso gross ist auch der absolute Werth von $\mathfrak{A}_{(min)}$; denn bei voller Belastung ist $\mathfrak{A} = 0$, folglich auch $\mathfrak{A}_{(max)} + \mathfrak{A}_{(min)} = 0$.

Denkt man sich in Fig. 233 den Verticalschnitt MN so gelegt, dass der Drehpunkt L mit dem Punkte F zusammenfällt, so erkennt man, dass in diesem Falle auch der Punkt O mit dem Punkte F zusammentrifft. Diesem Falle entspricht der Werth $z = \frac{cl}{f}$, und nach Substitution desselben erhält man aus Gleichung 4) für x den zugehörigen Werth:

$$10) \quad x = \frac{cl}{f}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{f}{c}}\right\} = 8^m{,}633.$$

Wenn ein anderes Mal der Verticalschnitt eine solche Lage hat, dass der Drehpunkt L mit dem Punkte G zusammenfällt (Fig. 235), so wird $w = 0$, und diesem Falle entspricht nach Gleichung 8) der Werth:

Fig. 235.



$$11) \quad x = \frac{cl}{f}\left\{-1 + \sqrt{1 + \frac{f}{c}}\right\} = 4^m{,}633.$$

Wenn x zwischen diesen beiden Grenzwerthen liegt, d. h. wenn der Verticalschnitt MN eine solche Lage hat, dass der Drehpunkt L zwischen die beiden Punkte F und G fällt, so ist die Berechnung nach Fig. 235 auszuführen, in welcher wiederum durch die Ueberschriften „Plus" und „Minus" die Belastungszustände für $\mathfrak{A}_{(max)}$ und $\mathfrak{A}_{(min)}$ angedeutet sind.

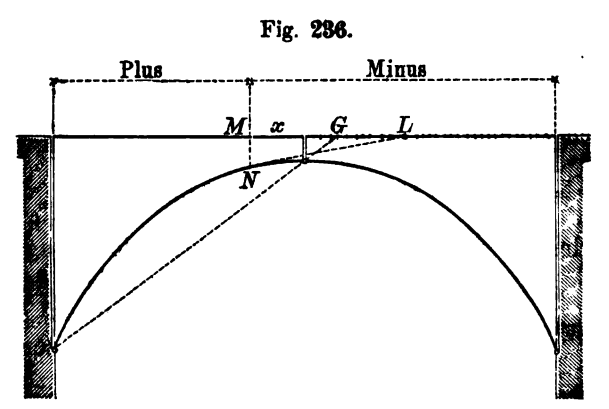
So würde man z. B. für den Fall: $x = 8^m$, welchem nach Gleichung 4) und Gleichung 8) die Werthe $z = 1^m{,}5$ und $w = 1^m{,}7284$ entsprechen, indem man im Uebrigen die oben erklärte Berechnungsmethode wiederum anwendet, den Werth finden:

$$\mathfrak{A}\left\{\begin{matrix}max\\min\end{matrix}\right\} = \pm\, 6127 \text{ Kil.}$$

Wenn endlich der Verticalschnitt MN eine solche Lage hat, dass der Drehpunkt L in die Strecke rechts von dem Punkte G fällt, d. h. wenn x noch kleiner ist als der untere von den beiden

obigen Grenzwerthen, so bildet der Verticalschnitt selbst die Belastungsgrenze, und die Berechnung ist für diesen Fall nach Fig. 236 auszuführen, in welcher wiederum durch die Ueberschriften „Plus" und „Minus" die Belastungszustände für $\mathfrak{A}_{(max)}$ und $\mathfrak{A}_{(min)}$ angedeutet sind.

Fig. 236.



So z. B. erhält man für den Werth $x = 4^m$, welchem nach Gleichung 4) der Werth $z = -3^m$ entspricht, indem man im Uebrigen die oben erklärte Berechnungsmethode wiederum anwendet, den Werth:

$$\mathfrak{A}\begin{Bmatrix} max \\ min \end{Bmatrix} = \pm 4571 \text{ Kil.}$$

§ 51.

Hängebrücke mit Scharnier.

Wenn man die in den vorigen drei Paragraphen gefundenen Spannungszahlen sämmtlich mit „Minus Eins" multiplicirte, so würden dieselben für die umgekehrte (hängende) Lage der Brücke gelten. Die mittlere Abtheilung der in Fig. 237 dargestellten

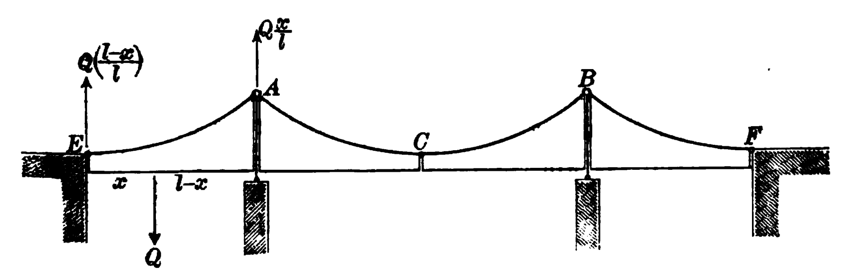
Fig. 237.

Hängebrücke kann daher auf dieselbe Weise wie Fig. 219 berechnet werden, und es bleibt nur noch übrig, für eine von den beiden Seiten-Abtheilungen AE oder BF die Berechnung der drei Span-

nungen X, Z, $\mathfrak{A}$ zu erklären. Bei voller Belastung — sowie überhaupt bei gleichförmig über die Horizontalprojection der ganzen Brücke vertheilter Belastung — befindet sich, wie man leicht erkennt, jede von den beiden Seiten-Abtheilungen genau in demselben Spannungszustande wie eine von den beiden Hälften der Mittel-Abtheilung. Es darf daher bei der Berechnung der in den vorigen Paragraphen mit X und $\mathfrak{A}$ bezeichneten Spannungen die permanente Belastung auch hier unberücksichtigt gelassen werden.

Die Art und Weise, wie das an irgend einer Stelle der mittleren Abtheilung aufgehängte Einzelgewicht Q durch die Widerstände der vier Aufhängepunkte E, A, B, F aufgehoben wird kann man sich durch die in Fig. 237 angedeutete Construction veranschaulichen. Da von den beiden Aufhängepunkten A und B stets nur verticale Gegendrücke auf die Brücke übertragen werden können, so haben die horizontalen Seitenkräfte der vier Widerstände R, W, W_1, R_1 sämmtlich dieselbe Grösse, und diese Horizontalkraft kann auf dieselbe Weise berechnet werden wie bei der Bogenbrücke Fig. 219 die horizontale Seitenkraft des in dem Scharnierpunkte C hervorgebrachten Druckes. Eine Belastung der Seiten-Abtheilung AE erzeugt an den beiden Unterstützungspunkten A und E verticale Gegendrücke, welche auf dieselbe

Fig. 238.



Weise zu berechnen sind wie bei einem (an beiden Enden frei aufliegenden) Balken auf zwei Stützen (Fig. 238).

Wenn man auf solche Weise zuvor die äusseren Kraftwirkungen ermittelt hat, welche bei einer bestimmten Lage der Belastung Q auf die Abtheilung AE übertragen werden, so kann man nachher die in den drei Constructionstheilen derselben hervorgebrachten inneren Spannungen X, Z, $\mathfrak{A}$ wiederum mittelst der Methode der statischen Momente berechnen. Indem man sich den Belastungspunkt allmählich von F bis E fortrückend und für jede

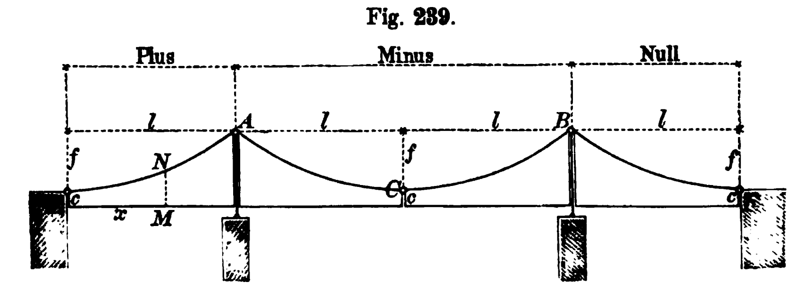
Lage desselben jene Berechnung wiederholt denkt, findet man auf ähnliche Weise wie bei der in den vorigen Paragraphen berechneten Bogenbrücke diejenigen Belastungszustände, bei welchen die betreffende Spannung ein Maximum oder Minimum wird, worauf dann die Berechnung der Spannungszahlen selbst auf die in den folgenden Paragraphen erklärte Weise ausgeführt werden kann.

§ 52.

Berechnung der horizontalen Gurtung.

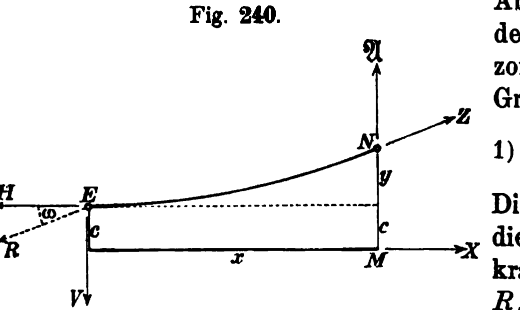
Für die Belastungen und Dimensionen sind die in § 48 angenommenen Zahlenwerthe beibehalten. Die Belastungszustände, bei welchen die Spannung X resp. ein Maximum oder Minimum wird, sind in Fig. 239 durch die Ueberschriften „Plus“ und

Fig. 239.



„Minus“ angedeutet. Die Ueberschrift Null über der Abtheilung BF bedeutet, dass die Belastungen dieser Abtheilung gar keinen Beitrag zu der Spannung X liefern. Bei Belastung der „Minus“-Abtheilung entsteht in der Kette eine Horizontalspannung von der Grösse:

Fig. 240.



$$1)\ H = \frac{q\,l^2}{2f} = 80\,000\,\text{Kil.}$$

Dieselbe Grösse hat auch die horizontale Seitenkraft des Widerstandes R, welcher bei diesem Belastungszustande von dem festen Punkte E auf die Brücke übertragen wird. Nach Fig. 240 hat also die verticale Seitenkraft dieses Widerstandes die Grösse:

$$2)\quad V = H \operatorname{tg} \omega = 80\,000 \cdot \frac{1}{4} = 20\,000 \text{ Kil.}$$

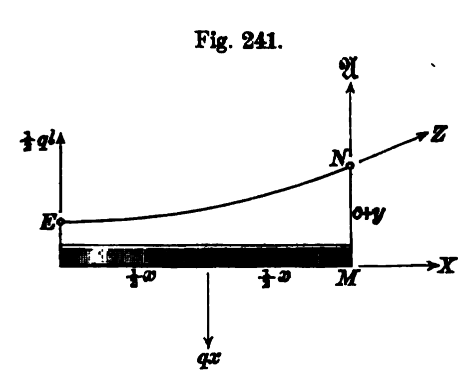
Das Minimum von X ist nunmehr nach Fig. **240** zu berechnen aus der Gleichung:

$$3)\quad X.(c + y) = Hy - Vx,$$

in welcher die Werthe $H = 80\,000$, $V = 20\,000$, $c = 0^m,5$ zu substituiren sind. Für $x = 10^m$ ist $y = 1^m,25$ zu setzen, und es wird:

$$X_{(min)} = -57\,143 \text{ Kil.}$$

Fig. 241.



Um das Maximum von X zu berechnen, würde man die „Plus-Abtheilung" allein belastet anzunehmen haben, und für diesen Belastungszustand nach Fig. **241** die Gleichung erhalten:

$$4)\quad X(c + y) = \frac{1}{2} q l x - \frac{1}{2} q x^2,$$

welche nach Substitution der Werthe: $q = 2000$, $l = 20^m$, $c = 0^m,5$, $x = 10^m$, $y = 1^m,25$ für X aufgelöst die Form annimmt:

$$X_{(max)} = +57\,143 \text{ Kil.}$$

Es ergiebt sich also wiederum, dass die Grössen $X_{(max)}$ und $X_{(min)}$ gleiche absolute Werthe haben, dass also bei voller Belastung $X = 0$ wird, und es bestätigt sich die Richtigkeit der im vorigen Paragraphen aufgestellten Behauptung: dass die permanente Belastung keine Spannung in der horizontalen Gurtung hervorbringt.

§ 53.

Spannungen der Kette.

Die Spannung Z kann man sich in die beiden Theile Z_p und Z_q zerlegt denken, von denen ersterer durch die permanente, letzterer durch die mobile Belastung hervorgebracht wird. Die von der permanenten Belastung hervorgebrachte Horizontalspannung der Kette hat die Grösse:

$$1)\quad H_p = \frac{p l^2}{2f} = 48\,000 \text{ Kil.}$$

Die Spannung Z_p ist daher für diejenige Stelle, an welcher

die Kettenrichtung den Winkel α mit der Horizontalen bildet, zu berechnen aus der Gleichung:

$$2)\quad Z_p = \frac{H_p}{\cos\alpha} = H_p\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2},$$

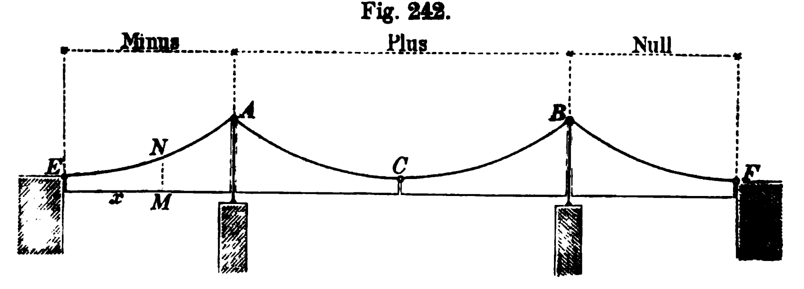
in welcher für die Grösse $\operatorname{tg}\alpha$ der aus Gleichung 12) des § 49 zu entnehmende Werth einzusetzen ist.

So z. B. erhält man für $x = 10^m$ aus jener Gleichung den Werth $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$. An dieser Stelle ist also:

$$3)\quad Z_p = 48\,000\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 49\,478 \text{ Kil.}$$

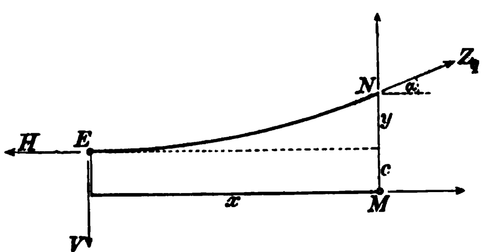
Die Belastungszustände, bei welchen die Grösse Z_q resp. ein

Fig. 242.



Maximum und ein Minimum wird, sind in Fig. 242 durch die Ueberschriften „Plus“ und „Minus“ angedeutet. Für das Maximum von Z_q erhält man nach Fig. 243 die Gleichung:

Fig. 243.



$$4)\quad Z_q \cos\alpha\,(y+c) = Hc + Vx,$$

in welcher für die Kräfte H und V wiederum die in den Gleichungen 1) und 2) des vorigen Paragraphen angegebenen Werthe zu substituiren sind. Für das Minimum von Z_q erhält man nach Fig. 244 die Gleichung:

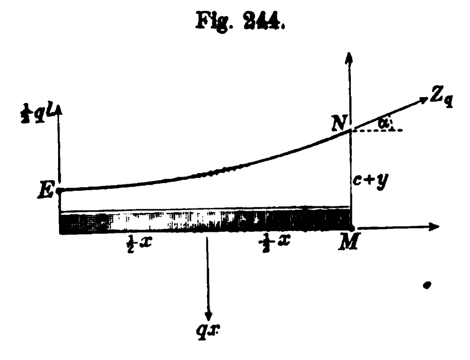
$$5)\quad Z_q \cos\alpha\,(y+c) = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qlx.$$

Für $x = 10^m$ und $y = 1^m,25$ ist wieder $\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}$ zu setzen, und es ergeben sich aus den letzteren beiden Gleichungen die Werthe:

$$Z_{q\,(max)} = +\,141\,368 \text{ Kil.},\quad Z_{q\,(min)} = -\,58\,903 \text{ Kil.}$$

Mit Benutzung des in Gleichung 3) für Z_p gefundenen Werthes erhält man nunmehr für das Maximum und das Minimum der Spannung Z selbst die Werthe:

Fig. 244.



$$Z_{(max)} = + 49\,478 + 141\,368$$
$$= + 190\,846 \text{ Kil.}$$
$$Z_{(min)} = + 49\,478 - 58\,903$$
$$= - 9425 \text{ Kil.}$$

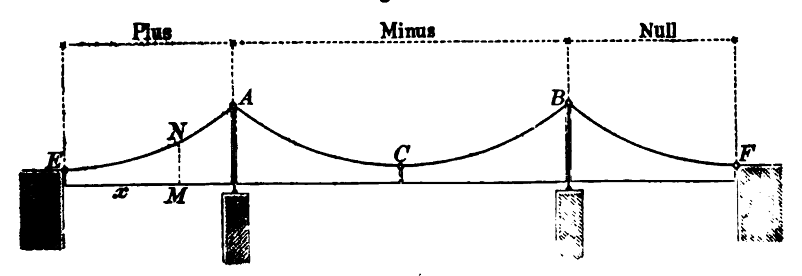
Bei der Bestimmung des Querschnitts der Kette würde man also Rücksicht darauf zu nehmen haben, dass in derselben gelegentlich auch Druckspannungen stattfinden können.

§ 54.

Berechnung der Blech- oder Gitter-Wand.

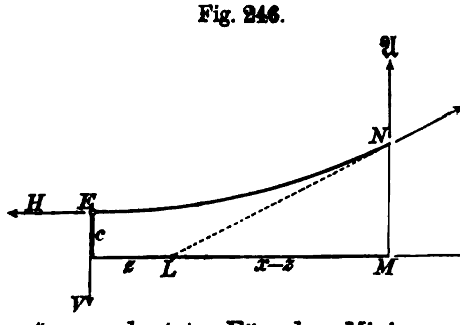
Bei Berechnung der verticalen Abscheerungsspannung $\mathfrak{A}$ darf wiederum die permanente Belastung unberücksichtigt gelassen

Fig. 245.



werden, insofern eine gleichförmig über die Horizontalprojection der ganzen Brücke vertheilte Belastung ausschliesslich in der Kette Spannungen hervorbringt. Die Belastungszustände, bei welchen die Spannung $\mathfrak{A}$ ein Maximum oder Minimum wird, sind in Fig. 245 durch die Ueberschriften „Plus" und „Minus" angedeutet. Für das Minimum von $\mathfrak{A}$ erhält man nach Fig. 246 die Gleichung:

Fig. 246.



$$1)\quad \mathfrak{A}(x - z) = - Hc - Vz,$$

in welcher für H und V wieder die in den Gleichungen 1) und 2) des § 52 angegebenen Werthe zu substituiren sind.

Für $x = 10^{m}$ ist $z = 3^{m}$ zu setzen (nach § 50, Gleichung 4), und man erhält aus obiger Gleichung den Werth:

Fig. 247.

$$\mathfrak{A}_{(min)} = - 14\,286 \text{ Kil.}$$

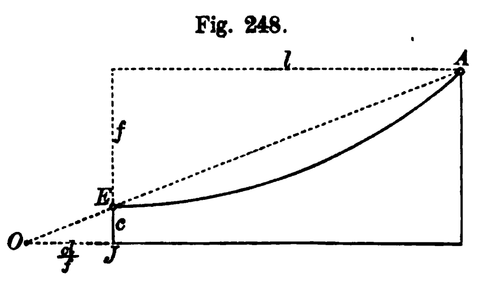
Das Maximum von $\mathfrak{A}$ würde nach Fig. 247 zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$2)\quad \mathfrak{A}(x - z) = \frac{1}{2} qlz + qx\left(\frac{1}{2}x - z\right),\ \text{oder:}$$

$$\mathfrak{A}_{(max)} = + 14\,286 \text{ Kil.}$$

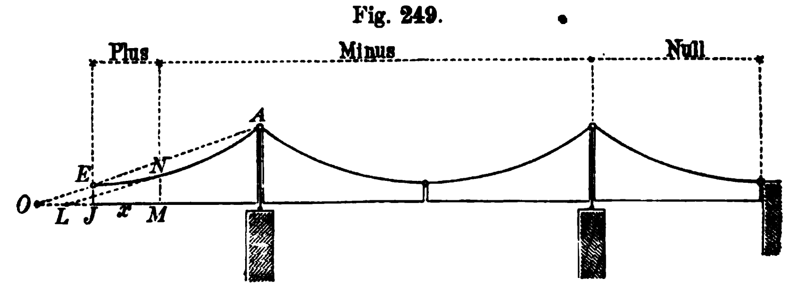
Die obige Berechnungsweise entspricht der Voraussetzung: dass der Drehpunkt L rechts von der Verticalen des Punktes E liegt. Wenn statt dessen der Verticalschnitt MN eine solche Lage hat, dass der Drehpunkt L in die Strecke OJ fällt (Fig. 248), so ist die Berechnung nach Fig. 249 auszuführen, und wenn der Drehpunkt L links von dem Punkte O liegt, so ist die Berechnung nach Fig. 250 auszuführen.

Fig. 248.



Die Grenzfälle sind diejenigen beiden Fälle, in welchen der Drehpunkt L entweder mit dem Punkte J oder mit dem Punkte O

Fig. 249.



selbst zusammenfällt. Dem ersteren entspricht der Werth $z = 0$, oder (nach § 50, Gleichung 4) der Werth:

$$3)\quad x = l\sqrt{\frac{c}{f}} = 6^m,324.$$

Dem letzteren Grenzfalle entspricht der Werth $z = -\frac{cl}{f}$, oder (nach § 50, Gleichung 11) der Werth:

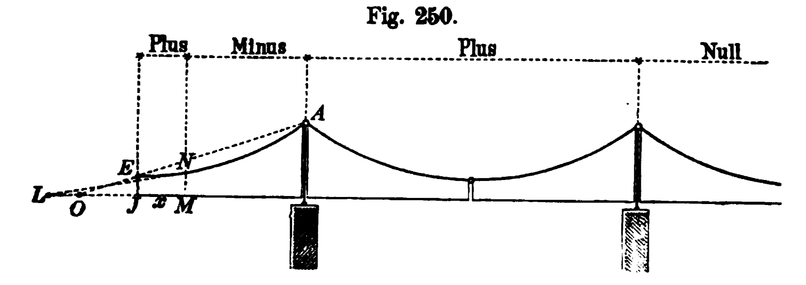
$$4)\quad x = \frac{cl}{f}\left\{-1 + \sqrt{1 + \frac{f}{c}}\right\} = 4^m,633.$$

Es sind also bei der Berechnung von $\mathfrak{A}$ die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

$$x > 6^m,324, \qquad x \begin{matrix} < 6^m,324 \\ > 4^m,633 \end{matrix}, \qquad x < 4^m,633.$$

Für den ersten ist die Berechnung nach Fig. 245, für den zweiten nach Fig. 249, für den dritten nach Fig. 250 auszuführen.

Fig. 250.



So z. B. würde man für den Werth $x = 6^m$, welchem (nach § 50, Gleichung 4) der Werth $z = -\frac{1}{3}^m$ entspricht, indem man die Berechnung von $\mathfrak{A}$ nach Fig. 249 ausführt, den Werth erhalten:

$$\mathfrak{A}\begin{Bmatrix}\max\\\min\end{Bmatrix} = \pm\ 5779 \text{ Kil.}$$

Für $x = 4^m$ wird $z = -3^m$, und man erhält, indem man die Berechnung von $\mathfrak{A}$ nach Fig. 250 ausführt, den Werth:

$$\mathfrak{A}\begin{Bmatrix}\max\\\min\end{Bmatrix} = \pm\ 5486 \text{ Kil.}$$

VIERTER ABSCHNITT.

Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken.

§ 55.

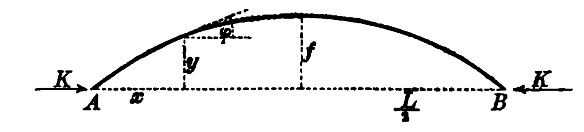
Berechnung der zerknickenden Kraft für eine prismatische Stange mit freien Enden.

Die in § 4 gefundene allgemeine Differenzial-Gleichung der elastischen Linie:

$$1)\quad E\mathfrak{T}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M}$$

darf auch für den in Fig. 251 dargestellten Fall als gültig betrachtet werden, bei welchem der gebogene Stab durch zwei an den beiden Endpunkten desselben in der Richtung ihrer Verbindungslinie wirkende Druckkräfte im Gleichgewichtszustande gehalten wird. In obiger Gleichung bedeutet $\mathfrak{M}$ die Grösse des Biegungsmomentes für denjenigen Punkt der elastischen Linie, dessen Coordinaten x und y sind. Dieses Biegungsmoment ist als eine positive oder negative Grösse in Rechnung zu bringen, je nachdem die Grösse:

Fig. 251.



$$2)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{dx}$$

eine positive oder negative Grösse ist. Da nach Fig. 251 die Grösse tg φ mit wachsendem x abnimmt, so ist dasselbe hier negativ, also:

$$3)\quad \mathfrak{M} = -Ky$$

zu setzen, und man erhält für den vorliegenden Fall die Differenzial-Gleichung:

$$4)\quad E\mathfrak{T}\frac{d^2y}{dx^2} = -Ky.$$

Bei einer prismatischen Stange ist die Grösse $\mathfrak{T}$ als Trägheitsmoment der Querschnittsfläche eine von x unabhägige constante Grösse, und wenn man abkürzungsweise die constante Grösse:

$$5)\quad \sqrt{\frac{K}{E\mathfrak{T}}} = k$$

setzt, so kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$6)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y.$$

Durch zweimalige Integration derselben erhält man alsdann eine Gleichung von der Form:

$$7)\quad y = A\sin kx + B\cos kx,$$

in welcher die beiden Integrations-Constanten A und B auf folgende Weise bestimmt werden können.

Nach Fig. 251 muss für $x = 0$ auch $y = 0$ sein; man erhält also für die Constante B die Gleichung:

$$8)\quad 0 = 0 + B.$$

Wenn ferner mit f die grösste Durchbiegung oder der grösste Werth von y bezeichnet wird: nämlich derjenige Werth, welchen y für $\sin kx = 1$ annimmt, so ist die Constante $A = f$ zu setzen, und man erhält für die elastische Linie die Gleichung:

$$9)\quad y = f\sin(kx).$$

Da in der Theorie der elastischen Linie stets eine geringe Grösse der Durchbiegung vorausgesetzt wird, so darf der Unterschied zwischen der Sehnenlänge $\overline{AB}$ und der Bogenlänge $\widehat{AB} = L$ vernachlässigt werden. Es ist also nach Fig. 251 für $x = L$ ebenfalls $y = 0$ zu setzen; folglich ist $0 = \sin kL$, oder:

$$10)\quad kL = m\pi,$$

in welcher letzteren Gleichung der Buchstabe m irgend eine ganze Zahl bedeutet. Wenn man den aus dieser Gleichung für die Constante k zu entnehmenden Werth in den Gleichungen 5) und 9) substituirt, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$11)\quad K = \frac{m^2\pi^2E\mathfrak{T}}{L^2}, \qquad 12)\quad y = f\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

in welchen die Theorie des vorliegenden Falles enthalten ist.

Die Gleichung 11) giebt an, wie gross die beiden Kräfte K sein müssen, um bei dem willkürlich angenommenen Biegungszustande den Stab im Gleichgewichte zu halten. Sie zeigt zugleich, dass diese Kraftgrösse unabhängig ist von der Grösse der Durchbiegung. Dieselbe Kraftgrösse würde also auch ausreichen, um den Stab so stark zu biegen, dass die Maximalspannung in demselben die Elasticitätsgrenze oder gar die Festigkeitsgrenze überschreitet. Die Gleichung 11) enthält daher den allgemeinen Ausdruck für die Grösse der zerknickenden Kraft.

Um die Bedeutung der Constanten m zu erkennen, hat man für dieselbe der Reihe nach die Zahlenwerthe 1, 2, 3, 4 ... in den obigen beiden Gleichungen zu substituiren und gelangt dabei zu den folgenden Resultaten:

Für $m = 1$ wird $K = \frac{\pi^2 E \mathfrak{T}}{L^2}$ und $y = f \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$,

„ $m = 2$ „ $K = \frac{4\pi^2 E \mathfrak{T}}{L^2}$ „ $y = f \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$,

„ $m = 3$ „ $K = \frac{9\pi^2 E \mathfrak{T}}{L^2}$ „ $y = f \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$,

„ $m = 4$ „ $K = \frac{16\pi^2 E \mathfrak{T}}{L^2}$ „ $y = f \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$,

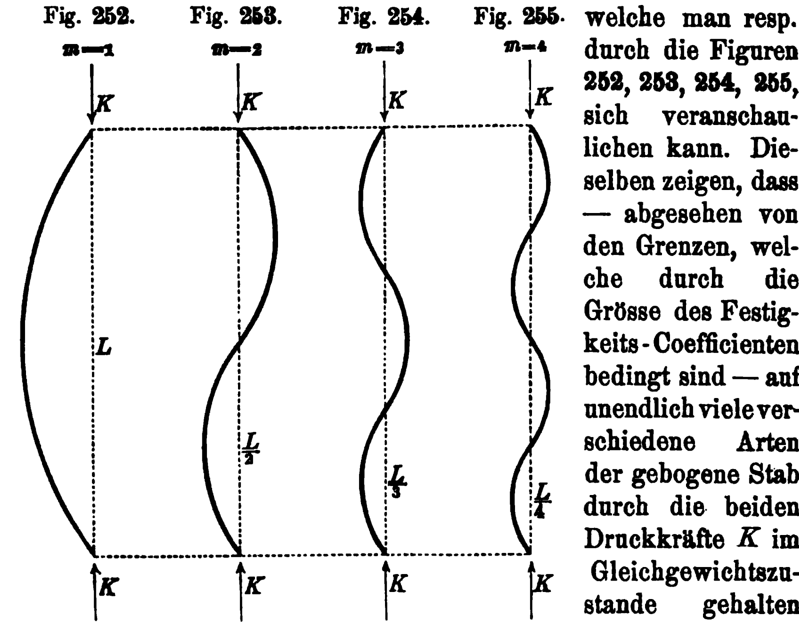


Fig. 252. Fig. 253. Fig. 254. Fig. 255.

welche man resp. durch die Figuren 252, 253, 254, 255, sich veranschaulichen kann. Dieselben zeigen, dass — abgesehen von den Grenzen, welche durch die Grösse des Festigkeits-Coefficienten bedingt sind — auf unendlich viele verschiedene Arten der gebogene Stab durch die beiden Druckkräfte K im Gleichgewichtszustande gehalten

resp. zerknickt werden kann, und jedem dieser verschiedenen Fälle entspricht ein besonderer Werth der Kraft K. Der kleinste Werth der zerknickenden Kraft entspricht dem in Fig. 252 dargestellten Falle. Wenn daher nicht besondere günstige Umstände vorhanden sind, durch welche der Stab veranlasst wird, bei eintretender Biegung eine der in den übrigen Figuren dargestellten Biegungsformen anzunehmen — was z. B. dann der Fall sein würde, wenn einzelne Punkte der elastischen Linie verhindert werden, aus der geraden Verbindungslinie der beiden Endpunkte seitwärts herauszutreten — so wird die Grösse der zerknickenden Kraft zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$13)\quad K = \frac{\pi^2 E\mathfrak{T}}{L^2}.$$

§ 56.

Prismatische Stange mit eingemauerten Enden.

Die am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundene Gleichung zeigt, dass die zerknickende Kraft dem Quadrate der Länge umgekehrt proportional ist. Es würde also z. B. für eine Stange von der Länge $\frac{L}{2}$ die zerknickende Kraft die vierfache Grösse annehmen. Da bei der zweifach gebogenen Stange (Fig. 253) das Biegungsmoment in der Mitte der Stange gleich Null ist, so würde man an dieser Stelle die Stange durchschneiden und an der Schnittstelle ein Scharnier einschalten können, ohne dass die Spannungszustände der Stange dadurch geändert werden. Man kann daher die zweifach gebogene Stange auch betrachten als zusammengesetzt aus zwei durch ein Scharnier verbundenen einfach gebogenen Stangen und demgemäss die zerknickende Kraft für dieselbe ebenfalls nach Gleichung 13) des vorigen Paragraphen berechnen, indem man darin $\frac{1}{2} L$ statt L setzt (Fig. 256). Ebenso kann man die dreifach gebogene Stange (Fig. 254) als aus drei einfach gebogenen Stangen von der Länge $\frac{1}{3} L$ zusammengesetzt betrachten. Bei der in Fig. 257 dargestellten dreifach gebogenen Stange von der Länge l hat also nach Gleichung 13) des vorigen Paragraphen die zerknickende Kraft die Grösse:

Fig. 256.

$$1)\quad K = \frac{\pi^2 E \mathfrak{T}}{\left(\frac{1}{3} l\right)^2}.$$

Da der Gleichgewichtszustand dieser Stange keine Störung erleidet, wenn die untere Hälfte des unteren Drittels und die obere Hälfte des oberen Drittels in feste Wände eingeschlossen werden, so gilt diese Gleichung auch für den in Fig. 258 dargestellten Fall, und man erhält, indem man $\frac{1}{2} L$ statt $\frac{1}{3} l$ setzt, für diesen Fall die Gleichung:

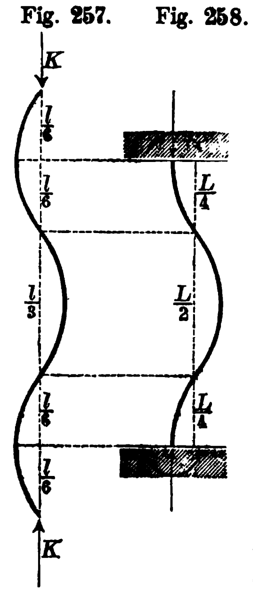


Fig. 257. Fig. 258.

$$2)\quad K = \frac{4\pi^2 E \mathfrak{T}}{L^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass bei einer Stange, an deren beiden Enden die Tangentenrichtungen der elastischen Linie durch Kräftepaare unverändert erhalten werden — wie z. B. bei einer zwischen festen Wänden eingeklemmten Säule, deren Endplatten an die ebenen Wandflächen sich anlegen — die zerknickende Kraft viermal so gross ist als für eine Stange mit freien Enden.

Für die in Fig. 259 dargestellte einfach gebogene Stange von der Länge l hat die zerknickende Kraft die Grösse:

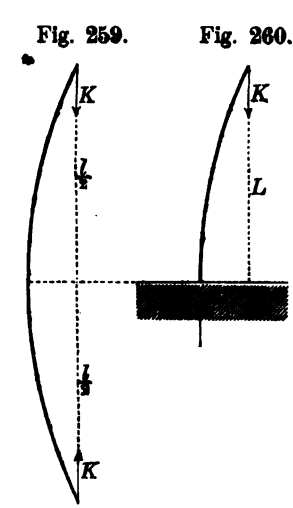


Fig. 259. Fig. 260.

$$3)\quad K = \frac{\pi^2 E \mathfrak{T}}{l^2}.$$

Denkt man sich die untere Hälfte derselben in eine feste Wand eingeschlossen, so gelangt man zu dem in Fig. 260 dargestellten Falle und erhält, indem man $2L$ statt l setzt, für diesen Fall die Gleichung:

$$4)\quad K = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{T}}{L^2}$$

welche zeigt, dass bei der nur an einem Ende eingemauerten Stange die zerknickende Kraft nur den vierten Theil beträgt von derjenigen Kraft, welche die an beiden Enden freie Stange zerknicken würde.

§ 57.

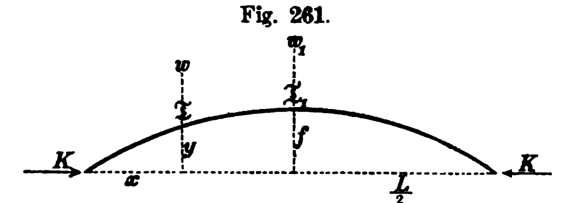
Stange mit veränderlichem Querschnitte.

Die grösste in einem bestimmten Querschnitte der gebogenen Stange stattfindende Druckspannung kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus zwei Theilen: den einen Theil bildet die gleichförmig über die ganze Querschnittsfläche vertheilte Druckspannung, welche die Druckkräfte K ohne Vorhandensein einer Biegung hervorgebracht haben würden; den anderen Theil bildet die dem Biegungsmomente Ky entsprechende grösste Biegungsspannung, welche an der concaven Seite ebenfalls eine Druckspannung ist. Diese letztere ist (nach § 2, Gleichung 12) zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad S = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot Ky,$$

und nach der in Fig. 261 gewählten Bezeichnungsweise nimmt dieselbe in der Mitte der Stange den Werth an:

Fig. 261.



$$2)\quad S_1 = \frac{w_1}{\mathfrak{T}_1} \cdot Kf.$$

Im Allgemeinen werden für die Spannung S in den verschiedenen Querschnitten verschiedene Werthe sich ergeben. Es soll jedoch hier als specieller Fall eine solche Veränderlichkeit des Querschnitts vorausgesetzt werden, bei welcher die Grösse S in allen Querschnitten gleiche Werthe annimmt. Es ist also:

$$3)\quad \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot Ky = \frac{w_1}{\mathfrak{T}_1} \cdot Kf$$

zu setzen, und wenn man in dieser Gleichung abkürzungsweise den Quotienten:

$$4)\quad \frac{\mathfrak{T}}{w} = z$$

setzt, so kann man derselben auch die folgende Form geben:

$$5)\quad y = \frac{f}{z_1} \cdot z.$$

Für den zweiten Differenzialquotienten von y, nach x genommen, erhält man hiernach den Ausdruck:

$$6)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f}{z_1} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Wenn man nunmehr die allgemeine Differenzialgleichung der elastischen Linie (§ 55, Gleichung 4), indem man darin für die Grössen $\mathfrak{T}$ und y resp. die aus den Gleichungen 4) und 5) zu entnehmenden Werthe substituirt, auf die folgende Form bringt:

$$7)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Kf}{Ez_1 w},$$

so erhält man durch Gleichsetzung der in diesen letzteren beiden Gleichungen für $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefundenen Ausdrücke die Gleichung:

$$8)\quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{K}{Ew}.$$

Stange mit rechteckigen Querschnitten von überall gleicher Höhe.

Wenn die Grösse w als halbe Höhe des rechteckigen Querschnitts eine von x unabhängige Constante ist, so kann man der obigen Gleichung, indem man darin für z wiederum den Werth $\frac{\mathfrak{T}}{w}$ substituirt, die folgende Form geben:

$$9)\quad \frac{d^2\mathfrak{T}}{dx^2} = -\frac{K}{E}.$$

Durch zweimalige Integration derselben gelangt man alsdann zu der Gleichung:

$$10)\quad \mathfrak{T} = -\frac{Kx^2}{2E} + Cx + C_1,$$

in welcher die beiden Integrations-Constanten C und C_1 auf folgende Weise zu bestimmen sind:

Für $x = 0$ wird $\mathfrak{T} = 0$, also ist $C_1 = 0$,

„ $x = L$ „ $\mathfrak{T} = 0$ „ „ $C = \frac{KL}{2E}$

Wenn man diese Werthe substituirt, so erhält man für $\mathfrak{T}$ die Gleichung:

$$11)\quad \mathfrak{T} = \frac{KLx}{2E}\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Für die Mitte der Stange ist $x = \frac{1}{2}L$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$ zu setzen; also ist:

$$12)\quad \mathfrak{T}_1 = \frac{KL^2}{8E}.$$

Das Verhältniss der beiden Trägheitsmomente $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ hat demnach die Grösse:

$$13)\quad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = 4\frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Wenn man hierin nach der in Fig. 262 und Fig. 263 gewählten Bezeichnungsweise die Werthe:

Fig. 262.

Fig. 263.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{12} b h^3, \quad \mathfrak{T}_1 = \frac{1}{12} b_1 h^3,$$

$$L = 2l, \qquad x = l - u$$

substituirt, so nimmt diese Gleichung die folgende einfachere Form an:

$$14)\quad \frac{b}{b_1} = 1 - \frac{u^2}{l^2}$$

und zeigt, dass das Grundriss-Profil der Stange durch zwei Parabeln gebildet wird (Fig. 263), während in der Aufriss-Ebene, welche der Biegungs-Ebene parallel vorausgesetzt wird, das Profil eine rechteckige Form hat (Fig. 262). Die zerknickende Kraft hat bei solcher Form der Stange nach Gleichung 12) die Grösse:

$$15)\quad K = \frac{8 E \mathfrak{T}_1}{L^2}.$$

Stange mit quadratischen oder kreisförmigen Querschnitten.

Die Trägheitsmomente ähnlicher Querschnittsfiguren verhalten sich wie die vierten Potenzen der Querschnittsdimensionen. Für den vorliegenden Fall ist also:

$$16)\quad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \frac{w^4}{w_1^4}$$

zu setzen, worin die Grössen w und w_1 entweder die halben Seitenlängen der quadratischen Querschnitte oder die Halbmesser der Querschnittskreise bedeuten. Die Gleichung 4) nimmt nach Substitution des aus obiger Gleichung für $\mathfrak{T}$ zu entnehmenden Werthes die Form an:

$$17)\quad z = \frac{\mathfrak{T}_1}{w_1^4} \cdot w^3,$$

und man erhält aus derselben für das Differenzial von z den Ausdruck:

$$18)\quad dz = 3\frac{\mathfrak{T}_1}{w_1^4} \cdot w^2 dw.$$

Wenn man nunmehr die Gleichung 8) auf beiden Seiten mit $2dz$ multiplicirt und hierauf für die Grösse dz den obigen Werth substituirt, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$19)\quad 2dz\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{2Kdz}{Ew},\quad \text{oder:}$$

$$20)\quad 2\left(\frac{dz}{dx}\right)d\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{3K\mathfrak{T}_1}{Ew_1^4}\cdot 2w\,dw,$$

und erhält durch Integration der letzteren, indem man die Integrationsconstante mit A bezeichnet, die Gleichung:

$$21)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = -\frac{3K\mathfrak{T}_1}{Ew_1^4}\cdot w^2 + A.$$

Die Gleichsetzung der aus den beiden Gleichungen 18) und 21) für dz zu entnehmenden Ausdrücke führt alsdann zu der Gleichung:

$$22)\quad \frac{3\mathfrak{T}_1 w^2 dw}{w_1^4} = dx\sqrt{A - \frac{3K\mathfrak{T}_1 w^2}{Ew_1^4}},$$

welcher man auch die folgende einfachere Form geben kann:

$$23)\quad dx = \frac{w^2 dw}{\sqrt{C - Bw^2}},$$

indem man statt der Constanten A eine neue Constante C einführt und gleichzeitig abkürzungsweise die constante Grösse:

$$24)\quad \frac{Kw_1^4}{3E\mathfrak{T}_1} = B$$

setzt. Wenn man endlich die Gleichung 23) integrirt und zugleich berücksichtigt, dass für $x = 0$ auch $w = 0$ sein muss, so erhält man die Gleichung:

$$25)\quad x = -\frac{w}{2\sqrt{B}}\sqrt{\frac{C}{B} - w^2} + \frac{C}{2B\sqrt{B}}\arcsin\left(w\sqrt{\frac{B}{C}}\right),$$

in welcher die Constanten auf folgende Weise bestimmt werden können. Für $x = L$ ist $w = 0$ zu setzen, und die Substitution dieser Werthe führt zu der Gleichung:

$$26)\quad L = \frac{C\pi}{2B\sqrt{B}}.$$

Wenn man ein anderes Mal den Werth $w = \sqrt{\frac{C}{B}}$ substituirt, so findet man, dass demselben der Werth $x = \frac{1}{2}L$ entspricht, und da für die Mitte der Stange $w = w_1$ ist, so folgt hieraus die Gleichung:

27) $\sqrt{\frac{C}{B}} = w_1,$

aus welcher man mit Benutzung des aus der vorhergehenden für C zu entnehmenden Ausdrucks für B den Werth erhält:

28) $B = \frac{\pi^2 w_1^4}{4 L^2}.$

Wenn man diese Werthe in Gleichung 25) substituirt, so nimmt dieselbe die folgende Form an:

29) $x = \frac{L}{\pi}\left\{\arc \sin \frac{w}{w_1} - \frac{w}{w_1}\sqrt{1 - \frac{w^2}{w_1^2}}\right\},$

und kann in dieser Form zur Construction des Längenprofils der Stange benutzt werden, insofern zu jedem willkürlich angenommenen Werthe von w der zugehörige Werth von x aus derselben berechnet werden kann. Durch Gleichsetzung der in den Gleichungen 24) und 28) für die Constante B gefundenen beiden Ausdrücke findet man endlich, dass die zerknickende Kraft für eine so geformte Stange zu berechnen ist aus der Gleichung:

30) $K = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi^2 E \mathfrak{T}_1}{L^2}\right).$

Die im Anfange dieses Paragraphen willkürlich angenommene Bedingung nach welcher die grösste Biegungsspannung S in allen Querschnitten der gebogenen Stange dieselbe Grösse haben sollte, führte zu dem Resultate, dass die Querschnittsfläche der Stange nach den beiden Enden hin bis auf die Grösse Null abnehmen muss, was zur Folge haben würde, dass die ausser jenen Biegungsspannungen noch vorhandene gleichförmig über die Querschnittsfläche vertheilte Druckspannung $\frac{K}{F}$ an den beiden Enden der Stange einen unendlich grossen Werth annehmen würde. In Wirklichkeit wird man statt dessen die Querschnittsfläche höchstens bis auf die der practisch zulässigen Druckspannung μ entsprechende Grösse $F = \frac{K}{\mu}$ abnehmen lassen dürfen, und auch in diesem Falle würde die Gültigkeit der obigen Gleichungen ausserdem noch an die Bedingung geknüpft sein: dass die Länge der Stange sehr gross ist im Verhältniss zu ihrer Dicke, und in Folge dessen die Grösse F beträchtlich kleiner ausfällt als der Querschnitt F_1 in der Mitte der Stange. Es ist daher — was practische Anwendungen betrifft — den in diesem Paragraphen gefundenen Resultaten nur ein verhältnissmässig geringer Werth beizumessen, und beschränkt sich derselbe im Wesentlichen auf das Ergebniss: dass unter obigen Voraussetzungen für die zerknickende Kraft bei der nach Gleichung 14) construirten Stange etwa ein Fünftel, und bei der nach Gleichung 29) construirten Stange etwa ein Viertel weniger in Rechnung zu bringen sein würde, als bei einer prismatischen Stange vom Querschnitte F_1.

§ 58.

Biegungsebene des kleinsten Widerstandes.

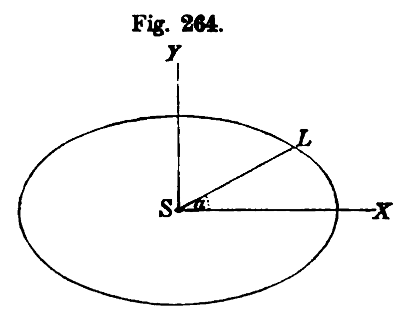
Nach § 55 (Gleichung 13) ist die zerknickende Kraft proportional dem Trägheitsmomente der Querschnittsfläche, bezogen auf denjenigen ihrer Schwerpunkts-Durchmesser, mit welchem die rechtwinkelig zur Biegungsebene stehende neutrale Achse zusammenfällt. Um also für eine prismatische Stange den kleinsten Werth der zerknickenden Kraft zu berechnen, hat man zuvor diejenige Lage der Biegungsebene resp. der neutralen Achse aufzusuchen, für welche das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ seinen kleinsten Werth annimmt.

Nach § 86 der „analytischen Mechanik" ist das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf einen beliebigen Schwerpunkts-Durchmesser derselben zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad \mathfrak{T} = A \cos \alpha^2 + B \sin \alpha^2,$$

in welcher A und B die Hauptträgheitsmomente bedeuten, d. h. die Trägheitsmomente in Bezug auf die beiden in die Querschnittsebene fallenden Hauptachsen SX und SY (Fig. 264). Für $\alpha = 0$ wird $\mathfrak{T} = A$, für $\alpha = 90^\circ$ wird $\mathfrak{T} = B$, und die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem die Grösse $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{T}}} = \overline{SL}$ mit dem Winkel α sich ändert, bildet eine Ellipse (analytische Mechanik, § 87).

Fig. 264.



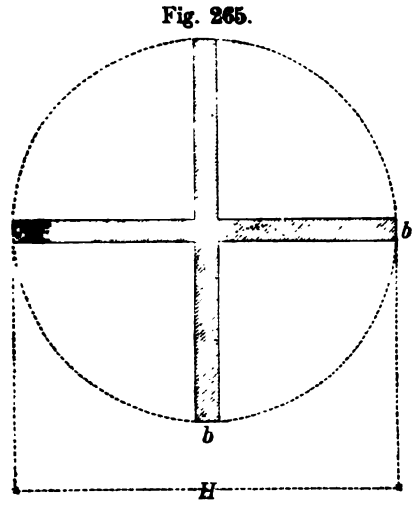
Hieraus folgt, dass das kleinere von den beiden Hauptträgheitsmomenten zugleich den kleinsten Werth bildet, welchen das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ überhaupt annehmen kann.

Wenn die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich sind — wie z. B. bei quadratischem oder kreisförmigem Querschnitte — so haben die Trägheitsmomente in Bezug auf die verschiedenen Schwerpunkts-Durchmesser sämmtlich dieselbe Grösse, und die Trägheits-Ellipse geht für diesen Fall in einen Kreis über. Die beiden Hauptträgheitsmomente des rechteckigen Querschnitts (Fig. 8) haben die Werthe:

$$A = \frac{b h^3}{12}, \qquad B = \frac{h b^3}{12},$$

und es wird — je nachdem entweder $b > h$ oder $b < h$ ist — im ersteren Falle A, im letzteren Falle B den kleinsten aller Werthe von $\mathfrak{T}$ bilden.

Fig. 265.



Der in Fig. 265 dargestellte Fall des symmetrischen kreuzförmigen Querschnitts ist wiederum ein Fall, bei welchem die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich sind. Die Trägheitsmomente haben daher für alle in der Querschnitts-Ebene liegende Schwerpunkts-Achsen die gemeinschaftliche Grösse:

$$\mathfrak{T} = \frac{bH^3}{12} + \frac{Hb^3}{12} - \frac{b^4}{12}, \text{ oder:}$$

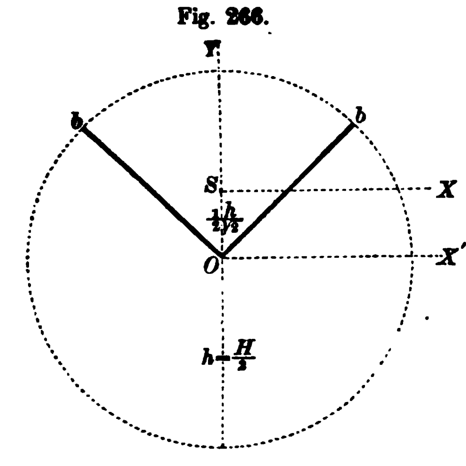
$$2) \quad \mathfrak{T} = \frac{bH^3}{12}\left\{1 + \frac{b^2}{H^2} - \frac{b^3}{H^3}\right\}.$$

Wenn das Verhältniss $\frac{b}{H}$ sehr klein ist, so kann man statt dessen annähernd auch setzen:

$$3) \quad \mathfrak{T} = \frac{bH^3}{12}.$$

Der in Fig. 266 dargestellte Winkeleisen-Querschnitt kann unter dieser Voraussetzung als die eine Hälfte jenes Kreuzes betrachtet werden; folglich hat das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf jede durch den Punkt O gelegte Achse (z. B. OX' oder OY) die Grösse:

Fig. 266.



$$4) \quad \mathfrak{T}_0 = \frac{bH^3}{24} = \frac{bh^3}{3}.$$

Der Flächeninhalt des Querschnitts hat die Grösse $F = bH = 2bh$; man kann daher auch setzen:

$$5) \quad \mathfrak{T}_0 = \frac{Fh^2}{6}.$$

Um das Trägheitsmoment in Bezug auf die der Achse OX' parallele Schwerpunkts-Achse SX (als eine von den beiden Haupt-Achsen des Schwerpunktes) zu erhalten, hat man (nach § 88 der „analytischen Mechanik") von obigem Werthe das Product aus der Fläche in das Quadrat des Abstandes der beiden Achsen zu subtrahiren; also ist:

$$6)\quad A = \frac{Fh^2}{6} - F\left(\frac{h}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{Fh^2}{24}.$$

Die Achse SY ist die andere Hauptachse des Schwerpunktes; folglich hat das andere Hauptträgheitsmoment den viermal so grossen Werth:

$$7)\quad B = \mathfrak{T}_0 = \frac{Fh^2}{6}.$$

Die Biegungsebene des kleinsten Widerstandes fällt also mit der Halbirungsebene des rechten Winkels zusammen; die rechtwinkelig zu derselben stehende Achse SX bildet die neutrale Achse, und um die kleinste zerknickende Kraft zu berechnen, hat man in Gleichung 13) des § 55 für das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ den in Gleichung 6) angegebenen Werth zu substituiren.

§ 59.

Berechnung der grössten Druckspannung in der gebogenen Stange.

Wenn man sich in Fig. **251** durch die Mitte der von den beiden Druckkräften K im gebogenen Zustande gehaltenen Stange rechtwinkelig zur Achse derselben eine Schnittfläche gelegt denkt, so erkennt man, dass, um den Gleichgewichtszustand der einen Stangenhälfte wieder herzustellen, an der Schnittfläche die zwei Kräfte-Systeme würden angebracht werden müssen, welche in Fig. **267** und Fig. **268** getrennt angegeben sind. Das eine besteht in den gleichförmig über die ganze Querschnittsfläche F vertheilten Druckspannungen, deren jede pro Flächeneinheit die Grösse hat:

$$1)\quad S_1 = \frac{K}{F}.$$

Das andere wird durch die dem Biegungsmomente Kf entsprechenden Biegungsspannungen gebildet; diese letzteren sind ungleichförmig über die Querschnittsfläche vertheilt, bilden an der concaven Seite ebenfalls Druckspannungen, und die grösste derselben hat pro Flächeneinheit die Grösse:

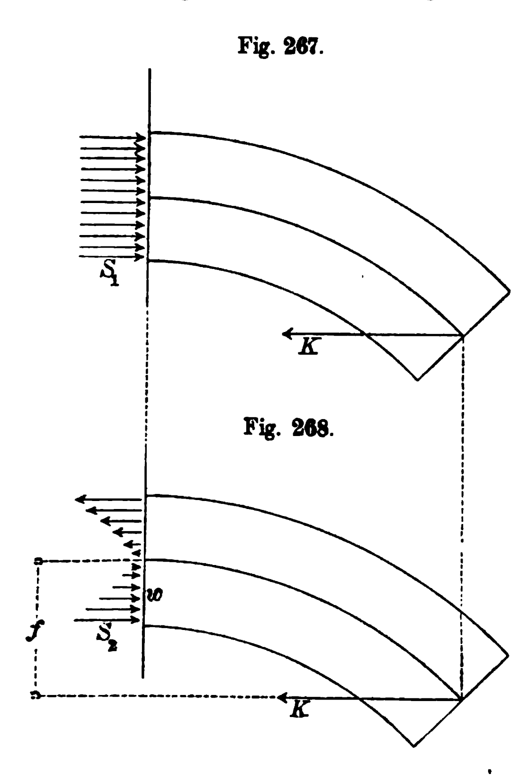
$$2)\quad S_2 = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot Kf.$$

Für das Verhältniss dieser zwei Druckspannungen ergiebt sich aus den obigen beiden Gleichungen der Werth:

$$3)\quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{fwF}{\mathfrak{T}}.$$

Fig. 267.

Fig. 268.



Die grösste in dem Querschnitte überhaupt auftretende Druckspannung pro Flächeneinheit setzt sich aus den beiden Theilen S_1 und S_2 zusammen, hat also die Grösse:

$$4)\quad S = S_1 + S_2.$$

Wenn $f = 0$ wäre, so würde auch $S_2 = 0$ sein, d. h. wenn die Stange gerade geblieben wäre, so würde die grösste Druckspannung gleich S_1 sein. Durch das Hinzutreten der Biegung wird die grösste Druckspannung von S_1 bis auf die Grösse S vergrössert; das Verhältniss dieser Vergrösserung hat demnach die Grösse:

$$5)\quad n = \frac{S}{S_1} = 1 + \frac{S_2}{S_1},$$

und wenn man hierin für den Quotienten $\frac{S_2}{S_1}$ den in Gleichung 3) gefundenen Werth substituirt, so erhält man für dasselbe die Gleichung:

$$6)\quad n = 1 + \frac{fwF}{\mathfrak{T}}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man für jede gegebene Grösse des Biegungspfeiles f den zugehörigen Werth der Ver-

hältnisszahl n berechnen, worauf dann die grösste Druckspannung selbst berechnet werden kann aus der Gleichung:

$$7)\quad S = n \,.\, S_1 = n \cdot \frac{K}{F}.$$

§ 60.

Coefficient des Widerstandes gegen Zerknicken.

Die am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundene Gleichung würde man — wenn der für die Verhältnisszahl n anzunehmende Werth bereits bekannt wäre — auch zur Berechnung der erforderlichen Querschnittsgrösse F benutzen können. Zu diesem Zwecke würde man für die grösste Druckspannung S die Grösse der practisch zulässigen Druckspannung einzusetzen und die Gleichung für F aufzulösen haben; man erhält dann die Gleichung:

$$1)\quad F = \frac{K}{\left(\frac{1}{n} \cdot S\right)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Hinzutreten der Biegungs-Spannungen genau denselben Einfluss hat, welchen bei der geradlinig bleibenden Stange eine Verminderung der practisch zulässigen Druckspannung bis auf den n-ten Theil ihrer Grösse haben würde. Man kann daher die Bestimmung der erforderlichen Querschnittsgrösse für eine in ihrer Längenrichtung gedrückte lange dünne Stange auch in der Weise ausführen, dass man — die Möglichkeit einer Biegung ferner ganz unberücksichtigt lassend — statt der wirklichen practisch zulässigen Spannung nur den n-ten Theil derselben in Rechnung bringt.

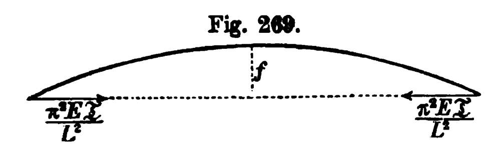
Da bei einer mathematisch genau geradlinigen Stange, auf welche lediglich Druckkräfte in ihrer Achsenrichtung wirken, keine Veranlassung zum Abweichen von der geradlinigen Form vorliegt, so kann die Zahl „n“ als eine Art von Sicherheitscoefficient aufgefasst und als solcher der „Coefficient des Widerstandes gegen Zerknicken“ genannt werden. Wie die Wahl der practisch zulässigen Spannung innerhalb gewisser durch die Festigkeits-Eigenschaften des Materials bedingter Grenzen mehr oder weniger der Willkür des Construirenden überlassen bleiben muss: so kann auch hinsichtlich der Wahl des Coefficienten „n“ eine bestimmte allgemein gültige Regel nicht vorgeschrieben werden.

Man wird für denselben im Allgemeinen einen um so grösseren Werth in Rechnung zu bringen haben, je grösser die Länge der Stange im Verhältniss zu ihren Querschnittsdimensionen ist, und in zweifelhaften Fällen wird es sich empfehlen, lieber einen zu grossen als einen zu kleinen Werth für denselben zu wählen.

Aus Gleichung 6) des vorigen Paragraphen erkennt man, dass die Zahl n von der Grösse des angenommenen Biegungspfeiles abhängt und mit letzterem zunimmt. Es kann daher der oben gestellten Forderung auch durch passende Wahl der Grösse f Genüge geleistet werden. Für diesen Biegungspfeil lässt sich auf folgende Weise ein oberer Grenzwerth auffinden, in Bezug auf welchen man behaupten darf: dass bei genügender Stärke der Stange in Wirklichkeit niemals eine Durchbiegung entstehen wird, bei welcher der Hebelarm der Kraft K jenen Grenzwerth erreichen könnte.

Denkt man sich auf die in Fig. 269 angedeutete Weise durch die beiden zerknickenden Kräfte — welche nach § 55 bei jeder Grösse des Biegungspfeiles die gebogene Stange im Gleichgewichte zu halten im Stande sind — die Stange in einen solchen Biegungszustand versetzt, bei welchem allein die Biegungsspannung schon die Elasticitätsgrenze erreicht, so erkennt man, dass der aus dieser Annahme für die Grösse f hervorgehende Werth jedenfalls grösser sein wird, als bei der mit genügendem Sicherheitsgrade construirten Stange derselbe in Wirklichkeit jemals werden dürfte, da in letzterem Falle die wirkliche Maximalspannung wegen Hinzukommens der gleichförmig über die Querschnittsfläche vertheilten Druckspannung die Elasticitätsgrenze schon überschreiten würde. Den gesuchten Werth von f kann man demnach berechnen aus der Biegungsgleichung:

Fig. 269.



$$2)\quad \frac{\mu}{w}\mathfrak{T} = \frac{\pi^2 E \mathfrak{T}}{L^2}\cdot f,$$

indem man darin für μ die Druckspannung an der Elasticitätsgrenze setzt. Das Verhältniss:

$$3)\quad \frac{\mu}{E} = \delta$$

bedeutet alsdann das der Elasticitätsgrenze entsprechende Verkürzungsverhältniss, und dem aus der obigen Gleichung für die

Grösse f zu entnehmenden Ausdrucke kann man hiernach die folgende Form geben:

$$4) \quad f = \frac{\delta L^2}{\pi^2 w}.$$

Nach Substitution desselben erhält man für den Coefficienten n aus Gleichung 6) des vorigen Paragraphen den Werth:

$$5) \quad n = 1 + \frac{\delta F L^2}{\pi^2 \mathfrak{T}}.$$

Da die Wahl des anzunehmenden Biegungspfeiles immer als eine mehr oder weniger willkürliche anzusehen ist, so darf man für die Grösse f ohne Bedenken statt des oben angenommenen auch einen anderen noch etwas grösseren Werth wählen, zu welchem man auf folgendem Wege gelangt. Wenn man sich die Stange an allen Stellen gleich stark gekrümmt denkt — in welchem Falle also die elastische Linie ein Kreisbogen wird — und zugleich wiederum eine solche Krümmung voraussetzt, bei welcher die grösste Biegungsspannung die Elasticitätsgrenze erreicht, so wird der entsprechende Krümmungshalbmesser der elastischen Linie nach

Fig. 270.

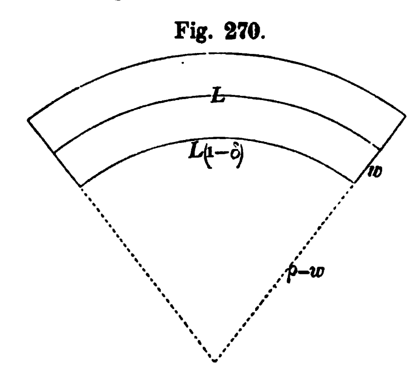
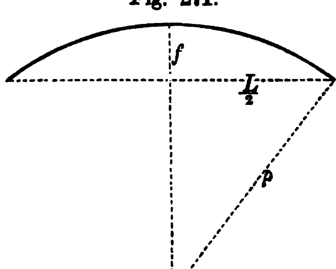


Fig. 270 zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$6) \quad \frac{L(1-\delta)}{L} = \frac{\varrho - w}{\varrho}, \quad \text{oder:} \quad \varrho = \frac{w}{\delta},$$

und für die Pfeilhöhe des Kreisbogens erhält man nach Fig. 271, indem man den Unterschied zwischen der Sehnenlänge und der Bogenlänge vernachlässigt, die Gleichung:

Fig. 271.



$$7) \quad \left(\frac{1}{2} L\right)^2 = 2 \varrho f - f^2,$$

aus welcher man nach Unterdrückung des als verhältnissmässig sehr klein zu betrachtenden Gliedes f^2, mit Benutzung des oben für ϱ gefundenen Ausdrucks, den Werth berechnet:

$$8) \quad f = \frac{L^2}{8 \varrho} = \frac{\delta L^2}{8 w}.$$

Nach Substitution desselben erhält man aus Gleichung 6) des vorigen Paragraphen für den Coefficienten n den Ausdruck:

$$9) \quad n = 1 + \frac{\delta F L^2}{8 \mathfrak{T}},$$

welcher von dem oben in Gleichung 5) gefundenen Ausdrucke nur dadurch sich unterscheidet, dass der Nenner des zweiten Gliedes statt des numerischen Factors „π^2“ den Factor „8“ enthält.

§ 61.

Berechnung der erforderlichen Querschnitts-Dimensionen für eine in ihrer Längenrichtung gedrückte prismatische Stange.

Bei den Anwendungen der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen kann man — je nach der gewählten Form des Querschnitts — drei verschiedene Gruppen von Fällen unterscheiden.

Als Repräsentant der ersten Gruppe kann der quadratische Querschnitt gelten, bei welchem es sich nur um die Bestimmung einer unbekannten Grösse handelt, und diese Bestimmung direct ausgeführt werden kann. Wenn mit H die Seitenlänge des Quadrates bezeichnet wird, so ist:

$$F = H^2, \qquad \mathfrak{T} = \frac{H^4}{12}$$

zu setzen, und aus Gleichung 9) des vorigen Paragraphen ergiebt sich für den Coefficienten n der Werth:

$$1) \quad n = 1 + \frac{3\delta L^2}{2H^2}.$$

Nach Substitution dieser Werthe nimmt die Gleichung 1) des vorigen Paragraphen die Form an:

$$2) \quad H^2 = \frac{K}{S}\left(1 + \frac{3\delta L^2}{2H^2}\right),$$

und man erhält durch Auflösung derselben für die gesuchte Grösse H den Werth:

$$3) \quad H = \sqrt{\frac{K}{2S} + \sqrt{\left(\frac{K}{2S}\right)^2 + \frac{3K\delta L^2}{2S}}}.$$

Für Schmiedeisen würde $S = 6$ Kil. und $\delta = \frac{15}{20\,000}$ zu setzen sein. Wenn man ferner $L = 2\,000^{mm}$ und $K = 10\,000$ Kil. setzt, so erhält man aus obiger Gleichung für die Seitenlänge des quadratischen Querschnitts den Werth $H = 60^{mm},8$.

Auf dieselbe Weise würde man bei der Berechnung des kreisförmigen Querschnitts zu verfahren haben. Wenn mit D der Durchmesser desselben bezeichnet wird, so ist:

$$F = \frac{\pi}{4} D^2, \qquad \mathfrak{T} = \frac{\pi}{64} D^4$$

zu setzen, und man erhält die den Gleichungen 1), 2), 3) analog gebildeten Gleichungen:

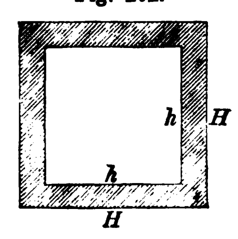
$$4)\quad n = 1 + \frac{2\delta L^2}{D^2}, \qquad 5)\quad \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{K}{S}\left(1 + \frac{2\delta L^2}{D^2}\right),$$

$$6)\quad D = \sqrt{\frac{2K}{\pi S} + \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi S}\right)^2 + \frac{8\delta K L^2}{\pi S}}}.$$

Wenn man wiederum $S = 6$ Kil., $\delta = \frac{15}{20\,000}$, $L = 2\,000^{mm}$, $K = 10\,000$ Kil. setzt, so erhält man für die erforderliche Dicke der Stange den Werth $D = 69^{mm},1$.

Als Repräsentant der zweiten Gruppe von Fällen kann die in Fig. 272 dargestellte Querschnittsform gelten, bei welcher es sich um die Bestimmung von zwei unbekannten Grössen handelt, und diese Bestimmung auf indirectem Wege auszuführen ist. Man erkennt sogleich, dass in diesem Falle eine von den beiden Querschnitts-Dimensionen H, h willkürlich gewählt werden darf, und dass alsdann für die andere stets ein Werth sich nachweisen lässt, welcher den vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leistet.

Fig. 272.



So z. B. würde man willkürlich $h = 0$ setzen dürfen und würde alsdann für H wieder den in Gleichung 3) gefundenen Werth erhalten.

Man kann statt dessen aber auch für den Sicherheitscoefficienten „n" einen passend scheinenden Werth willkürlich annehmen und nachher die beiden Querschnitts-Dimensionen so bestimmen, dass jener für „n" angenommene Werth als der richtige sich erweist. Nach Fig. 272 ist für den vorliegenden Fall:

$$F = H^2 - h^2, \qquad \mathfrak{T} = \frac{H^4 - h^4}{12}$$

zu setzen, und die Gleichung 9) des vorigen Paragraphen nimmt nach Substitution dieser Werthe die Form an:

$$7)\quad n = 1 + \frac{3\delta (H^2 - h^2) L^2}{2(H^4 - h^4)}, \qquad \text{oder:} \qquad n = 1 + \frac{3\delta L^2}{2(H^2 + h^2)}.$$

Mit Zuziehung der Gleichung 1) des vorigen Paragraphen erhält man hiernach die beiden Gleichungen:

$$8)\quad H^2 + h^2 = \frac{3\delta L^2}{2(n-1)},$$

$$9) \quad H^2 - h^2 = \frac{nK}{S},$$

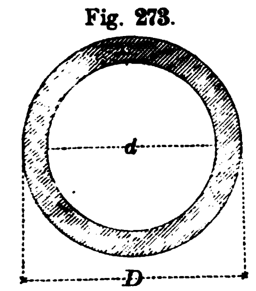
aus denen für die beiden unbekannten Grössen die folgenden Werthe sich ergeben:

$$10) \quad H = \sqrt{\frac{3\delta L^2}{4(n-1)} + \frac{nK}{2S}},$$

$$11) \quad h = \sqrt{\frac{3\delta L^2}{4(n-1)} - \frac{nK}{2S}}.$$

Wenn man z. B. willkürlich $n = 1{,}5$ setzt und im Uebrigen die in den vorigen Zahlenbeispielen angenommenen Werthe beibehält, so findet man als Querschnitts-Dimensionen:

Fig. 273.



$$H = 76^{mm}, \qquad h = 57^{mm}.$$

Auf dieselbe Weise würde auch der Fall des ringförmigen Querschnitts (Fig. 273) zu behandeln sein, für welchen:

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2),$$

$$\mathfrak{T} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

zu setzen ist, und die den Gleichungen 7) . . . 11) analog gebildeten Gleichungen sich ergeben:

$$12) \quad n = 1 + \frac{2\delta L^2}{D^2 + d^2},$$

$$13) \quad D^2 + d^2 = \frac{2\delta L^2}{n-1},$$

$$14) \quad D^2 - d^2 = \frac{4nK}{\pi S},$$

$$15) \quad D = \sqrt{\frac{\delta L^2}{n-1} + \frac{2nK}{\pi S}},$$

$$16) \quad d = \sqrt{\frac{\delta L^2}{n-1} - \frac{2nK}{\pi S}}.$$

Mit Beibehaltung der oben angenommenen Zahlenwerthe würde man hiernach für den ringförmigen Querschnitt die Werthe erhalten:

$$D = 87^{mm}{,}1, \qquad d = 66^{mm}{,}4.$$

Für den in Fig. 274 dargestellten kreuzförmigen Querschnitt, welcher als Repräsentant der dritten Gruppe von Fällen zu betrachten ist, kann man den für die Grössen F und $\mathfrak{T}$ einzusetzenden Ausdrücken:

17) $F = 2bh - b^2,$

18) $\mathfrak{T} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} - \frac{b^4}{12},$

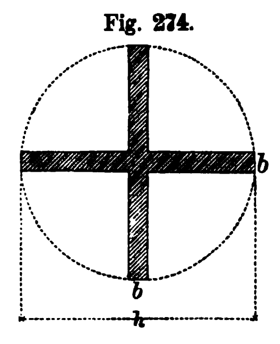
indem man abkürzungsweise des Verhältniss $\frac{b}{h} = \mathfrak{v}$ setzt, auch die folgenden Formen geben:

19) $F = 2bh\left(1 - \frac{1}{2}\mathfrak{v}\right),$

20) $\mathfrak{T} = \frac{bh^3}{12}(1 + \mathfrak{v}^2 - \mathfrak{v}^3).$

Wenn man diese Werthe in Gleichung 9) des vorigen Paragraphen substituirt und dieselbe nachher für h auflöst, so erhält man die Gleichungen:

Fig. 274.



21) $n = 1 + 3\delta\frac{L^2}{h^2}\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\mathfrak{v}}{1 + \mathfrak{v}^2 - \mathfrak{v}^3}\right),$

22) $h = L\sqrt{\left(\frac{3\delta}{n-1}\right)\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\mathfrak{v}}{1 + \mathfrak{v}^2 - \mathfrak{v}^3}\right)}.$

Für den Coefficienten „n" darf man wie bei der vorigen Gruppe von Beispielen einen passend scheinenden Werth willkürlich annehmen, worauf dann auch die Grösse:

23) $F = n \cdot \frac{K}{S}$

als eine gegebene Grösse betrachtet werden darf. Man kann alsdann aus Gleichung 22), indem man darin vorläufig $\mathfrak{v} = 0$ setzt, den Annäherungswerth:

24) $h = L\sqrt{\frac{3\delta}{n-1}},$

und aus Gleichung 17), indem man dieselbe für b auflöst, den zugehörigen Werth:

25) $b = h - \sqrt{h^2 - F}$

berechnen, womit dann zugleich für das Verhältniss $\mathfrak{v}$ ein Annäherungswerth gefunden ist. Mit Benutzung des letzteren findet man nunmehr aus Gleichung 22) den genaueren Werth von „h" und aus Gleichung 25) den genaueren Werth von „b".

Mit Beibehaltung der in den vorigen Beispielen angenommenen Zahlenwerthe findet man bei Anwendung des obigen Verfahrens zunächst die Annäherungswerthe:

$$h = 134^{mm}, \qquad b = 9^{mm},5,$$

und indem man mit Benutzung des nunmehr bekannten Werthes $\mathfrak{v} = \frac{9,5}{134} = 0,0709$ die Rechnung wiederholt, findet man die genaueren Werthe:

$$h = 131^{mm},5, \qquad b = 10^{mm}.$$

Für den in Fig. 266 dargestellten Winkeleisenquerschnitt ist (nach § 58, Gleichung 6):

$$26)\quad \mathfrak{T} = \frac{Fh^2}{24}$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Werthes findet man, dass unter den in § 58 gemachten Voraussetzungen die oben für den kreuzförmigen Querschnitt gefundenen Gleichungen 24), 25) auch bei der Berechnung des Winkeleisenquerschnitts angewendet werden dürfen.

Wenn z. B. die Länge der Winkeleisenstange 2 Meter beträgt und dieselbe einen in der Längenrichtung wirkenden Druck von 10 000 Kil. aufzunehmen hat, so würde man demselben die Querschnitts-Dimensionen $h = 134^{mm}$ $b = 9^{mm},5$ (oder auch: $h = 131^{mm},5$, $b = 10^{mm}$) zu geben haben.

§ 62.

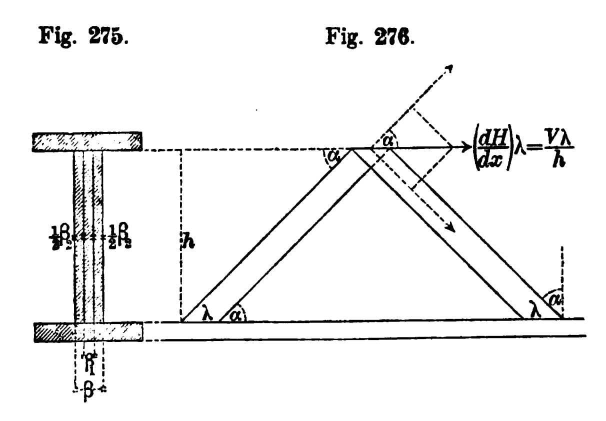
Anwendungen auf Gitter- und Blech-Brücken.

Aus der in vorstehenden Paragraphen entwickelten Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken ergiebt sich, dass die im dritten Abschnitte ausgeführten Rechnungen — insbesondere diejenigen, welche die Materialmenge der Gitter- oder Blech-Wand betreffen — überall noch einer Correction bedürfen, insofern bei der Querschnitts-Berechnung der in ihrer Längenrichtung gedrückten Gitterstäbe statt der sonst practisch zulässigen Druckspannung „S“ stets der kleinere Werth $\frac{S}{n}$ hätte in Rechnung gebracht werden müssen. Man wird deshalb bei allen practischen Anwendungen jener Berechnungsmethode für den in § 38 mit „k“ bezeichneten Coefficienten statt des dort angegebenen Werthes einen anderen etwas grösseren Werth einzusetzen haben, dessen Berechnung auf folgende Weise ausgeführt werden kann.

Man kann sich — wie in § 38 bereits erklärt wurde — die Blechwand aus einer Gitterwand entstanden denken, indem man die Anzahl der Gitterstäbe bei entsprechender Verminderung ihrer Abstände allmählich grösser werdend und nachher die sämmtlichen Stäbe zu einer massiven Wand zusammengeschweisst sich denkt. So könnte man auch umgekehrt die Blechwand wiederum in eine Gitterwand verwandeln, indem man die Blechwand ihrer Dicke nach in zwei Theile zerschneidet und jeden dieser beiden Theile durch Parallelschnitte in Streifen zerlegt, welche dann als die Stäbe der Gitterwand betrachtet werden können. Diese Zer-

legung würde man auch auf die in Fig. 275 und Fig. 276 angedeutete Weise ausführen und dabei annehmen können, dass die aus dem mittleren Theile geschnittenen Parallel-Streifen die in ihrer Längenrichtung gezogenen Gitterstäbe darstellen, während die beiden äusseren Theile zusammengenommen das Material zu den in ihrer Längenrichtung gedrückten Gitterstäben liefern.

Fig. 275. Fig. 276.



Wenn man ausserdem noch annimmt, dass diese beiden Streifen-Systeme einander rechtwinkelig durchkreuzen, so ist nach der in den Figuren angewendeten Bezeichnungsweise der Querschnitt eines der gezogenen Streifen gleich $\beta_1 . \lambda \sin\alpha$, und der Querschnitt des zugehörigen gedrückten Streifenpaares gleich $\beta_2 . \lambda \cos\alpha$ zu setzen. Man erhält also — indem man wiederum das am Schlusse des § 38 erklärte Verfahren anwendet — zur Bestimmung der Grössen β_1 und β_2 die beiden Gleichungen:

$$1)\quad S . \beta_1 \lambda \sin\alpha = \frac{V\lambda}{h} \cdot \cos\alpha, \quad \text{oder:} \quad \beta_1 = \frac{V}{Sh \operatorname{tg}\alpha},$$

$$2)\quad \frac{S}{n} \cdot \beta_2 \lambda \cos\alpha = \frac{V\lambda}{h} \cdot \sin\alpha, \quad \text{oder:} \quad \beta_2 = \frac{nV \operatorname{tg}\alpha}{Sh}.$$

Für die ganze erforderliche Blechstärke ergiebt sich hieraus der Werth:

$$3)\quad \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{V}{Sh}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + n \operatorname{tg}\alpha\right).$$

In dieser Gleichung hat man für den Winkel α, welchen die gezogenen Streifen mit der Horizontalen bilden, denjenigen Werth einzusetzen, für welchen β ein Minimum wird. Man findet diesen Werth, indem man den Differenzialquotienten der eingeklammerten Function von α gleich Null setzt, aus der Gleichung:

$$4)\quad 0 = -\frac{1}{\sin\alpha^2} + \frac{n}{\cos\alpha^2}, \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

und erhält, indem man denselben in Gleichung 3) substituirt, für β den Werth:

$$5)\quad \beta = \frac{V}{Sh} \cdot 2\sqrt{n}.$$

Wenn die Blechwand an den Biegungsspannungen nicht theilnehmend ausschliesslich Abscheerungswiderstände zu leisten hätte, so würde (nach § 38) die erforderliche Stärke derselben zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$6)\quad b = \frac{V}{Sh}.$$

Für das in § 38 mit „k“ bezeichnete Verhältniss der beiden Grössen β und b ergiebt sich hiernach der Werth:

$$7)\quad k = \frac{\beta}{b} = 2\sqrt{n}.$$

Die gedrückten Streifenpaare haben die Länge $\frac{h}{\cos\alpha}$, und da die beiden Theile eines Paares durch das zwischenliegende Material der gezogenen Streifen mit einander verbunden sind, so darf man den Coefficienten „n“ auf dieselbe Weise berechnen wie bei einer Stange, deren Querschnitt ein Rechteck von der Höhe β ist. Hiernach erhält man aus der ersten Gleichung des § 61, indem man darin $\frac{h}{\cos\alpha}$ statt L und β statt H setzt, für den Coefficienten n den Werth:

$$8)\quad n = 1 + \frac{3\,\delta h^2}{2\beta^2 \cos\alpha^2}.$$

Wenn man hierin für die Grösse $\frac{1}{\cos\alpha^2}$ den aus Gleichung 4) zu entnehmenden Ausdruck:

$$9)\quad \frac{1}{\cos\alpha^2} = 1 + \operatorname{tg}\alpha^2 = 1 + \frac{1}{n}$$

substituirt, so nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$10)\quad n = 1 + \frac{3\,\delta h^2}{2\beta^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

und man erhält durch Auflösung derselben für n den Werth:

$$11)\quad n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\,\delta h^2}{2\beta^2}\right) + \sqrt{\frac{3\,\delta h^2}{2\beta^2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3\,\delta h^2}{2\beta^2}\right)^2}.$$

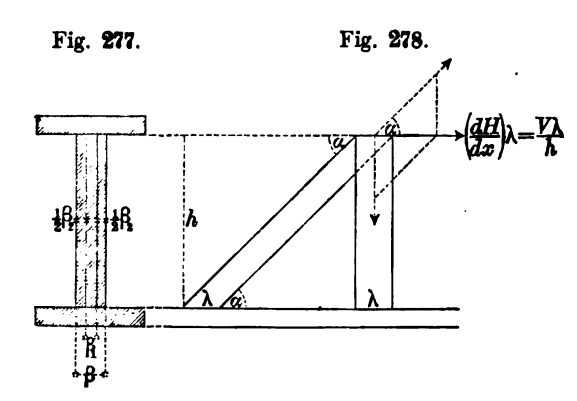
Mittelst der Gleichungen 6), 7), 11) kann man nunmehr die Grösse β auf folgende Weise bestimmen. Man berechnet zunächst aus Gleichung 6) den Werth von b und findet dann aus Gleichung 7),

indem man darin provisorisch $n = 1$ setzt, zunächst einen Annäherungswerth für die Grösse β. Den auf solche Weise gefundenen Annäherungswerth für β substituirt man in Gleichung 11) und findet daraus einen genaueren Werth für n, worauf man nunmehr den genaueren Werth von β aus Gleichung 7) berechnen und, wenn man will, die Correction wiederholen kann.

§ 63.

Ableitung einer practischen Formel für die Stärke der Blechwand.

Da es sich bei der obigen Untersuchung nur um die Ableitung einer Annäherungsformel handelt, so darf man sich — um das am Schlusse des vorigen Paragraphen erklärte etwas umständliche Verfahren zu umgehen — die Zerlegung der Blechwand auch auf die in Fig. 277 und Fig. 278 angedeutete Weise ausgeführt denken, bei welcher für die gedrückten Streifen eine verticale Lage angenommen ist. Für den Querschnitt eines der gedrückten Streifenpaare ergiebt sich bei dieser Zerlegung der Werth $\beta_2 \cdot \lambda$, während der zugehörige gezogene Streifen wie beim vorigen Falle den Querschnitt $\beta_1 \cdot \lambda \sin \alpha$ hat. Man erhält hiernach die den Gleichungen 1), 2), 3) des vorigen Paragraphen analog gebildeten Gleichungen:



$$1)\quad S\beta_1 \lambda \sin \alpha = \frac{V\lambda}{h \cos \alpha}, \quad \text{oder:} \quad \beta_1 = \frac{V}{Sh \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$2)\quad \frac{S}{n} \cdot \beta_2 \lambda = \frac{V\lambda}{h} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{oder:} \quad \beta_2 = \frac{n V \operatorname{tg} \alpha}{Sh},$$

$$3)\quad \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{V}{Sh} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + n \operatorname{tg} \alpha \right\}, \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad \beta = \frac{V}{Sh} \left\{ \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + (n+1) \operatorname{tg} \alpha \right\},$$

in welcher letzteren wiederum für den Winkel α derjenige Werth einzusetzen ist, für welchen β ein Minimum wird. Man findet diesen Werth, indem man den Differenzialquotienten der eingeklammerten Function von α gleich Null setzt, aus der Gleichung:

$$5)\quad 0 = -\frac{1}{\sin\alpha^2} + \frac{n+1}{\cos\alpha^2}, \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+n}},$$

und nach Substitution derselben nimmt die obige Gleichung für β die Form an:

$$6)\quad \beta = \frac{2V\sqrt{1+n}}{Sh}.$$

Mit Benutzung des in Gleichung 6) für b angegebenen Werthes erhält man nunmehr für das Verhältniss k die Gleichung:

$$7)\quad k = \frac{\beta}{b} = 2\sqrt{1+n}.$$

Der Coefficient n ist auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen zu berechnen, und da die gedrückten Streifen im vorliegenden Falle die Länge h haben, so ist in Gleichung 8) des vorigen Paragraphen h statt $\frac{h}{\cos\alpha}$, also:

$$8)\quad n = 1 + \frac{3\delta h^2}{2\beta^2}$$

zu setzen. Wenn man nunmehr die Gleichung 7) quadrirt und zugleich für n den obigen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$9)\quad \frac{\beta^2}{b^2} = 8 + \frac{6\delta h^2}{\beta^2},$$

und, indem man diese Gleichung für β auflöst, findet man den Ausdruck:

$$10)\quad \beta = 2b\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{3\delta h^2}{8b^2}}},$$

welchem man mit Benutzung des in Gleichung 6) des vorigen Paragraphen für b angegebenen Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$11)\quad \beta = \frac{2V}{Sh}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{3\delta S^2 h^4}{8V^2}}}.$$

Mit Hülfe dieser letzteren Gleichung kann man die erforderliche Stärke der Blechwand direct aus der gegebenen verticalen Abscheerungskraft V berechnen.

Wie bei einer langen dünnen Stange, welche in ihrer Längenrichtung gedrückt wird, durch die geringste einmal vorhandene Abweichung von der geradlinigen Form leicht eine nachtheilige Durchbiegung und damit die Gefahr des Zerknickens herbeigeführt werden kann: so wird bei der dünnen Blechwand eines Blechbalkens eine geringe Abweichung von der ebenen Form zur Folge haben können, dass rechtwinkelig zu den Richtungen der grössten Druckspannungen Falten in derselben sich bilden, wobei dann eine dem Zerknicken analoge Formzerstörung eintreten kann. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, der Blechwand eine grössere Stärke zu geben, als bei vollkommen ebener Form derselben erforderlich sein würde, und wenn auch zugegeben werden muss, dass in Betreff des zu wählenden Sicherheitsgrades niemals bestimmte allgemein gültige Vorschriften gegeben werden können, so darf man doch den oben für die Blechstärke β gefundenen Werth als einen solchen betrachten, welcher unter gewöhnlichen Verhältnissen jenem Sicherheitsbedürfnisse Genüge leisten wird.

§ 64.

Ermittelung des vortheilhaftesten Höhenverhältnisses für den Blechbalken auf zwei Stützen.

Wenn der Balken eine prismatische Form erhalten soll, so hat man die Flanschenquerschnitte nach dem grössten Biegungsmomente und die Stärke der Blechwand nach der grössten verticalen Abscheerungskraft zu berechnen. Bei gleichförmig über die Länge des Balkens vertheilter Belastung ist das Biegungsmoment in der Mitte desselben am grössten und hat daselbst nach der in § 33 gewählten Bezeichnungsweise die Grösse:

$$1)\quad \mathfrak{M} = \frac{p\,l^2}{2}.$$

Es ist daher (nach § 33) der erforderliche Flanschenquerschnitt zu berechnen aus der Gleichung:

$$2)\quad S F h = \frac{p\,l^2}{2}, \quad \text{oder:} \quad F = \frac{p\,l^2}{2 S h}.$$

Die verticale Abscheerungskraft erreicht an den beiden Enden des Balkens ihren grössten Werth und hat daselbst die Grösse:

$$3)\quad V = p\,l.$$

Wenn man diesen letzteren Werth in Gleichung 11) des vorigen Paragraphen einsetzt, so erhält man für die erforderliche Blechstärke den Werth:

$$4)\quad \beta = \frac{2 p l}{S h} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{3\,\delta S^2 h^4}{8 p^2 l^2}}}.$$

Aus den beiden Gleichungen 2) und 4) kann man nunmehr

die erforderliche Querschnittsfläche des Blechbalkens berechnen, sobald für das Verhältniss der Länge zur Höhe desselben ein bestimmter Werth entweder gegeben ist oder willkürlich angenommen wird.

Für einen schmiedeisernen Blechbalken würde man $S = 6$ Kil. und $\delta = \frac{15}{20\,000}$ zu setzen haben. Wenn also z. B. die Länge des Balkens 5 Meter, die Totalbelastung 25 000 Kil. beträgt und das Verhältniss der Höhe zur Länge gleich ein Zehntel angenommen wird, so hat man die Werthe $l = 2500^{mm}$, $h = 500^{mm}$, $p = 5$ Kil. zu substituiren. Es ergeben sich alsdann resp. aus den Gleichungen 2) und 4) die Werthe:

$$F = \frac{5 \,.\, 2500^2}{2 \,.\, 6 \,.\, 500} = 5208^{\square mm}.$$

$$\beta = \frac{2 \,.\, 5 \,.\, 2500}{6 \,.\, 500} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{3 \,.\, 0{,}00075 \,.\, 6^2 \,.\, 500^4}{8 \,.\, 5^2 \,.\, 2500^2}}} = 15^{mm},$$

und für die ganze erforderliche Querschnittsfläche des Blechbalkens erhält man hiernach den Werth:

$$2F + \beta h = 2 \,.\, 5208 + 15 \,.\, 500 = 17\,916^{\square mm}.$$

Indem man ferner den der Abscheerungstheorie entsprechenden (nach § 62, Gleichung 6) zu berechnenden) Werth:

$$b = \frac{pl}{Sh} = \frac{5 \,.\, 2500}{6 \,.\, 500} = 4^{mm}{,}166\,..$$

mit dem oben für β gefundenen Werthe vergleicht, findet man für den in § 62 mit k bezeichneten Quotienten im vorliegenden Falle den Werth:

$$k = \frac{\beta}{b} = \frac{15}{4{,}166\,..} = 3{,}6.$$

Ohne Berücksichtigung der Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken würde man bei der Berechnung erforderlichen Querschnitts-Dimensionen, indem man dieselbe nach den Gleichungen des § 33 ausführt, stets zu dem der Erfahrung widersprechenden Resultate gelangen, dass bei unendlich grosser Höhe des Balkens die Materialmenge ein Minimum wird. Denn die nach Gleichung 2) des § 33 berechnete verticale Querschnittsfläche der Blechwand (bh) ist unabhängig von der gewählten Höhe, während der nach Gleichung 1) des § 33 berechnete Flanschenquerschnitt F mit zunehmender Höhe abnimmt.

Wenn man dagegen die Querschnittsfläche auf die oben erklärte Weise nach den Gleichungen 2) und 4) berechnet, so findet man stets, dass bei einer bestimmten Grösse des Höhenverhältnisses der Materialverbrauch ein Minimum wird. So z. B. erhält man für den oben berechneten Blechbalken, indem man die Rech-

nung unter Annahme verschiedener anderer Werthe des Höhenverhältnisses $\frac{h}{2l}$ wiederholt, die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{h}{2l}=$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$b=$	4^{mm},166...	3,33...	2,9166...	2,5	2,0833...	1,66...
$\frac{\beta}{b}=$	3,6	4,16	4,5726	5,168	6,03	7,4
$\beta=$	15^{mm}	13,86	13,336	12,92	12,56	12,33
$\beta h=$	$7500^{\square mm}$	8663	9526	10 770	12 560	15 416
$2F=$	$10416^{\square mm}$	8333	7292	6250	5208	4166
$2F+\beta h=$	$17916^{\square mm}$	16 996	16 818	17 020	17 768	19 582

Diese Tabelle zeigt, dass bei der hier angenommenen Grösse der Belastung p die Querschnittsfläche des Balkens — folglich auch der Materialverbrauch — ein Minimum wird, wenn die Höhe des Balkens ungefähr gleich dem siebenten Theile der Länge ist.

Aus den Gleichungen 2) und 3) ergiebt sich für das Verhältniss der beiden Grössen V und F der Werth:

$$5)\quad \frac{V}{F}=\frac{2Sh}{l}.$$

Wenn man den hieraus für V zu entnehmenden Werth in Gleichung 11) des vorigen Paragraphen substituirt, so nimmt dieselbe die Form an:

$$6)\quad \beta=\frac{4F}{l}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{3\,\delta h^2 l^2}{32F^2}}}$$

und zeigt in dieser Form: wie man die erforderliche Blechstärke auch direct aus dem gegebenen Flanschenquerschnitte würde berechnen können.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Biegungstheorie krummer Balken.

§ 65.

Biegungs-Spannungen im krummen Balken.

Hinsichtlich der ursprünglichen Form des krummen Balkens wird vorausgesetzt: dass die Linie, nach welcher die Achse desselben vor dem Eintreten der von den biegenden Kräften hervorgebrachten Formänderung bereits gekrümmt war, eine ebene Curve bildete; ferner: dass die Krümmungsebene derselben den überall gleichen Querschnitt des Balkens in zwei symmetrische Hälften zerlegt. Ausserdem wird vorausgesetzt: dass die biegenden Kräfte sämmtlich in jener Krümmungsebene wirken, dass dieselben also nur solche Formänderungen hervorbringen können, bei welchen die Achsenlinie des Balkens eine ebene Curve bleibt.

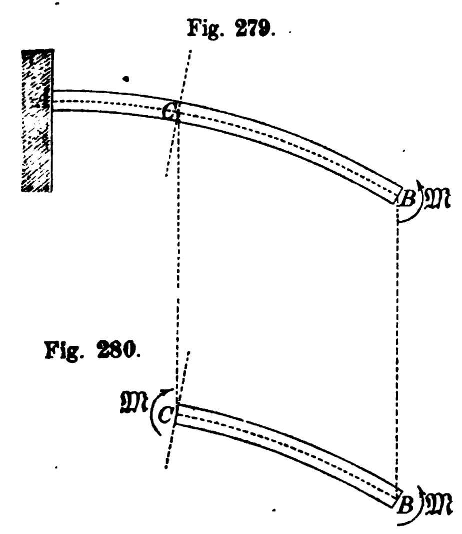


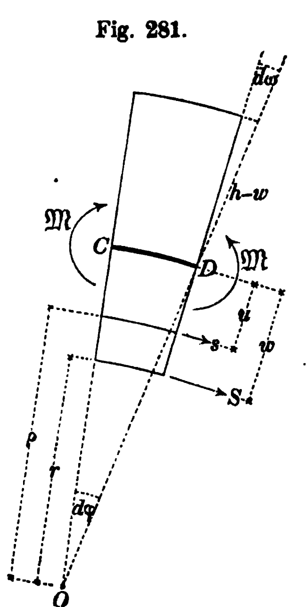
Fig. 279.

Fig. 280.

Um die Biegungs-Spannungen zu bestimmen, welche in irgend einem Querschnitte des an einem Ende eingemauerten krummen Balkens durch ein am freien Ende desselben wirkendes Kräftepaar vom Momente 𝔐 hervorgebracht werden, hat man sich an der betreffenden Stelle des Balkens rechtwinkelig zur Achsenlinie desselben eine Schnittfläche hindurchgelegt und an dem abgeschnittenen Theile BC die zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes erforderlichen Kräfte hinzugefügt zu denken (Fig. 279). Diese hin-

zuzufügenden Kräfte werden jedenfalls in ihrer Gesammtwirkung ein Kräftepaar bilden müssen, und das Moment desselben muss dem Momente des am freien Ende B wirkenden Kräftepaares gleich und entgegengesetzt sein (Fig. 280). Das gleiche Resultat würde sich ergeben, wenn der Schnitt an einer beliebigen anderen Stelle durch den Balken hindurchgelegt würde. Denkt man sich das zwischen zwei unendlich nahe bei einander liegenden Querschnittsflächen befindliche Stück CD aus dem Balken herausgeschnitten, so erkennt man: dass dasselbe auf die in Fig. 281 angedeutete Weise durch zwei entgegengesetzt drehende Kräftepaare im Gleichgewichte gehalten wird.

Fig. 281.



Die von den beiden Kräftepaaren an diesem Balkenstücke hervorgebrachte Formänderung wird darin bestehen, dass die an der concaven Seite liegenden Fasernabschnitte verlängert, und die an der convexen Seite liegenden Fasernabschnitte verkürzt werden. Zwischen den verlängerten und verkürzten Fasernschichten muss irgendwo eine neutrale Fasernschicht liegen, welche weder verlängert noch verkürzt wird. In Betreff der eingetretenen Formänderung, welche stets sehr klein vorausgesetzt wird, darf man — wie früher bei dem geraden Balken ebenfalls geschehen — die Annahme machen: dass diejenigen Punkte des Balkens, welche vorher in einer und derselben Querschnittsebene lagen, auch nach eingetretenem Biegungszustande noch in einer und derselben Ebene zusammen geblieben sind. Es darf daher die mit der Biegung verbundene relative Lagenveränderung der einen Endfläche D in Bezug auf die andere Endfläche C aufgefasst werden als eine Drehung um eine rechtwinkelig zur Biegungsebene stehende Drehachse D, welche in der neutralen Fasernschicht liegt und deshalb die neutrale Achse genannt werden kann.

Die Verlängerung des an der concaven Seite im Abstande u von der Neutralen befindlichen Fasernabschnitts kann (nach Fig. 281) als der zu dem Drehungswinkel $d\omega$ gehörige Kreisbogen vom Halb-

messer u betrachtet werden und hat die Grösse $u \,.\, d\omega$. Dieser Fasernabschnitt hatte ursprünglich die Länge $\varrho \,.\, d\varphi$. Wenn also mit s die Spannung desselben (pro Flächeneinheit des Querschnitts) und mit E der Elasticitätsmodulus bezeichnet wird, so ist nach dem Elasticitätsgesetze das Verlängerungsverhältniss jenes Fasern-Elements zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad \frac{s}{E} = \frac{u \,.\, d\omega}{\varrho \,.\, d\varphi}.$$

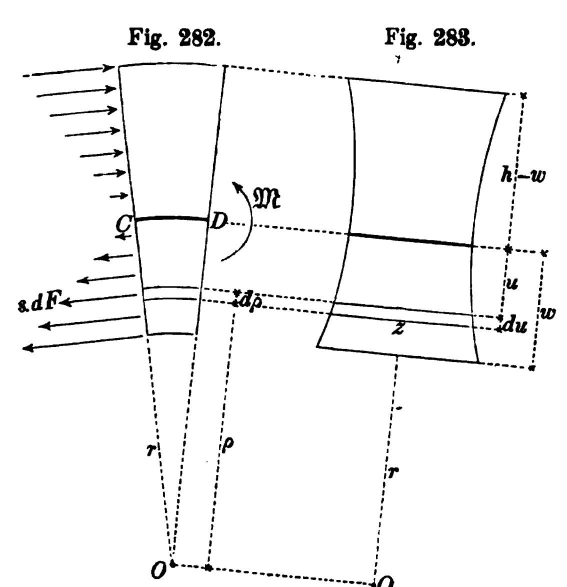
Auf gleiche Weise findet man für das Verlängerungsverhältniss des am stärksten gespannten, im Abstande w von der Neutralen befindlichen Fasern-Elements (nach Fig. 281) den Werth:

$$2)\quad \frac{S}{E} = \frac{w \,.\, d\omega}{r \,.\, d\varphi}.$$

Indem man die erstere Gleichung durch die letztere dividirt, erhält man nunmehr für das Verhältniss der beiden Spannungen die Gleichung:

$$3)\quad \frac{s}{S} = \frac{u \,.\, r}{w \,.\, \varrho}.$$

Da die in einem bestimmten Querschnitte auftretenden Spannungswiderstände in ihrer Gesammtwirkung ein Kräftepaar bilden, so muss ihre algebraische Summe gleich Null sein. Wenn also mit dF die Querschnittsfläche des im Abstande u von der Neutralen befindlichen Fasern-Elements bezeichnet wird, so ist:



$$4)\quad \int s \,.\, dF = 0.$$

Nach Substitution des aus Gleichung 3) für die Grösse s zu entnehmenden Werthes nimmt diese Gleichung die Form an:

$$5)\quad \int\left(\frac{Sr}{w}\right)\frac{u\,.\,dF}{\varrho}=0,$$

und wenn man hierin die Grösse $\frac{Sr}{w}$ als gemeinschaftlichen Factor aller unter dem Integralzeichen zu einer Summe vereinigten Glieder fortlässt, so erhält man die Gleichung:

$$6)\quad \int\frac{u\,.\,dF}{\varrho}=0.$$

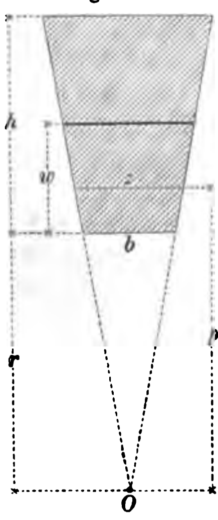
Nach Fig. 282 und Fig. 283 ist $u=r+w-\varrho$ und $dF=z\,.\,d\varrho$ zu setzen. Man kann daher der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$7)\quad \int_{\varrho=r}^{\varrho=r+h}\left(\frac{r+w-\varrho}{\varrho}\right)z\,d\varrho=0,$$

und dieselbe in dieser Form benutzen, um die Lage der neutralen Achse des Querschnitts zu bestimmen.

So z. B. erhält man für den in Fig. 284 dargestellten trapezförmigen Querschnitt, dessen zwei nicht parallele Seiten nach dem Krümmungsmittelpunkte convergiren, indem man $z=b\cdot\frac{\varrho}{r}$ setzt, die Gleichung:

Fig. 284.



$$8)\quad \int_{r}^{r+h}\left(\frac{r+w-\varrho}{\varrho}\right)\frac{b}{r}\,\varrho\,d\varrho=0,$$

welcher man nach Fortlassung des constanten Factors $\frac{b}{r}$ auch die folgende Form geben kann:

$$9)\quad (r+w)\int_{r}^{r+h}d\varrho=\int_{r}^{r+h}\varrho\,d\varrho,\quad\text{oder:}$$

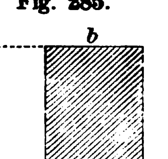
$$10)\quad (r+w)\,h=\frac{(r+h)^2}{2}-\frac{r^2}{2}$$

und findet durch Auflösung der letzteren Gleichung für w den Werth:

$$11)\quad w=\frac{h}{2}.$$

Für den in Fig. 285 dargestellten rechteckigen Querschnitt ist $z = b$ zu setzen in Gleichung 7), und nach Fortlassung des constanten Factors b kann man derselben alsdann die Form geben:

Fig. 285.



$$12)\quad (r + w)\int_r^{r+h} \frac{d\varrho}{\varrho} = \int_r^{r+h} d\varrho, \quad \text{oder:}$$

$$13)\quad (r + w)\lg\left(1 + \frac{h}{r}\right) = h.$$

Wenn man in letzterer Gleichung abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{h}{r} = n$ setzt, so erhält man durch Auflösung derselben für das Verhältniss $\frac{w}{h}$ den Werth:

$$14)\quad \frac{w}{h} = \frac{1}{\lg(1+n)} - \frac{1}{n}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe der beiden Grössen n und $\frac{w}{h}$:

$n =$	10	5	1	0,5	0,1	0.
$\frac{w}{h} =$	0,317	0,358	0,443	0,466	0,492	0,5.

Der Werth $n = 0$ entspricht dem Falle des geraden Balkens, für welchen man (in Uebereinstimmung mit dem in § 2 gefundenen Resultate) den Werth $w = \frac{h}{2}$ erhält.

§ 66.

Reducirte Querschnittsflächen.

Nachdem die Lage der neutralen Achse mittelst des im vorigen Paragraphen erklärten Verfahrens bestimmt worden ist, kann man nunmehr das Gesetz, nach welchem die Biegungsspannungen über die Querschnittsfläche sich vertheilen — auf dieselbe Weise, wie in § 23 in Bezug auf den geraden Balken geschehen — durch Construction der reducirten Querschnittsfläche graphisch darstellen. Die reducirte Querschnittsbreite v ist (wie in § 23) zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad \frac{v}{z} = \frac{s}{S},$$

welche nach Substitution des in Gleichung 3) des vorigen Paragraphen für das Verhältniss $\frac{s}{S}$ gefundenen Werthes die Form annimmt:

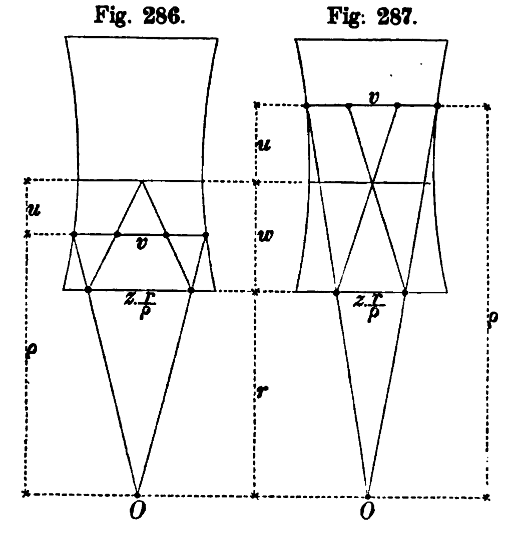


Fig. 286. Fig. 287.

$$2) \quad \frac{v}{z} = \left(\frac{r}{\varrho}\right)\left(\frac{u}{w}\right).$$

Man findet also die reducirte Querschnittsbreite v, indem man die wirkliche Querschnittsbreite z zunächst mit dem Verhältniss $\frac{r}{\varrho}$ und hierauf noch mit dem Verhältniss $\frac{u}{w}$ multiplicirt.

Die Art und Weise, wie diese beiden Multiplicationen auf graphischem Wege ausgeführt werden können, ist in Fig. 286 und Fig. 287 angedeutet, während in Fig. 288 die aus dieser Construction hervorgehende Form der reducirten Querschnittsfläche selbst dargestellt ist.

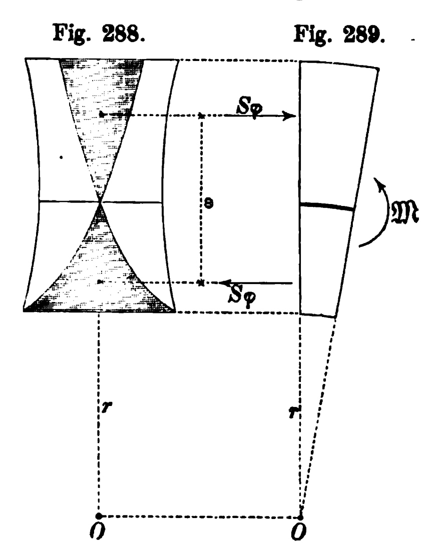


Fig. 288. Fig. 289.

Wenn mit φ der Flächeninhalt jeder von den beiden Hälften der reducirten Querschnittsfläche, und mit ε der Abstand zwischen ihren beiden Schwerpunkten bezeichnet wird, so ist die Biegungs-Spannung S nach Fig. 289 zu berechnen aus der Gleichung:

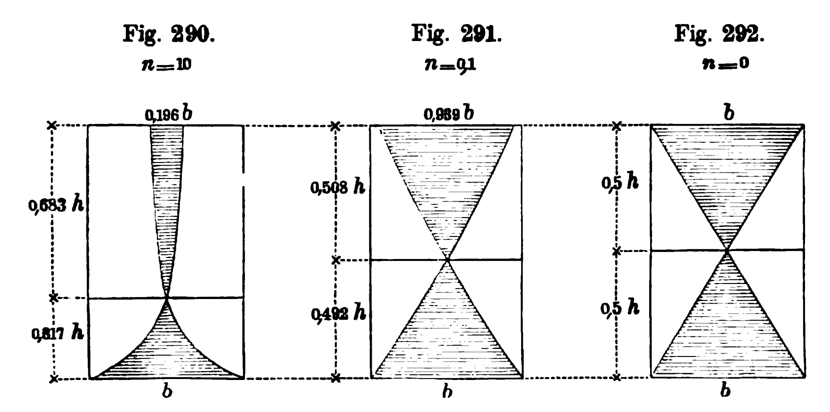
$$3) \quad S\varphi \,.\, \varepsilon = \mathfrak{M}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt erhält man mit Benutzung der am Schlusse des vorigen Paragraphen für w berechneten Werthe die in Fig. 290, Fig. 291, Fig. 292 dargestellten Formen der reducirten Querschnittsfläche. Die letztere Figur entspricht

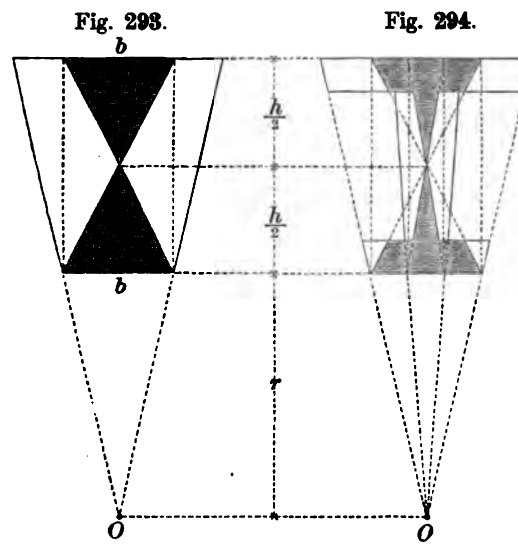
dem Falle des **geraden** Balkens, für welchen die Gleichung 3) die Form annimmt:

$$4)\quad \frac{S b h^2}{6} = \mathfrak{M}.$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für den trapezförmigen Querschnitt Fig. 293, dessen zwei nichtparallele Seiten nach dem



Krümmungsmittelpunkte convergiren, da die reducirte Querschnittsfläche hier genau dieselbe Form hat wie in Fig. 292. Auf gleiche Weise überzeugt man sich, dass bei der in Fig. 294 dargestellten Querschnittsform des **krummen** Balkens die Biegungs-Spannung S genau auf dieselbe Weise berechnet werden kann, wie für den **geraden** Balken bei der in Fig. 116 dargestellten Querschnittsform, insofern die reducirten Querschnittsflächen in beiden Fällen genau übereinstimmen. Die



letzteren beiden Figuren zeigen, dass auch für den krummen Balken die Biegungs-Spannung nach der Gleichung 11) des § 2:

$$5) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = \mathfrak{M}.$$

berechnet werden darf, sobald darin für $\mathfrak{T}$ — statt des Trägheitsmoments der wirklichen Querschnittsfläche — das Trägheitsmoment derjenigen Querschnittsfläche gesetzt wird, welche ein gerader Balken haben müsste, wenn seine reducirte Querschnittsfläche mit derjenigen des krummen Balkens übereinstimmen soll.

§ 67.

Berechnung der grössten Biegungs-Spannung.

Die Summe der statischen Momente sämmtlicher Biegungs-Spannungen in Bezug auf die neutrale Achse muss gleich dem Momente des biegenden Kräftepaares sein. Nach Fig. 282 und Fig. 283 ist also:

$$1) \quad \int s\, dF \,.\, u = \mathfrak{M}$$

zu setzen, und wenn man hierin die in § 65 bereits gefundenen Werthe:

$$s = \frac{S r u}{\varrho w}, \quad dF = z\, d\varrho, \quad u = r + w - \varrho$$

substituirt, so erhält man zur Bestimmung der Grösse S die folgende Gleichung:

$$2) \quad \frac{S r}{w} \int\limits_r^{r+h} \frac{(r + w - \varrho)^2\, z\, d\varrho}{\varrho} = \mathfrak{M}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 285) nimmt diese Gleichung die Form an:

$$3) \quad \frac{S r b}{w} \int\limits_r^{r+h} \frac{(r + w - \varrho)^2\, d\varrho}{\varrho} = \mathfrak{M}, \quad \text{oder:}$$

$$4) \quad \frac{S r b}{w} \left\{ (r + w)^2 \int\limits_r^{r+h} \frac{d\varrho}{\varrho} - 2\,(r + w) \int\limits_r^{r+h} d\varrho + \int\limits_r^{r+h} \varrho\, d\varrho \right\} = \mathfrak{M},$$

und durch Ausführung der angedeuteten Integration gelangt man zu der Gleichung:

$$5) \quad \frac{S r b}{w} \left\{ (r + w)^2 \lg \left(\frac{r + h}{r} \right) - 2\,(r + w)\, h + \frac{(r + h)^2 - r^2}{2} \right\} = \mathfrak{M}.$$

Wenn man hierin wiederum $\frac{h}{r} = n$ setzt und zugleich für w den aus der Gleichung 14) des § 65 zu entnehmenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$6)\quad S b h^2 \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \lg(1+n) - 1}{n - \lg(1+n)} \right\} = \mathfrak{M},$$

aus welcher für die grösste Biegungs-Spannung der folgende Werth sich ergiebt:

$$7)\quad S = \left(\frac{\mathfrak{M}}{\frac{1}{6} b h^2} \right) \left\{ \frac{\frac{1}{6}\left[n - \lg(1+n)\right]}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \lg(1+n) - 1} \right\}.$$

Der erste eingeklammerte Factor auf der rechten Seite bedeutet die grösste Biegungs-Spannung, welche in einem geradlinigen Balken von demselben Querschnitte durch das biegende Kräftepaar hervorgebracht werden würde. Um also für den krummlinigen Balken die grösste Biegungs-Spannung zu berechnen, hat man den für den geradlinigen Balken gefundenen Werth noch mit dem Factor:

$$8)\quad N = \frac{\frac{1}{6}\left[n - \lg(1+n)\right]}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \lg(1+n) - 1}$$

zu multipliciren, welcher als eine Function der Verhältnisszahl $n = \frac{h}{r}$ aus den gegebenen Werthen der Grössen h und r nach Gleichung 8) berechnet werden kann. Für die Grössen n und N erhält man aus obiger Gleichung z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$n =$ 10	5	1	0,5	0,1	0
$N =$ 2,888	2,103	1,287	1,154	1,033	1.

Diese Tabelle zeigt, dass bei sehr kleinen Werthen des Verhältnisses $\frac{h}{r}$ der Fehler verhältnissmässig klein ist, welchen man begeht, indem man die grösste Biegungs-Spannung auf dieselbe Weise wie bei dem geraden Balken berechnet.

§ 68.

Differenzial-Gleichung der elastischen Linie.

Die Untersuchungen der vorhergehenden drei Paragraphen führten zu dem Ergebnisse: dass es bei schwach gekrümmten

Balken zulässig ist, sowohl die Lage der neutralen Achse als auch die grösste Biegungs-Spannung auf dieselbe Weise wie bei dem geraden Balken zu berechnen.

Wenn also — wie bei den nachfolgenden Untersuchungen stets vorausgesetzt werden soll — die Höhe des Querschnitts sehr klein ist im Verhältniss zum Krümmungshalbmesser der krummen Achsenlinie des Balkens, so darf man die in § 2 für den geraden Balken gefundene Gleichung:

$$1)\quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$$

auch für den krummen Balken als gültig betrachten. Auch ist es unter dieser Voraussetzung zulässig, in Gleichung 2) des § 65 das Bogenelement $r \,.\, d\varphi$ zu vertauschen mit dem Bogenelemente der Achsenlinie des Balkens. Nach Fig. 295 nimmt jene Gleichung alsdann die Form an:

Fig. 295.

$$2)\quad \frac{S}{E} = \frac{w \,.\, d\omega}{ds},$$

und man erhält nunmehr durch Gleichsetzung der aus den obigen beiden Gleichungen für die Grösse S zu entnehmenden Werthe die Gleichung:

$$3)\quad E\mathfrak{T}\, d\omega = \mathfrak{M}\, ds.$$

In dieser Gleichung bedeutet $d\omega$ die Aenderung des Convergenzwinkels der beiden benachbarten Querschnitts-Ebenen, zwischen welchen das Bogenelement ds liegt. Diese Aenderung wird in einer Abnahme des ursprünglichen Convergenzwinkels $d\varphi$ bestehen, wenn das biegende Kräftepaar auf die in Fig. 295 angegebene Weise wirkt; in einer Zunahme dagegen, wenn dasselbe auf die in Fig. 296 angegebene Weise wirkt.

Wenn man die obige Gleichung integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen 0 und ω, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen 0 und s — so erhält man für die Summe der Convergenzwinkel-Aenderungen in sämmtlichen Elementen des ganzen Balkenstückes AM in Fig. 297 die Gleichung:

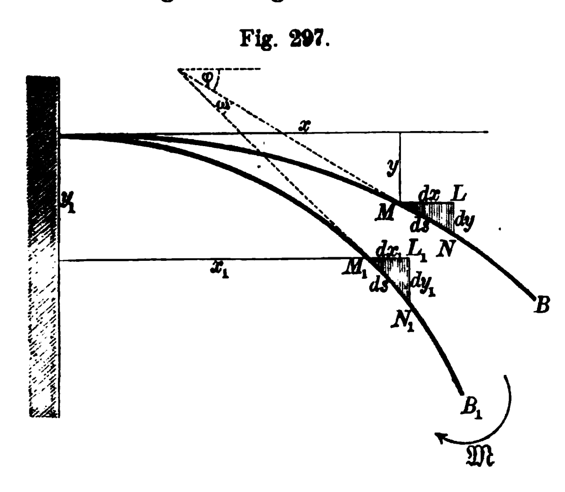
Fig. 296.

$$4)\quad E\mathfrak{T}\,\omega = \int_0^s \mathfrak{M}\,.\,ds = \mathfrak{M}\,s,$$

aus welcher man die in Folge der Biegung eingetretene Richtungsänderung der in dem Punkte M an die krumme Achsenlinie gelegten Tangente berechnen kann. Bei der ursprünglichen Form des Balkens bildete das Bogenelement MN den Winkel φ mit der Horizontalen, und in Folge der Biegung ist dieser Winkel um die Grösse ω gewachsen. Da stets sehr kleine Formänderungen vorausgesetzt werden, so ist es zulässig, den Winkel ω als einen im Verhältniss zu dem Winkel φ unendlich kleinen Zuwachs desselben zu behandeln.

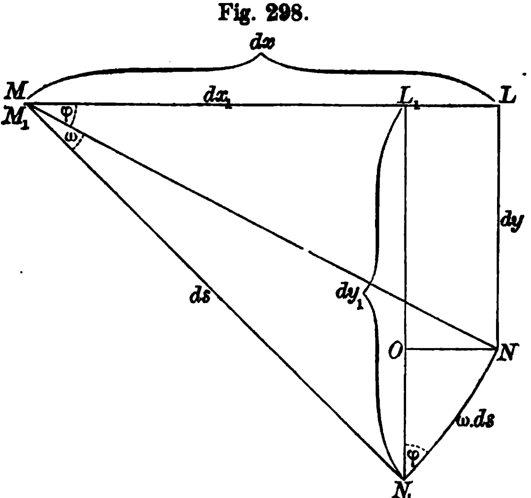
Um die Lagenveränderung des Bogenelements MN zu bestimmen, hat man sich die beiden (in Fig. 297 schraffirten) unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke MLN und $M_1L_1N_1$ auf die in Fig. 298 angedeutete Weise bei unverändert bleibenden Richtungen ihrer Seiten so aufeinander gelegt zu denken, dass die beiden Endpunkte M und M_1 zusammenfallen. Man erkennt dann, dass die Verbindungslinie NN_1 in dieser Figur als der zu dem sehr kleinen Winkel ω gehörige Kreisbogen vom Halbmesser ds betrachtet, folglich gleich $\omega\,.\,ds$ gesetzt werden darf. Da der Bogen rechtwinkelig zum Halbmesser gerichtet ist, so hat der Winkel,

Fig. 297.



welchen die Linie NN_1 mit der Verticalen einschliesst, dieselbe Grösse wie der Winkel φ, welchen die Linie MN mit der Horizontalen einschliesst. Indem man die Grösse $\cos\varphi$ das eine Mal aus dem rechtwinkeligen Dreieck ONN_1, das andere Mal aus dem rechtwinkeligen Dreieck MLN berechnet, erhält man die Gleichungen:

Fig. 298.



$$\cos\varphi = \frac{dy_1 - dy}{\omega \,.\, ds} = \frac{dx}{ds}, \text{ oder:}$$

$$5)\quad \omega = \frac{dy_1 - dy}{dx},$$

und wenn man auf gleiche Weise in Bezug auf die Grösse $\sin\varphi$ verfährt, so erhält man die Gleichungen:

$$\sin\varphi = \frac{dx - dx_1}{\omega \,.\, ds} = \frac{dy}{ds}, \quad \text{oder:}$$

$$6)\quad \omega = \frac{dx - dx_1}{dy}.$$

Diese beiden Werthe hat man in Gleichung 4) für ω zu substituiren, worauf man durch Ausführung der zweiten Integration die Verschiebungen des Punktes M resp. in horizontaler und verticaler Richtung aus derselben berechnen kann.

§ 69.

Balken mit kreisbogenförmiger Achse.

Wenn bei der ursprünglichen Form des Balkens die Achse desselben nach einem Kreisbogen gekrümmt war, so hat man in den Gleichungen des vorigen Paragraphen nach der in Fig. 299 gewählten Bezeichnungsweise die folgenden Werthe zu substituiren:

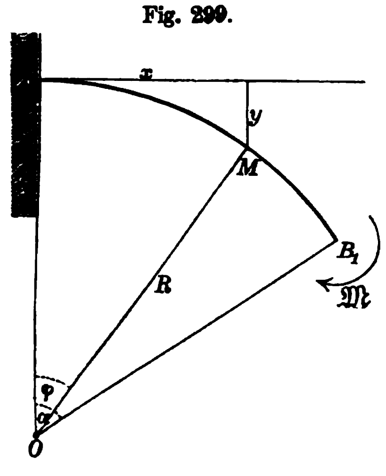
$$s = R\varphi, \qquad x = R\sin\varphi, \qquad y = R(1 - \cos\varphi),$$
$$ds = R\,d\varphi, \qquad dx = R\cos\varphi\,d\varphi, \qquad dy = R\sin\varphi\,d\varphi.$$

Die Gleichung 4) des vorigen Paragraphen nimmt alsdann die Form an:

$$1)\quad E\mathfrak{T}\omega = \mathfrak{M}R\varphi.$$

Um die bei der Biegung eintretende Senkung des Punktes M zu berechnen, hat man hierin für ω den in Gleichung 5) des vorigen Paragraphen gefundenen Werth zu substituiren, man erhält dann die Gleichung:

Fig. 299.



$$2)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dy_1 - dy}{dx}\right) = \mathfrak{M} R \varphi,$$

welche mit dx multiplicirt, nach Substitution des oben für dx angegebenen Werthes die Form annimmt:

$$3)\quad E\mathfrak{T}\,(dy_1 - dy) = \mathfrak{M} R^2\, \varphi \cos \varphi \, d\varphi.$$

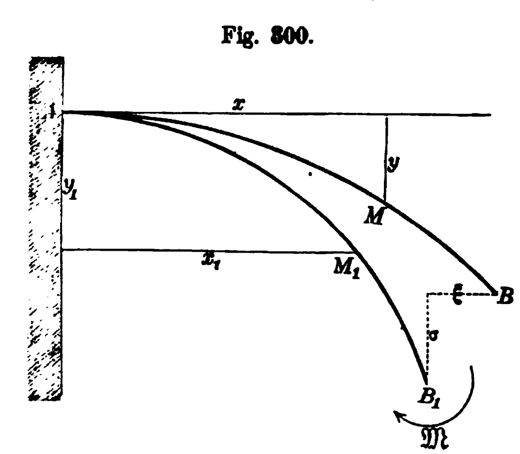
Durch Integration derselben erhält man nunmehr für die Senkung des Punktes M die Gleichung:

$$E\mathfrak{T}\,(y_1 - y) = \mathfrak{M} R^2 \int_0^{\varphi} \varphi \cos \varphi \, d\varphi, \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad E\mathfrak{T}\,(y_1 - y) = \mathfrak{M} R^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1).$$

Um die Horizontal-Verschiebung des Punktes M zu berechnen, hat man den in Gleichung 6) des vorigen Paragraphen für ω gefundenen Werth in Gleichung 1) zu substituiren. Man erhält dann die Gleichung:

Fig. 300.



$$5)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dx - dx_1}{dy}\right) = \mathfrak{M} R \varphi,$$

welche mit dy multiplicirt, nach Substitution des oben für dy angegebenen Werthes die Form annimmt:

$$6)\quad E\mathfrak{T}\,(dx - dx_1) = \mathfrak{M} R^2\, \varphi \sin \varphi \, d\varphi.$$

Durch Integration derselben erhält man für die Horizontal-Verschiebung des Punktes M die Gleichung:

$$E\mathfrak{T}(x - x_1) = \mathfrak{M}R^2 \int_0^\varphi \varphi \sin\varphi\, d\varphi, \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad E\mathfrak{T}(x - x_1) = \mathfrak{M}R^2 (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Um die Verschiebungen des Endpunktes B zu berechnen, hat man in den Gleichungen 4) und 7) den Werth $\varphi = \alpha$ zu substituiren, und erhält dann nach Fig. 300 die beiden Gleichungen:

$$8)\quad E\mathfrak{T}\sigma = \mathfrak{M}R^2 (\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1),$$

$$9)\quad E\mathfrak{T}\xi = \mathfrak{M}R^2 (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

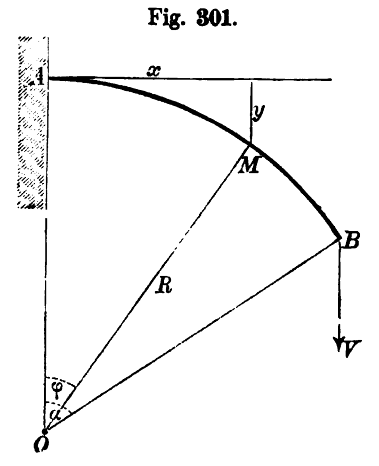
Auf dieselbe Weise würde man die allgemeine Gleichung 1), indem man darin ebenfalls $\varphi = \alpha$ setzt, dazu benutzen können, um die Aenderung der Tangentenrichtung für den Endpunkt B zu berechnen.

§ 70.

Berechnung der von einer Verticalkraft hervorgebrachten Durchbiegung.

In den vorhergehenden Paragraphen wurde stets vorausgesetzt, dass die Biegung des Balkens durch ein am freien Ende desselben wirkendes Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{M}$ hervorgebracht wurde, dass also das Biegungsmoment in allen Punkten der Achsenlinie den constanten Werth $\mathfrak{M}$ hatte. Wenn es statt dessen eine am freien Endpunkte des Balkens wirkende Verticalkraft ist, welche die Biegung hervorbringt, so hat man in der allgemeinen Gleichung der elastischen Linie (§ 68, Gleichung 4):

Fig. 301.



$$1)\quad E\mathfrak{T}\omega = \int_0^s \mathfrak{M}\, ds$$

für das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$, als eine von s abhängige veränderliche Grösse, nach Fig. 301 den Werth:

$$2)\quad \mathfrak{M} = VR(\sin\alpha - \sin\varphi)$$

zu substituiren, und wenn man ausserdem wieder $ds = R\,d\varphi$ setzt, so erhält man die Gleichung:

$$E\mathfrak{T}\omega = VR^2\int_0^\varphi (\sin\alpha - \sin\varphi)\, d\varphi, \quad \text{oder:}$$

$$3)\quad E\mathfrak{T}\omega = VR^2 (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1).$$

Um die Vertical-Verschiebung des Punktes M zu berechnen, hat man den in Gleichung 5) des § 68 gefundenen Ausdruck für ω einzusetzen und hierauf (nach Substitution des Werthes $dx = R\cos\varphi\, d\varphi$) die Integration auszuführen. Man gelangt dann zu den folgenden Gleichungen:

$$4)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dy_1 - dy}{dx}\right) = VR^2 (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1),$$

$$5)\quad E\mathfrak{T}\,(dy_1 - dy) = VR^3 (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1) \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$6)\quad E\mathfrak{T}\,(y_1 - y) = VR^3 \int_0^\varphi (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1) \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$7)\quad E\mathfrak{T}\,(y_1 - y) = VR^3 \left\{\sin\alpha\,(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1) + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} - \sin\varphi\right\}.$$

Um die Horizontal-Verschiebung des Punktes M zu berechnen, hat man den in Gleichung 6) des § 68 gefundenen Ausdruck für ω in Gleichung 3) einzusetzen und (nach Substitution des Werthes $dy = R\sin\varphi\, d\varphi$) die Integration auszuführen. Man erhält dann die Gleichungen:

$$8)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dx - dx_1}{dy}\right) = VR^2 (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1),$$

$$9)\quad E\mathfrak{T}\,(dx - dx_1) = VR^3 (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1) \sin\varphi d\varphi,$$

$$10)\quad E\mathfrak{T}\,(x - x_1) = VR^3 \int_0^\varphi (\varphi \sin\alpha + \cos\varphi - 1) \sin\varphi\, d\varphi,$$

$$11)\quad E\mathfrak{T}\,(x - x_1) = VR^3 \left\{\sin\alpha\,(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \frac{\sin\varphi^2}{2} - (1 - \cos\varphi)\right\}.$$

Die im vorigen Paragraphen mit σ und ξ bezeichneten Grössen, um welche der Endpunkt B resp. in verticaler und horizontaler Richtung verschoben wird, kann man nunmehr aus den Gleichungen 7) und 11) berechnen, indem man darin $\varphi = \alpha$ setzt. Für jene Grössen ergeben sich alsdann die beiden Gleichungen:

$$12)\quad E\mathfrak{T}\sigma = VR^3 \left\{\alpha\left(\frac{1}{2} + \sin\alpha^2\right) + \frac{3}{4}\sin 2\alpha - 2\sin\alpha\right\},$$

$$13)\quad E\mathfrak{T}\xi = VR^3 \left\{\frac{3}{2}\sin\alpha^2 + \cos\alpha - 1 - \frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha\right\}.$$

§ 71.

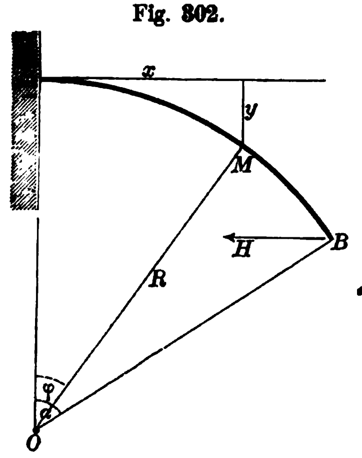
Berechnung der von einer Horizontalkraft hervorgebrachten Durchbiegung.

Nach Fig. 302 hat man für das Biegungsmoment an der Stelle M den Werth:

$$1)\quad \mathfrak{M} = HR(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

zu substituiren, und die Gleichung 4) des § 68 nimmt für diesen Fall die Form an:

Fig. 302.



$$E\mathfrak{T}\,\omega = HR^2\int_0^{\varphi}(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\varphi$$

oder:

$$2)\quad E\mathfrak{T}\,\omega = HR^2(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha).$$

Um die Vertical-Verschiebung des Punktes M zu berechnen, hat man hierin für ω den in Gleichung 5) des § 68 gefundenen Ausdruck einzusetzen und hierauf (nach Substitution des Werthes $dx = R\cos\varphi\,d\varphi$) die Integration auszuführen. Man gelangt dann zu den folgenden Gleichungen:

$$3)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dy_1 - dy}{dx}\right) = HR^2(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha),$$

$$4)\quad E\mathfrak{T}(dy_1 - dy) = HR^3(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha)\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$5)\quad E\mathfrak{T}(y_1 - y) = HR^3\int_0^{\varphi}(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha)\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$6)\quad E\mathfrak{T}(y_1 - y) = HR^3\left\{\frac{\sin\varphi^2}{2} + \cos\alpha\,(1 - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\right\}.$$

Um die Horizontal-Verschiebung des Punktes M zu berechnen, hat man den in Gleichung 6) des § 68 gefundenen Ausdruck für ω in Gleichung 2) einzusetzen, und (nach Substitution des Werthes $dy = R\sin\varphi\,d\varphi$) die Integration derselben auszuführen. Man erhält dann die folgenden Gleichungen:

$$7)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dx - dx_1}{dy}\right) = HR^2(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha),$$

8) $E\mathfrak{T}(dx - dx_1) = HR^3 (\sin\varphi - \varphi\cos\alpha)\sin\varphi\, d\varphi,$

9) $E\mathfrak{T}(x - x_1) = HR^3 \int_0^{\varphi} (\sin\varphi - \varphi\cos\alpha)\sin\varphi\, d\varphi,$

10) $E\mathfrak{T}(x - x_1) = HR^3 \left\{\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \cos\alpha(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)\right\}.$

Die in § 69 mit σ und ξ bezeichneten Grössen, um welche der Endpunkt B resp. in verticaler und horizontaler Richtung verschoben wird, kann man nunmehr aus den Gleichungen 6) und 10) berechnen, indem man darin $\varphi = \alpha$ setzt. Für jene Grössen ergeben sich alsdann die beiden Gleichungen:

11) $E\mathfrak{T}\sigma = HR^3 \left\{\frac{3}{2}\sin\alpha^2 - \frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha + \cos\alpha - 1\right\},$

12) $E\mathfrak{T}\xi = HR^3 \left\{\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha^2) - \frac{3}{4}\sin 2\alpha\right\}.$

§ 72.

Correction wegen Längen-Aenderung der Balken-Achse.

Bei Ableitung der in den vorigen beiden Paragraphen für die Grössen σ und ξ gefundenen Gleichungen wurden ausschliesslich diejenigen Formänderungen des Balkens berücksichtigt, welche durch das in jedem seiner Querschnitte wirkende Biegungsmoment und die demselben entsprechenden Biegungs-Spannungen bedingt werden. Diese Berechnungsweise ist nur dann als zulässig zu betrachten, wenn es sich nachweisen lässt, dass die gleichzeitig stattfindende Längen-Aenderung der Balken-Achse als verschwindend klein vernachlässigt werden darf. Andernfalls würden jene Gleichungen noch einer Correction bedürfen, insofern man die aus Fig. 303 zu entnehmenden Werthe:

Fig. 303.

1) $\sigma' = \lambda\sin\alpha$ und 2) $\xi' = \lambda\cos\alpha,$

als die von der Längen-Aenderung λ herrührenden Beiträge, resp. noch zu den Grössen σ und ξ (in positivem oder negativem Sinne) hinzufügen müsste, um die wirklich stattfindenden Verschiebungen des Endpunktes B zu erhalten.

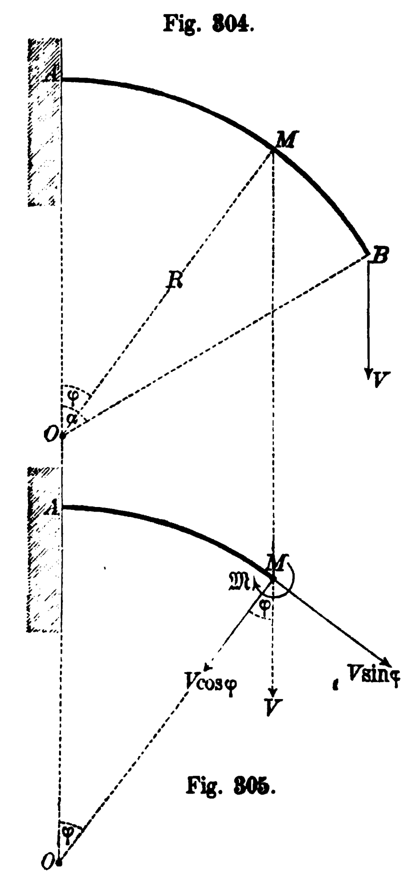


Fig. 304.

Fig. 305.

Denkt man sich bei dem in Fig. 304 dargestellten Falle den Balken an der Stelle M durchschnitten, so erkennt man, dass es die in Fig. 305 angegebenen Kräfte sind, welche man bei dem Theile AM an der Schnittstelle M hinzufügen müsste, um den früheren Zustand wieder herzustellen. Dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ entsprechen die Biegungs-Spannungen, durch welche die Krümmung des daselbst befindlichen Balken-Elements verändert wird. Ausserdem wird die tangential gerichtete Seitenkraft $V \sin \varphi$ eine gleichförmig über die Querschnittsfläche vertheilte Zug-Spannung in demselben hervorbringen, und wenn mit F die Grösse der Querschnittsfläche bezeichnet wird, so hat diese Zug-Spannung pro Flächeneinheit die Grösse:

$$3)\quad S = \frac{V \sin \varphi}{F}.$$

Das an der Stelle M befindliche Bogen-Element $R \,.\, d\varphi$ wird in Folge dessen eine Verlängerung $d\lambda$ erleiden, welche nach dem Elasticitätsgesetze zu berechnen ist aus der Gleichung:

$$4)\quad \frac{d\lambda}{R\, d\varphi} = \frac{S}{E}.$$

Nach Substitution des oben für S gefundenen Werthes nimmt diese Gleichung für $d\lambda$ aufgelöst die Form an:

$$5)\quad d\lambda = \frac{VR \sin \varphi\, d\varphi}{EF},$$

und man erhält durch Integration derselben für die ganze Verlängerung der Balken-Achse den Werth:

$$6)\quad \lambda = \frac{VR}{EF}\int_0^\alpha \sin\varphi\, d\varphi = \frac{VR\,(1-\cos\alpha)}{EF}.$$

Hiernach ergeben sich aus den Gleichungen 1) und 2) für die oben erwähnten Correctionen die Werthe:

$$7)\quad \sigma' = \frac{VR\,(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{EF},\qquad 8)\quad \xi' = \frac{VR\,(1-\cos\alpha)\cos\alpha}{EF}.$$

Eine Vergleichung derselben mit den in § 70 für die Grössen σ und ξ gefundenen Gleichungen zeigt, dass diese Correctionen nur dann überflüssig sind, wenn das Verhältniss $\frac{\mathfrak{T}}{FR^2}$ sehr klein ist, d. h. wenn der Krümmungshalbmesser R sehr gross ist im Verhältniss zu den Querschnittsdimensionen.

Fig. 306.

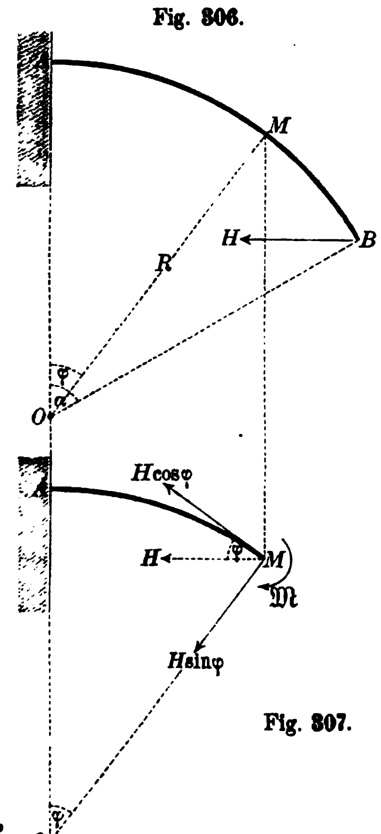


Fig. 307.

Auf ähnliche Weise sind die Correctionen zu berechnen für den in § 71 behandelten Fall einer horizontal gerichteten biegenden Kraft. Nach Fig. 306 und Fig. 307 erhält man für diesen Fall die den obigen analog gebildeten Gleichungen:

$$9)\quad S = \frac{H\cos\varphi}{F},$$

$$10)\quad \frac{d\lambda}{R\,.\,d\varphi} = \frac{S}{E}.$$

$$11)\quad d\lambda = \frac{HR\cos\varphi\, d\varphi}{EF},$$

$$12)\quad \lambda = \frac{HR}{EF}\int_0^\alpha \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$13)\quad \lambda = \frac{HR}{EF}\sin\alpha,$$

$$14)\quad \sigma' = \frac{HR\sin\alpha^2}{EF},\qquad 15)\quad \xi' = \frac{HR\sin\alpha\cos\alpha}{EF},$$

in welchen die Grösse S als eine Druck-Spannung und die Grösse λ als Verkürzung der Balken-Achse aufzufassen ist.

Bei Vergleichung der letzteren beiden Ausdrücke mit den in § 71 für die Grössen σ und ξ gefundenen Gleichungen erkennt man, dass im Allgemeinen auch hier die Correctionen überflüssig sind, sobald das Verhältniss $\frac{\mathfrak{T}}{FR^2}$ als sehr klein vorausgesetzt werden darf. Nur in dem einen Falle, wenn α sehr klein und zugleich R sehr gross ist — d. h. wenn der Balken eine nahezu geradlinige Form hat — wird die nach Gleichung 15) zu berechnende Correction nicht mehr als überflüssig betrachtet werden dürfen. Wenn man nämlich $R = \infty$, ferner $\alpha = 0$ und zugleich $R \cdot \alpha = l$ setzt, so erhält man aus Gleichung 15) den Werth:

$$16) \quad \xi' = \frac{Hl}{EF},$$

während nach § 71 für die Grösse ξ der Werth Null sich ergeben würde. Bei sehr schwach gekrümmten Balken darf daher die von einer Horizontalkraft H hervorgebrachte Horizontal-Verschiebung des Endpunktes B nicht unmittelbar nach der Gleichung 12) des § 71 berechnet werden; es muss vielmehr zu dem aus jener Gleichung für ξ zu entnehmenden Werthe noch die oben in Gleichung 15) gefundene Grösse ξ' hinzu addirt werden.

§ 73.

Wirkung eines an beliebiger Stelle hängenden Gewichtes.

Die Grössen σ_1 und ξ_1, um welche der Belastungspunkt selbst resp. in verticaler und in horizontaler Richtung verschoben wird, kann man unmittelbar aus den Gleichungen 12) und 13) des § 70 berechnen, indem man darin Q statt V und φ statt α setzt (Fig. 308 und Fig. 309). Man erhält dann für jene Verschiebungen die Werthe:

$$1) \quad \sigma_1 = \frac{QR^3}{E\mathfrak{T}} \left\{ \varphi \left(\frac{1}{2} + \sin \varphi^2 \right) + \frac{3}{4} \sin 2\varphi - 2 \sin \varphi \right\},$$

$$2) \quad \xi_1 = \frac{QR^3}{E\mathfrak{T}} \left\{ \frac{3}{2} \sin \varphi^2 + \cos \varphi - 1 - \frac{\varphi}{2} \sin 2\varphi \right\}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für den Winkel ω, um welchen die Tangentenrichtung an der Stelle M gedreht wurde, aus der Gleichung 3) des § 70 den Werth:

$$3) \quad \omega = \frac{QR^2}{E\mathfrak{T}} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1).$$

Bei der Biegung des Balkens geht das Stück MB, ohne seine Form dabei zu ändern, in die neue Lage $M_1 B_1$ über, und die Sehne MB führt dabei eine Bewegung aus, welche auf die in Fig. 310 angedeutete Weise zerlegt werden kann in eine fortschreitende Bewegung und eine Drehbewegung. Bei der fortschreitenden Bewegung (aus der Lage MB nach der Lage $M_1 C$) legt der Endpunkt B in verticaler Richtung die Strecke σ_1, in horizontaler Richtung die Strecke ξ_1 zurück. In Folge der ausserdem noch stattfindenden Drehung (aus der Lage $M_1 C$ in die Lage $M_1 B_1$) kommt zu der Verticalverschiebung noch die Strecke σ_2, zu der Horizontalverschiebung noch die Strecke ξ_2 hinzu. Für die letzteren beiden Verschiebungen ergeben sich aus Fig. 310 die Ausdrücke:

Fig. 308.

$$4)\quad \sigma_2 = \varrho\,\omega \cos\psi = R(\sin\alpha - \sin\varphi)\,\omega,$$

$$5)\quad \xi_2 = \varrho\,\omega \sin\psi = R(\cos\varphi - \cos\alpha)\,\omega,$$

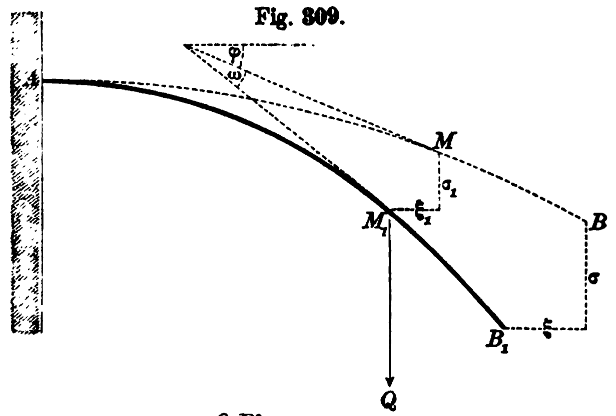


Fig. 309.

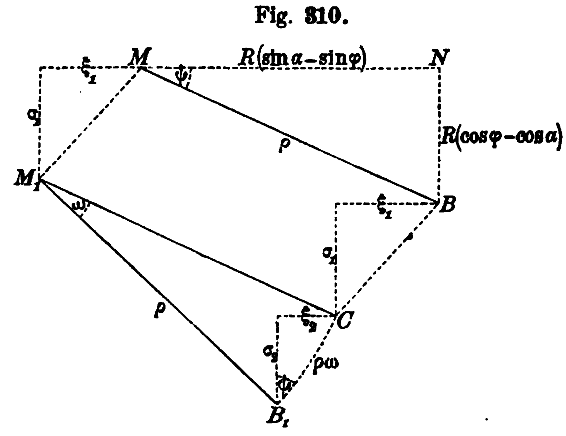
welche nach Substitution des oben in Gleichung 3) für den Winkel ω gefundenen Werthes die folgenden Formen annehmen:

$$6)\quad \sigma_2 = \frac{QR^3}{E\mathfrak{T}}(\sin\alpha - \sin\varphi)(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1),$$

$$7)\quad \xi_2 = \frac{QR^3}{E\mathfrak{T}}(\cos\varphi - \cos\alpha)(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1).$$

Die ganze Verticalverschiebung des Endpunktes B hat die Grösse

Fig. 310.



$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

und die ganze Horizontal-Verschiebung desselben hat die Grösse:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2.$$

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich demnach für diese beiden Verschiebungen die Werthe:

$$8)\quad \sigma = \frac{QR^3}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} - \sin\varphi + \sin\alpha\,(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)\right\},$$

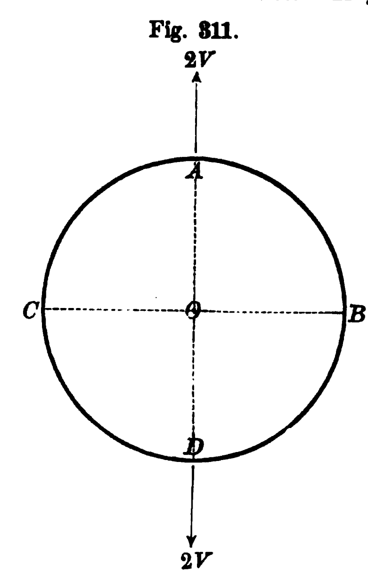
$$9)\quad \xi = \frac{QR^3}{E\mathfrak{T}}\left\{\frac{\sin\varphi^2}{2} + \cos\alpha\,(1 - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\right\}.$$

§ 74.

Spannungen im geschlossenen Kreis-Ringe.

Bei dem in Fig. 311 dargestellten verticalen Ringe, welcher von zwei Verticalkräften im gespannten Gleichgewichts-Zustande gehalten wird, kann man sich den Biegungszustand der oberen Hälfte auf die in Fig. 312 angedeutete Weise veranschaulichen, und wenn man sich in dieser letzteren Figur nachher die eine Hälfte in eine feste Wand eingeschlossen denkt, so gelangt man zu dem in Fig. 313 dargestellten Falle eines krummen Balkens, bei welchem die von dem Kräftepaare und der Verticalkraft hervorgebrachten Biegungen unmittelbar nach den Gleichungen des § 69 und § 70 berechnet werden können.

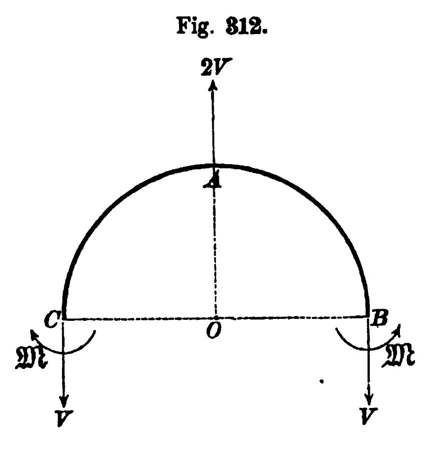
Fig. 311.



Die Formänderung, welche die beiden Verticalkräfte dem Ringe

ertheilten, war jedenfalls so beschaffen, dass die elastische Linie an den beiden Endpunkten des horizontalen Durchmessers ihre ursprüngliche verticale Tangentenrichtung beibehalten hat. Hieraus folgt, dass in Fig. 313 die von dem Kräftepaare und der Verticalkraft hervorgebrachten Aenderungen der Tangentenrichtung an der Stelle B einander gegenseitig aufheben müssen.

Fig. 312.



Für den Winkel, um welchen diese Tangentenrichtung sich drehen würde, wenn das Kräftepaar allein vorhanden wäre, erhält man aus § 69, Gleichung 1), indem man darin $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, den Werth:

$$1)\quad \omega = \frac{\mathfrak{M} R}{E \mathfrak{T}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

und für den Winkel, um welchen jene Tangentenrichtung in entgegengesetztem Sinne sich gedreht haben würde, wenn die Verticalkraft allein vorhanden wäre, findet man auf dieselbe Weise aus § 70, Gleichung 3), den Werth:

Fig. 313.

$$2)\quad \omega = \frac{V R^2}{E \mathfrak{T}} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man für die Grösse $\mathfrak{M}$ den Werth:

$$3)\quad \mathfrak{M} = V R \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Wenn die Verticalkraft V allein vorhanden wäre, so würde — nach § 70, Gleichung 12) — der Endpunkt B sich senken um die Grösse:

$$4)\quad \sigma_1 = \frac{V R^3}{E \mathfrak{T}} \left(\frac{3}{4} \pi - 2\right),$$

und wenn das Kräftepaar allein vorhanden wäre, so würde — nach § 69, Gleichung 8) — der Endpunkt B sich heben um die Grösse:

$$5)\quad \sigma_2 = \frac{\mathfrak{M} R^2}{E\mathfrak{T}} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Die **wirklich** eintretende Senkung des Endpunktes B ist gleich dem Ueberschusse der ersteren über die letztere, hat also die Grösse:

$$6)\quad \sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{VR^3}{E\mathfrak{T}} \left(\frac{3}{4}\pi - 2\right) - \frac{\mathfrak{M} R^2}{E\mathfrak{T}} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

und nach Substitution des oben für $\mathfrak{M}$ gefundenen Ausdrucks erhält man für dieselbe den Werth:

$$7)\quad \sigma = \frac{VR^3}{E\mathfrak{T}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right).$$

Die ganze Verlängerung des verticalen Ringdurchmessers AD (Fig. 311) hat die **doppelte** Grösse, und die von der Kraft $2V$ hervorgebrachte Verlängerung einer aus n solchen Ringen zusammengesetzten **Kette** ist n-mal so gross als die Verlängerung jedes einzelnen Ringdurchmessers, hat also die Grösse:

$$8)\quad \lambda = n \cdot \frac{(2V)R^3}{E\mathfrak{T}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right).$$

Für das Biegungsmoment an der Stelle P ergiebt sich aus Fig. 313 der Ausdruck:

$$9)\quad M = VR(1 - \sin\varphi) - \mathfrak{M},$$

welcher nach Substitution des oben für $\mathfrak{M}$ gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$10)\quad M = VR\left(\frac{2}{\pi} - \sin\varphi\right).$$

Wenn man hierin $\varphi = 0$ setzt, so erhält man für das Biegungsmoment an der Stelle A den Werth:

$$11)\quad M_0 = VR \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Die grösste Biegungsspannung in diesem Querschnitte hat also die Grösse:

$$12)\quad S_0 = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot M_0 = \frac{2VRw}{\pi\mathfrak{T}}.$$

Die grösste Spannung in dem Querschnitte B setzt sich zusammen aus der gleichförmig über die Querschnittsfläche vertheilten Zugspannung $S_1 = \frac{V}{F}$ und der dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ entsprechenden grössten Biegungsspannung $S_2 = \frac{w}{\mathfrak{T}}\mathfrak{M}$, hat also nach Gleichung 3) die Grösse:

13) $$S' = \frac{V}{F} + \frac{w}{\mathfrak{T}}\mathfrak{M} = \frac{V}{F} + \frac{VRw}{\mathfrak{T}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Wenn der Querschnitt ein Kreis ist vom Halbmesser w, so ist $F = w^2\pi$, ferner $\mathfrak{T} = \frac{\pi}{4}w^4$ zu setzen, und man erhält für das Verhältniss jener beiden Spannungen den Werth:

14) $$\frac{S'}{S_0} = 0{,}3927 \cdot \frac{w}{R} + 0{,}57.$$

Da der Quotient $\frac{w}{R}$ immer kleiner ist als Eins, so ist S_0 immer grösser als S'. Die grösste in dem Ringe überhaupt vorkommende Spannung findet also an den beiden Endpunkten des verticalen Durchmessers statt und ist nach der Gleichung 12) zu berechnen, welche für $2V$ aufgelöst, nach Substitution des oben für $\mathfrak{T}$ angegebenen Werthes, die Form annimmt:

15) $$2V = \frac{\pi^2 S_0 w^3}{4R},$$

und in dieser Form auch zur Berechnung der Tragfähigkeit des Ringes benutzt werden kann, wenn darin für S_0 die practisch zulässige Spannung des Materials gesetzt wird.

Für Schmiedeisen würde $S_0 = 6$ Kil. zu setzen sein. Wenn also z. B. $R = 100^{mm}$ und $w = 10^{mm}$ ist, so ergiebt sich aus obiger Gleichung der Werth:
$$2V = 148 \text{ Kil.}$$
Nach Gleichung 7) würde bei dieser Belastung eine Verlängerung des verticalen Ringdurchmessers eintreten von der Grösse:
$$2\sigma = \frac{8VR^3}{\pi E w^4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = 0^{mm},14.$$
Eine aus 100 solchen Ringen zusammengesetzte Kette würde also bei einer Belastung von 148 Kil. um 14 Millimeter sich verlängern.

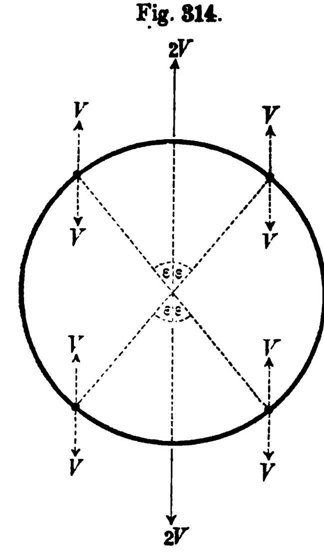
Aus Gleichung 10) ergiebt sich für denjenigen Winkel $\varphi = \varepsilon$, welchem der Werth $M = 0$ entspricht, die Bedingungs-Gleichung:

16) $$\sin\varepsilon = \frac{2}{\pi}, \quad \text{oder:} \quad \varepsilon = 39^\circ 32'.$$

An der Stelle, wo das Biegungsmoment gleich Null ist, würde man den Ring durchschneiden und ein Scharnier einschalten können, ohne dass dadurch in den Spannungszuständen der einzelnen Theile etwas geändert wird. Man kann sich daher den Biegungszustand des Ringes auf die in Fig. 314 dargestellte Weise veranschaulichen, indem man sich an den vier Stellen, deren Radien um den Winkel ε von der Verticalen abweichen, Scharniere eingeschaltet denkt.

Um diejenige Lage zu finden, welche die Scharnierpunkte haben müssten wenn die Maximalspannung des Ringes ein Minimum werden soll, hat man zunächst denjenigen Werth von $\mathfrak{M}$ aufzusuchen, für welchen die beiden Spannungen S_0 und S' einander gleich werden. Indem man die in den Gleichungen 12) und 13) gefundenen beiden Ausdrücke einander gleich setzt und darin zugleich für M_0 den aus der Gleichung 9) zu entnehmenden Werth $M_0 = VR - \mathfrak{M}$ substituirt, erhält man für jenen Werth von $\mathfrak{M}$ die Gleichung:

Fig. 314.



$$17) \quad \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot (VR - \mathfrak{M}) = \frac{V}{F} + \frac{w}{\mathfrak{T}} \mathfrak{M}, \quad \text{oder:}$$

$$18) \quad \mathfrak{M} = \frac{V}{2}\left(R - \frac{\mathfrak{T}}{wF}\right).$$

Nach Substitution dieses Werthes erhält man aus Gleichung 9), indem man wiederum $M = 0$ und zugleich $\varphi = \varepsilon$ setzt, für letzteren Winkel die Gleichung:

$$19) \quad \sin \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{T}}{2wRF} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{w}{R},$$

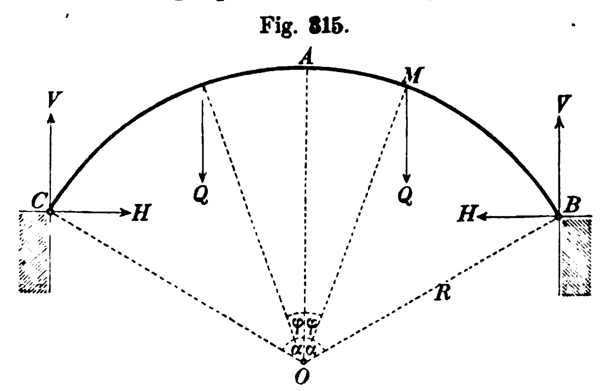
aus welcher sich ergiebt, dass der Winkel ε zwischen den Grenzwerthen $\varepsilon = 30^0$ und $\varepsilon = 38^0 41'$ liegt, welche resp. den Grenzwerthen $\frac{w}{R} = 0$ und $\frac{w}{R} = 1$ entsprechen.

§ 75.

Belasteter Ringbogen mit festliegenden Endpunkten.

Wenn man sich bei dem in Fig. 315 dargestellten symmetrisch belasteten Ringbogen die linksseitige Hälfte in eine feste Wand eingeschlossen denkt, so gelangt man zu dem in Fig. 316 dargestellten Falle eines an der Endfläche A festgehaltenen krummen Balkens, bei welchem die von den drei

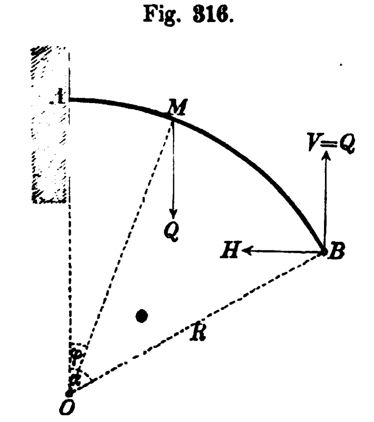
Fig. 315.



biegenden Kräften V, H, Q hervorgebrachten Durchbiegungen — eine jede einzeln genommen — resp. nach den in § 70, § 71, § 73

gefundenen Gleichungen berechnet werden können. Da sowohl hinsichtlich der Form als auch hinsichtlich der wirkenden Kräfte eine vollkommene Symmetrie zwischen den beiden Balkenhälften stattfindet, so wird die hervorgebrachte Formänderung des Balkens jedenfalls so beschaffen sein, dass der Horizontalabstand der beiden Punkte A und B keine Aenderung dabei erleidet. Hieraus folgt, dass die von jenen drei Kräften hervorgebrachten Horizontalverschiebungen des Endpunktes B einander gegenseitig aufheben müssen.

Fig. 316.



Die Kraft $V=Q$ würde für sich allein wirkend eine nach aussen gerichtete Horizontalverschiebung von der Grösse ξ_1 hervorbringen, welche nach der Gleichung 13) des § 70 zu berechnen ist. Die Kraft H würde eine nach innen gerichtete Horizontalverschiebung von der Grösse ξ_2 hervorbringen, welche nach der Gleichung 12) des § 71 zu berechnen ist. Das Gewicht Q würde eine gleichfalls nach innen gerichtete Horizontalverschiebung von der Grösse ξ_3 hervorbringen, welche nach der Gleichung 9) des § 73 zu berechnen ist. Wenn man nunmehr in der Gleichung:

$$1)\quad 0 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

für diese drei Horizontalverschiebungen ihre Werthe substituirt, so erhält man eine Gleichung, welche für H aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$2)\quad H = Q\left\{\frac{\frac{3}{2}\sin\alpha^2 - 1 - \frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sin\varphi^2}{2} + \cos\alpha(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}{\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha^2) - \frac{3}{4}\sin 2\alpha}\right\}.$$

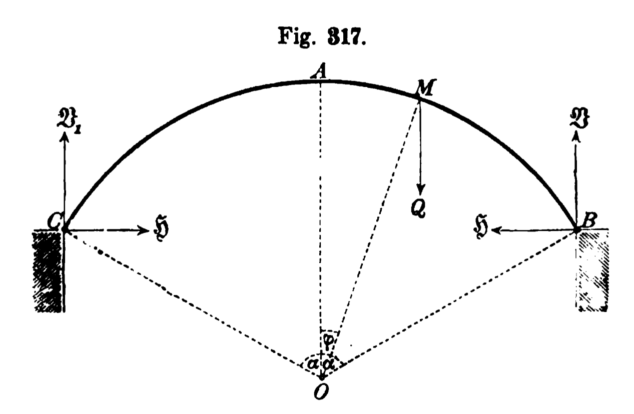
Offenbar liefert zu diesem Horizontaldrucke das an der linken Seite hängende Gewicht Q einen ebenso grossen Beitrag, wie das an der rechten Seite hängende Gewicht Q. Hieraus folgt, dass der Horizontaldruck halb so gross wird, wenn eines von den beiden Gewichten Q hinweggenommen wird. Bei dem in Fig. 317 dar-

gestellten Falle der unsymmetrischen Belastung hat also der Horizontaldruck die Grösse:

$$3)\quad \mathfrak{H} = \frac{Q}{2}\left\{\frac{\frac{3}{2}\sin\alpha^2 - 1 - \frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sin\varphi^2}{2} + \cos\alpha\,(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}{\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha^2) - \frac{3}{4}\sin 2\alpha}\right\}.$$

Wenn man in Fig. 317 die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte gleich Null setzt und dabei das eine Mal den Punkt C, das andere Mal den Punkt B als Drehpunkt wählt, so erhält man die Gleichungen:

Fig. 317.



$$4)\quad 0 = \quad QR\,(\sin\alpha + \sin\varphi) - \mathfrak{V}\ .\ 2R\sin\alpha,$$

$$5)\quad 0 = -\,QR\,(\sin\alpha - \sin\varphi) + \mathfrak{V}_1\ .\ 2R\sin\alpha,$$

aus denen für die verticalen Seitenkräfte der von den beiden Unterstützungspunkten geleisteten Gegendrücke die folgenden Werthe sich ergeben:

$$6)\quad \mathfrak{V} = \frac{Q}{2}\left(1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right),$$

$$7)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right).$$

Mittelst der Gleichungen 3), 6), 7) kann man für jede Lage der Belastung Q die Gegendrücke der beiden Unterstützungspunkte berechnen. Jedoch ist die Gültigkeit der Gleichung für den Horizontaldruck stets an die Bedingung geknüpft: dass die Querschnittshöhe klein ist im Verhältniss zur Pfeilhöhe des Bogens, weil andernfalls die nach § 72 auszuführende Correction erforderlich sein würde.

Wenn man $\alpha = \frac{\pi}{4}$ setzt, so erhält man aus den obigen drei Gleichungen die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{\varphi}{\alpha} = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,
$\frac{\mathfrak{H}}{Q} = 0,910$	0,859	0,716	0,502	0,251	0,
$\frac{\mathfrak{B}}{Q} = 0,5$	0,616	0,719	0,821	0,916	1,
$\frac{\mathfrak{B}_1}{Q} = 0,5$	0,384	0,281	0,179	0,084	0.

Für den Halbkreisbogen ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, und die obigen drei Gleichungen nehmen für diesen Fall die einfacheren Formen an:

$$8) \quad \mathfrak{H} = \frac{Q \cos \varphi^2}{\pi}, \qquad 9) \quad \mathfrak{B} = \frac{Q}{2}(1 + \sin \varphi).$$

$$10) \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{Q}{2}(1 - \sin \varphi).$$

Aus diesen letzteren drei Gleichungen ergeben sich die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{\varphi}{\alpha} = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,
$\frac{\mathfrak{H}}{Q} = 0,318$	0,288	0,208	0,110	0,030	0,
$\frac{\mathfrak{B}}{Q} = 0,5$	0,655	0,794	0,905	0,976	1,
$\frac{\mathfrak{B}_1}{Q} = 0,5$	0,345	0,206	0,095	0,024	0.

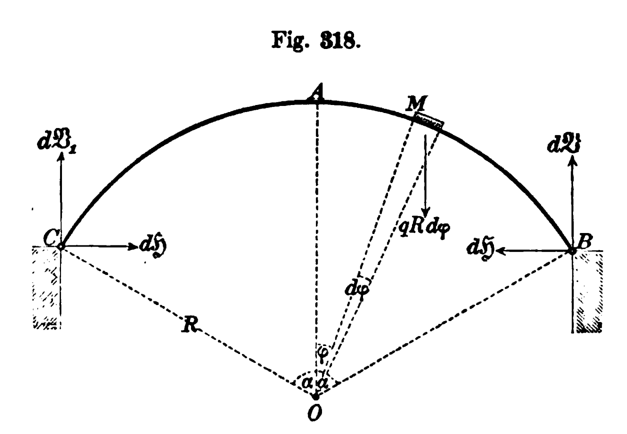
§ 76.

Wirkung einer continuirlich vertheilten Belastung.

Wenn gleichzeitig mehrere Belastungen vorhanden sind, so kann man jeden von den drei Gegendrücken $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ berechnen durch Summation der Beiträge, welche die einzelnen Belastungen zu demselben liefern. Diese Berechnungsweise ist auch dann noch zulässig, wenn die Anzahl der Belastungen unendlich gross und

ihre Vertheilung eine continuirliche ist, in welchem Falle jene Summation auf dem Wege der Integration auszuführen ist.

Fig. 318.



Nach der in Fig. 318 gewählten Bezeichnungsweise nehmen die Gleichungen 3), 6), 7) des vorigen Paragraphen die nachstehenden Formen an:

$$1)\quad d\mathfrak{H} = \frac{q\,R\,d\varphi}{2}\left\{\frac{\frac{3}{2}\sin\alpha^2 - 1 - \frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sin\varphi^2}{2} + \cos\alpha\,(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}{\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha^2) - \frac{3}{4}\sin 2\alpha}\right\}.$$

$$2)\quad d\mathfrak{V} = \frac{q\,R\,d\varphi}{2}\left(1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right),$$

$$3)\quad d\mathfrak{V}_1 = \frac{q\,R\,d\varphi}{2}\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right).$$

Wenn man diese Gleichungen zwischen den Grenzen 0 und φ integrirt (wobei der Factor q als eine constante Grösse zu behandeln ist), so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \mathfrak{H} = q\,R\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\sin\alpha^2 - \frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha\right)\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{8} + \cos\alpha(2\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}{\alpha(1 + 2\cos\alpha^2) - \frac{3}{2}\sin 2\alpha}\right\}.$$

$$5)\quad \mathfrak{V} = \frac{qR}{2}\left\{\varphi + \left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin\alpha}\right)\right\},$$

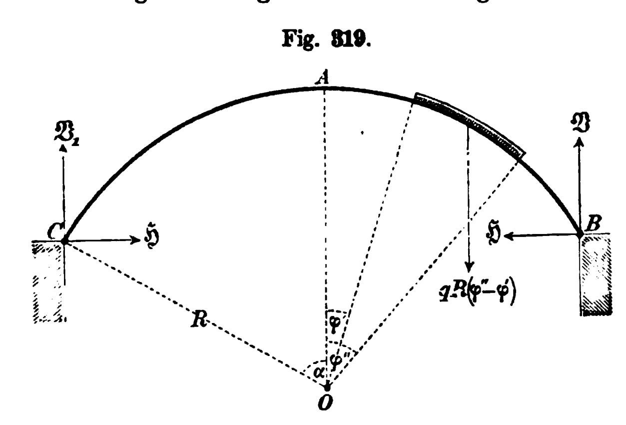
$$6)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{qR}{2}\left\{\varphi - \left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin\alpha}\right)\right\},$$

welche für den Fall einer gleichförmig über die Bogenstrecke AM vertheilten Belastung die Gegendrücke der Unterstützungspunkte darstellen.

Wenn ferner mit $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}_1'$ resp. die Werthe bezeichnet werden, welche dem Winkel $\varphi = \varphi'$ entsprechen, und mit $\mathfrak{H}''$, $\mathfrak{V}''$, $\mathfrak{V}_1''$

die Werthe, welche dem Winkel $\varphi = \varphi''$ entsprechen, so sind für den in Fig. 319 dargestellten Belastungszustand die Gegendrücke der beiden Unterstützungspunkte nunmehr zu berechnen aus den Gleichungen:

Fig. 319.



7) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'' - \mathfrak{H}'$,

8) $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'' - \mathfrak{B}'$,

9) $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1'' - \mathfrak{B}_1'$.

Zu denselben Resultaten würde man gelangt sein, wenn man von vornherein die Integration zwischen den Grenzen $\varphi = \varphi'$ und $\varphi = \varphi''$ ausgeführt hätte.

Wenn z. B. der halbe Centriwinkel des Bogens 60 Grad beträgt, und die Radien der beiden Endpunkte der belasteten Bogenstrecke resp. um 20 Grad und 40 Grad von der Verticalen abweichen, so ist $\alpha = 1{,}047\,198$, $\varphi' = 0{,}349\,066$, $\varphi'' = 0{,}698\,132$ zu setzen, und man erhält aus den obigen Gleichungen die Werthe:

$$\frac{\mathfrak{H}'}{qR} = 0{,}2077, \quad \frac{\mathfrak{B}'}{qR} = 0{,}209\,35, \quad \frac{\mathfrak{B}_1'}{qR} = 0{,}139\,71,$$

$$\frac{\mathfrak{H}''}{qR} = 0{,}3483, \quad \frac{\mathfrak{B}''}{qR} = 0{,}484\,14, \quad \frac{\mathfrak{B}_1''}{qR} = 0{,}213\,99,$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{qR} = 0{,}1406, \quad \frac{\mathfrak{B}}{qR} = 0{,}274\,79, \quad \frac{\mathfrak{B}_1}{qR} = 0{,}074\,28,$$

§ 77.

Schwach gekrümmter parabolischer Bogen.

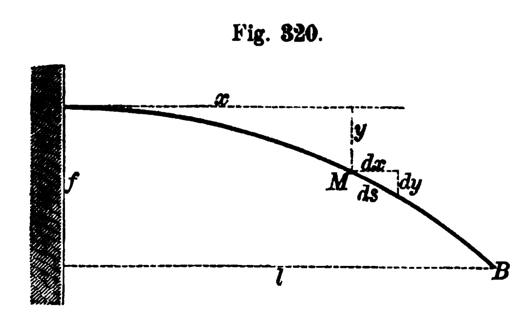
Nach der in Fig. 320 gewählten Bezeichnungsweise gelten für den parabolischen Bogen AB (dessen Achse mit der Verticalen des Punktes A zusammenfallend vorausgesetzt wird) die Gleichungen:

$$1)\quad \frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}, \qquad 2)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2fx}{l^2},$$

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + \frac{4f^2x^2}{l^4}}.$$

Für den Wurzelausdruck kann man die binomische Reihe substituiren, und da wegen vorausgesetzter schwacher Krümmung des Bogens der Quotient $\frac{4f^2x^2}{l^4}$ als eine kleine Zahl zu betrachten ist, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so ist es zulässig, statt der letzteren Gleichung annäherungsweise zu setzen:

Fig. 320.



$$3)\quad ds = dx\left(1 + \frac{2f^2x^2}{l^4}\right).$$

Nach Substitution dieses Ausdrucks nimmt die allgemeine Differenzial-Gleichung der elastischen Linie (§ 68, Gleichung 3) die folgende Form an:

$$4)\quad E\mathfrak{T}\,d\omega = \mathfrak{M}\,dx\left(1 + \frac{2f^2x^2}{l^4}\right).$$

Bei dem in Fig. 321 dargestellten Falle eines am freien Endpunkte wirkenden Kräftepaares ist das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ als eine von x unabhängige Constante zu behandeln, und man erhält für diesen Fall durch Ausführung der ersten Integration die Gleichung:

Fig. 321.

$$E\mathfrak{T}\omega = \mathfrak{M}\int\left(1 + \frac{2f^2x^2}{l^4}\right)dx,$$

oder:

$$5)\quad E\mathfrak{T}\omega = \mathfrak{M}\left(x + \frac{2f^2x^3}{3l^4}\right).$$

Von dieser Gleichung ausgehend, hat man nunmehr die Rechnung auf dieselbe Weise wie in § 69 fortzusetzen, indem man für ω das eine Mal den Werth $\frac{dy_1 - dy}{dx}$, das andere Mal den Werth $\frac{dx - dx_1}{dy}$ substituirt und alsdann die zweite Integration ausführt,

wobei im letzteren Falle der aus Gleichung 2) für dy zu entnehmende Werth vorher einzusetzen ist. Man gelangt dann zu den folgenden (den Gleichungen des § 69 analog gebildeten) Gleichungen:

$$6)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dy_1 - dy}{dx}\right) = \mathfrak{M}\left(x + \frac{2f^2x^3}{3l^4}\right),$$

$$7)\quad E\mathfrak{T}(y_1 - y) = \mathfrak{M}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{f^2x^4}{6l^4}\right),$$

$$8)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dx - dx_1}{dy}\right) = \mathfrak{M}\left(x + \frac{2f^2x^3}{3l^4}\right),$$

$$9)\quad E\mathfrak{T}(dx - dx_1) = \mathfrak{M}\left(x + \frac{2f^2x^3}{3l^4}\right) \cdot \frac{2fx}{l^2}dx,$$

$$10)\quad E\mathfrak{T}(x - x_1) = \frac{2\mathfrak{M}f}{l^2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2f^2x^5}{15l^4}\right).$$

Für $x = l$ wird $y_1 - y = \sigma$ und $x - x_1 = \xi$; wenn also abkürzungsweise das Verhältniss:

$$11)\quad \frac{f}{l} = n$$

gesetzt wird, so ergeben sich aus den Gleichungen 7) und 10) für die Verschiebungen des Endpunktes B die Werthe:

$$12)\quad \sigma = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2E\mathfrak{T}}\left(1 + \frac{n^2}{3}\right),$$

$$13)\quad \xi = \frac{2n\mathfrak{M}l^2}{3E\mathfrak{T}}\left(1 + \frac{2n^2}{5}\right).$$

Ausserdem erhält man aus Gleichung 5), indem man darin ebenfalls $x = l$ setzt, für die Aenderung der Tangentenrichtung am freien Endpunkte B den Werth:

$$14)\quad \omega = \frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}}\left(1 + \frac{2n^2}{3}\right).$$

Wenn die Verhältnisszahl $n = \frac{f}{l}$ sehr klein ist, so können in den obigen drei Ausdrücken die Glieder, welche den Factor n^2 enthalten, neben denjenigen, welche den Factor n^2 nicht enthalten, auch fortgelassen werden; man erhält alsdann die folgenden Werthe:

$$15)\quad \sigma = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2E\mathfrak{T}}, \qquad 16)\quad \xi = \frac{2n\mathfrak{M}l^2}{3E\mathfrak{T}}, \qquad 17)\quad \omega = \frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}}.$$

Dieselben Resultate würde man auch erhalten haben, wenn man in Gleichung 3) das Glied $\frac{2f^2x^2}{l^4}$ von vornherein weggelassen hätte.

Die obige Untersuchung zeigt daher, dass es bei sehr kleinen Werthen von n zulässig ist, $ds = dx$ zu setzen, wie in den nächstfolgenden Paragraphen überall geschehen soll.

§ 78.

Wirkung einer am freien Endpunkte angreifenden Verticalkraft.

Bei dem in Fig. 322 dargestellten Falle hat das Biegungsmoment im Abstande x von der Wand die Grösse:

Fig. 322.

$$1)\quad \mathfrak{M} = V(l - x),$$

und die Gleichung 4) des vorigen Paragraphen nimmt für diesen Fall die Form an:

$$2)\quad E\mathfrak{T}\, d\omega = V(l - x)\, dx.$$

Wenn man von dieser Gleichung ausgehend die Rechnung auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen fortsetzt, so gelangt man zunächst zu den folgenden Gleichungen:

$$3)\quad E\mathfrak{T}\,\omega = V\left(lx - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$4)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dy_1 - dy}{dx}\right) = V\left(lx - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$5)\quad E\mathfrak{T}\,(y_1 - y) = V\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

$$6)\quad E\mathfrak{T}\left(\frac{dx - dx_1}{dy}\right) = V\left(lx - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$7)\quad E\mathfrak{T}\,(dx - dx_1) = V\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{2fx}{l^2}\,dx,$$

$$8)\quad E\mathfrak{T}\,(x - x_1) = \frac{2Vf}{l^2}\left(\frac{lx^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right),$$

und erhält dann, indem man diese Gleichungen auf den Endpunkt B anwendet, die folgenden Werthe:

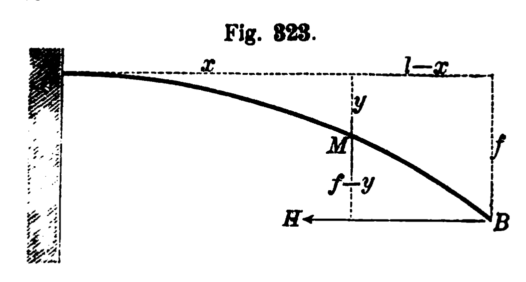
$$9)\quad \sigma = \frac{Vl^3}{3E\mathfrak{T}},\qquad 10)\quad \xi = \frac{5nVl^3}{12E\mathfrak{T}},\qquad 11)\quad \omega = \frac{Vl^2}{2E\mathfrak{T}}.$$

§ 79.

Wirkung einer am freien Endpunkte angreifenden Horizontalkraft.

Nach Fig. 323 hat das Biegungsmoment im Abstande x von der Wand die Grösse:

Fig. 323.



1) $\mathfrak{M} = H(f - y)$,

wofür man mit Benutzung des aus der Parabelgleichung für y zu entnehmenden Werthes auch setzen kann:

2) $\mathfrak{M} = Hf\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$.

Die allgemeine Differenzial-Gleichung der elastischen Linie nimmt demnach für diesen Fall die Form an:

$$3)\quad E\mathfrak{T}\,d\omega = Hf\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)dx,$$

und man gelangt, indem man von dieser Gleichung ausgehend die Rechnung auf dieselbe Weise wie in den vorigen Paragraphen fortsetzt, zu den folgenden Gleichungen:

$$4)\quad E\mathfrak{T}\omega = Hf\left(x - \frac{x^3}{3l^2}\right) = E\mathfrak{T}\left(\frac{dy_1 - dy}{dx}\right) = E\mathfrak{T}\left(\frac{dx - dx_1}{dy}\right),$$

$$5)\quad E\mathfrak{T}(y_1 - y) = Hf\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12l^2}\right),$$

$$6)\quad E\mathfrak{T}(x - x_1) = \frac{Hf^2}{l^2}\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{15l^2}\right),$$

aus welchen man für die am freien Endpunkte B hervorgebrachten Verschiebungen die Werthe erhält:

$$7)\quad \sigma = \frac{5nHl^3}{12E\mathfrak{T}},\qquad 8)\quad \xi' = \frac{8n^2Hl^3}{15E\mathfrak{T}},\qquad 9)\quad \omega = \frac{2nHl^2}{3E\mathfrak{T}}.$$

Die in Gleichung 8) mit ξ' bezeichnete Grösse repräsentirt den allein von der Biegung des Balkens herrührenden Beitrag zu der Horizontalverschiebung des Endpunktes B. Wegen der hier vorausgesetzten schwachen Krümmung des Bogens wird man (nach § 72) den von der gleichzeitig stattfindenden Verkürzung desselben herrührenden Beitrag, für welchen nach § 72 der Annäherungswerth:

$$10)\quad \xi'' = \frac{Hl}{EF}$$

in Rechnung zu bringen ist, im vorliegenden Falle nicht vernachlässigen dürfen; es wird vielmehr die wirkliche Horizontalverschiebung des Endpunktes B im Allgemeinen zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$11)\quad \xi = \xi' + \xi''.$$

Wenn jedoch das aus den beiden Gleichungen 8) und 10) zu berechnende Verhältniss:

$$12)\quad \frac{\xi''}{\xi'} = \frac{15\mathfrak{T}}{8Fn^2l^2}$$

einen sehr kleinen Werth hätte, so würde trotz der vorausgesetzten schwachen Krümmung des Balkens es zulässig sein, die obige Correction zu unterlassen und die Horizontalverschiebung des Endpunktes B unmittelbar nach Gleichung 8) zu berechnen.

Aus der Form des obigen Ausdrucks erkennt man, dass dieser letztere Fall dann eintritt, wenn der Quotient:

$$13)\quad \frac{\mathfrak{T}}{Fn^2l^2} = \frac{\mathfrak{T}}{Ff^2}$$

einen sehr kleinen Werth hat. Dieser Ausdruck nimmt z. B. für den rechteckigen Querschnitt von der Höhe h die Form an:

$$14)\quad \frac{\mathfrak{T}}{Ff^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{f}\right)^2,$$

und für den kreisförmigen Querschnitt von gleicher Höhe würde derselbe die Form annehmen:

$$15)\quad \frac{\mathfrak{T}}{Ff^2} = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{h}{f}\right)^2.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass auch bei dem schwach gekrümmten Balken die Horizontalverschiebung des freien Endpunktes unmittelbar nach der Gleichung 8) berechnet werden darf, sobald das Verhältniss „$\frac{h}{f}$“ einen sehr kleinen Werth hat.

§ 80.

Wirkung eines an beliebiger Stelle hängenden Gewichtes.

Bei dem in Fig. 324 dargestellten Falle sind die Verschiebungen des freien Endpunktes B auf dieselbe Weise wie im § 73 zu berechnen aus den Gleichungen:

$$1)\quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

$$2)\quad \xi = \xi_1 + \xi_2.$$

Hierin bedeuten σ_1 und ξ_1 die Grössen, um welche der Belastungspunkt M resp. in verticaler und horizontaler Richtung sich verschoben hat (siehe Fig. 309). Für diese Verschiebungen erhält man aus den Gleichungen 9) und 10) des § 78, indem man darin Q statt V, ferner x statt l und $\frac{y}{x}$ statt n setzt, die Werthe:

Fig. 324.

3) $\sigma_1 = \frac{Q x^3}{3 E \mathfrak{T}}$,

4) $\xi_1 = \frac{5}{12} \frac{Q x^3}{E \mathfrak{T}} \cdot \frac{y}{x}$.

Die Grössen σ_2 und ξ_2 hat man nach Fig. 310 zu berechnen, indem man darin $\overline{MN} = l - x$ und $\overline{BN} = f - y$ setzt. Es ergeben sich dann die den Gleichungen 6) und 7) des § 73 analog gebildeten Gleichungen:

5) $\sigma_2 = (l - x)\, \omega$,

6) $\xi_2 = (f - y)\, \omega$.

Hierin bedeutet ω den Winkel, um welchen die Tangentenrichtung an der Belastungsstelle M — und zugleich auch das ganze Balkenstück MB — sich gedreht hat. Für diesen Winkel erhält man aus der Gleichung 11) des § 78, indem man wiederum Q statt V, ferner x statt l und $\frac{y}{x}$ statt n setzt, den Werth:

7) $\omega = \frac{Q x^2}{2 E \mathfrak{T}}$,

und nach Substitution desselben nehmen die beiden vorhergehenden Gleichungen die Formen an:

8) $\sigma_2 = \frac{Q (l - x) x^2}{2 E \mathfrak{T}}$,

9) $\xi_2 = \frac{Q (f - y) x^2}{2 E \mathfrak{T}}$.

Mit Benutzung des aus der Parabel-Gleichung zu entnehmenden Werthes $y = \frac{f x^2}{l^2}$ erhält man nunmehr aus den Gleichungen 1), 2), 7), indem man zugleich wieder das Verhältniss $\frac{f}{l}$ mit n

bezeichnet, für die am freien Endpunkte B hervorgebrachten Verschiebungen die folgenden Gleichungen:

$$10)\quad \sigma = \frac{Q l x^2}{2 E \mathfrak{T}_1}\left(1 - \frac{x}{3l}\right),$$

$$11)\quad \xi = \frac{n Q l x^2}{2 E \mathfrak{T}}\left(1 - \frac{x^2}{6l^2}\right),$$

$$12)\quad \omega = \frac{Q x^2}{2 E \mathfrak{T}}.$$

Die Resultate der in den letzteren vier Paragraphen ausgeführten Berechnungen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Die Ueberschriften der vier Verticalcolumnen beziehen sich auf die vier verschiedenen Biegungsursachen, deren Wirkungen in diesen Paragraphen einzeln bestimmt wurden. Die in der Tabelle angegebenen Werthe entsprechen der gemachten Voraussetzung, nach welcher die Zahl „n" so klein ist, dass die Glieder, welche die Zahl „n^2" als Factor enthalten, neben solchen Gliedern, welche den Factor „n^2" nicht enthalten, überall vernachlässigt werden dürfen.

	$\mathfrak{M}$	V	H	Q
σ	$\frac{\mathfrak{M} l^2}{2 E \mathfrak{T}}$	$\frac{V l^3}{3 E \mathfrak{T}}$	$\frac{5 n H l^3}{12 E \mathfrak{T}}$	$\frac{Q x^2}{2 E \mathfrak{T}}\left(l - \frac{x}{3}\right)$
ξ	$\frac{2 n \mathfrak{M} l^2}{3 E \mathfrak{T}}$	$\frac{5 n V l^3}{12 E \mathfrak{T}}$	$\frac{8 n^2 H l^3}{15 E \mathfrak{T}}$	$\frac{n Q x^2}{2 E \mathfrak{T}}\left(l - \frac{x^2}{6l}\right)$
ω	$\frac{\mathfrak{M} l}{E \mathfrak{T}}$	$\frac{V l^2}{2 E \mathfrak{T}}$	$\frac{2 n H l^2}{3 E \mathfrak{T}}$	$\frac{Q x^2}{2 E \mathfrak{T}}$

Anstatt die obigen Ausdrücke — wie hier in den letzteren vier Paragraphen geschehen — für den parabolischen Bogen direct abzuleiten, hätte man dazu auch die in § 69 ... § 73 für den Kreisbogen gefundenen Gleichungen benutzen können. Wenn man nämlich in jenen Gleichungen für die Grössen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ überall die betreffenden Reihen substituirte und darin die Glieder, welche die höheren Potenzen der Zahlen α oder φ enthalten, vernachlässigte, so würde man — nach Einführung rechtwinkeliger Coordinaten statt der Polar-Coordinaten — zu denselben Gleichungen gelangen, welche hier für den parabolischen Bogen gefunden wurden.

§ 81.

Belasteter parabolischer Bogen mit festliegenden Endpunkten.

Wenn man sich bei dem in Fig. 325 dargestellten symmetrisch belasteten Bogen die Unterstützungspunkte durch ihre Gegendrücke ersetzt und die linksseitige Hälfte in eine feste Wand eingeschlossen denkt, so erkennt man, dass bei der rechtsseitigen Hälfte Fig. 326 die von den drei biegenden Kräften Q, H, V hervorgebrachten Horizontalverschiebungen des freien Endpunktes B — eine jede einzeln genommen — nach der Tabelle des vorigen Paragraphen würde bestimmt werden können. Da bei der Biegung des Bogens der Abstand zwischen seinen beiden Endpunkten B und C stets unverändert erhalten wird, so müssen jene drei Horizontalverschiebungen einander gegenseitig aufheben. Indem man demgemäss die algebraische Summe der drei aus der Tabelle zu entnehmenden Werthe von ξ gleich Null setzt, gelangt man zu der Gleichung:

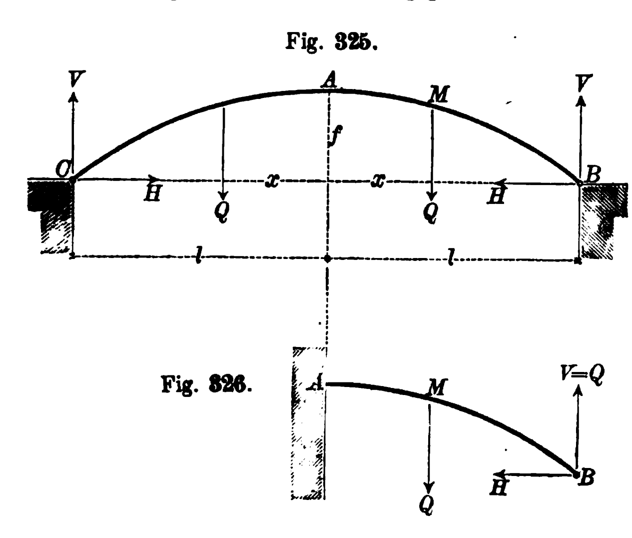


Fig. 325.

Fig. 326.

$$1)\quad 0 = \frac{n Q x^2}{2 E \mathfrak{T}}\left(l - \frac{x^2}{6 l}\right) + \frac{8 n^2 H l^3}{15 E \mathfrak{T}} - \frac{5 n V l^3}{12 E \mathfrak{T}},$$

welche für H aufgelöst, nach Substitution des Werthes $V = Q$ die folgende Form annimmt:

$$2)\quad H = \frac{5 Q}{32 n}\left\{5 - 6\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right\}.$$

Wenn man in dieser Gleichung $q\,dx$ statt Q und dH statt H setzt, so erhält man durch Integration derselben für den in Fig. 327 dargestellten Belastungszustand die Gleichung:

$$3)\quad H = \int_{x_1}^{x_2} \frac{5\,q\,dx}{32\,n}\left\{5 - 6\,\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right\}, \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad H = \frac{5\,q\,l}{32\,n}\left\{5\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) - 2\left(\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{x_2^5 - x_1^5}{l^5}\right)\right\}.$$

Für den speciellen Fall, in welchem $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ ist, ergiebt sich aus dieser Gleichung der Werth:

$$5)\quad H = \frac{q\,l}{2\,n} = \frac{q\,l^2}{2\,f},$$

also derselbe Werth, welchen man (nach § 40) für die Horizontalspannung einer parabolischen Kette erhalten würde, deren Belastung gleichförmig über die Horizontalprojection derselben vertheilt ist. Hieraus folgt, dass bei gleichförmig über die ganze Horizontalprojection des Bogens vertheilter Belastung das Biegungsmoment an allen Stellen desselben den Werth Null annehmen würde.

Fig. 327.

Das Hinwegnehmen der einen Belastungshälfte würde — wie bereits in § 75 erklärt wurde — zur Folge haben, dass der Horizontaldruck auf die Hälfte reducirt wird. Bei dem in Fig. 328 dargestellten Belastungszustande hat demnach der Horizontaldruck die Grösse:

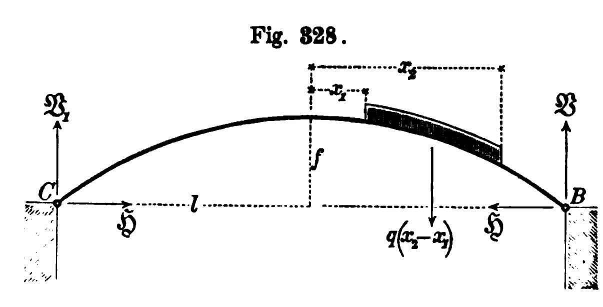


Fig. 328.

$$6)\quad \mathfrak{H} = \frac{5\,q\,l}{64\,n}\left\{5\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right) - 2\left(\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{x_2^5 - x_1^5}{l^5}\right)\right\},$$

während die beiden verticalen Gegendrücke nach dem Gesetze des Hebels zu berechnen sind aus den Gleichungen:

$$7)\quad \mathfrak{V} = \frac{q(x_2 - x_1)}{2l}\left\{l + \frac{1}{2}(x_2 + x_1)\right\},$$

$$8)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{q(x_2 - x_1)}{2l}\left\{l - \frac{1}{2}(x_2 + x_1)\right\}.$$

Wenn z. B. das Verhältniss $n = \frac{f}{l} = \frac{1}{4}$ gesetzt wird, so ergeben sich für den Fall, in welchem $\frac{x_1}{l} = \frac{1}{4}$ und $\frac{x_2}{l} = \frac{3}{4}$ ist, die Werthe:

$$\mathfrak{H} = 0{,}54 \,.\, q\,l, \quad \mathfrak{V} = \frac{3}{8}\,q\,l, \quad \mathfrak{V}_1 = \frac{q\,l}{8}.$$

Wäre ausser dieser Belastung noch eine gleichförmig über die **ganze** Horizontalprojection vertheilte Belastung von der Grösse $2pl$ vorhanden, so würde man durch Summation der von den beiden Belastungen herrührenden Beiträge die Werthe erhalten:

$$\mathfrak{H} = \frac{p\,l^2}{2f} + 0{,}54 \,.\, q\,l, \quad \mathfrak{V} = p\,l + \frac{3}{8}\,q\,l, \quad \mathfrak{V}_1 = p\,l + \frac{q\,l}{8}.$$

Aus Gleichung 6) würde für $n = 0$ der Werth $\mathfrak{H} = \infty$, also ein ungereimtes Resultat, sich ergeben. Man wird daher bei den Anwendungen jener Gleichung stets im Auge zu behalten haben, dass ihre Gültigkeit an gewisse Bedingungen geknüpft ist, insofern bei Ableitung derselben die Voraussetzung gemacht wurde: dass nicht nur das Verhältniss der **Pfeilhöhe** zur **Spannweite**, sondern gleichzeitig auch das Verhältniss der **Querschnittshöhe** zur **Pfeilhöhe** des Bogens einen sehr geringen Werth hat.

§ 82.

Construction der von den Unterstützungspunkten geleisteten Gegendrücke.

Nach Gleichung 2) des vorigen Paragraphen hat bei dem in Fig. 329 dargestellten Belastungszustande der Horizontaldruck die Grösse:

$$1)\quad \mathfrak{H} = \frac{1}{2}\,H = \frac{5\,Q}{64\,n}\left\{5 - 6\,\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right\},$$

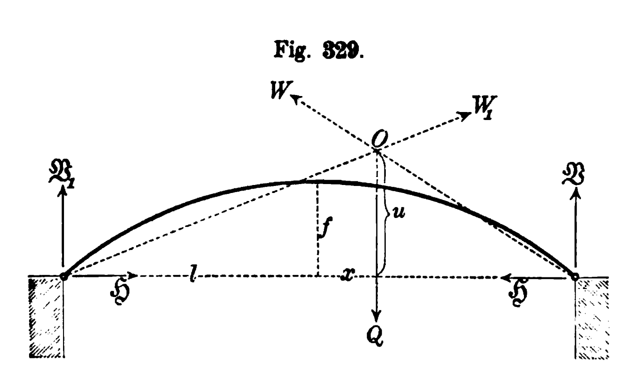
und für die beiden verticalen Gegendrücke ergeben sich nach dem Gesetze des Hebels die Werthe:

$$2)\quad \mathfrak{V} = \frac{Q(l + x)}{2l},$$

$$3)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{Q(l - x)}{2l}.$$

Denkt man sich an jedem der beiden Unterstützungspunkte die horizontale Seitenkraft und die verticale Seitenkraft zu ihrer Mittelkraft zusammengesetzt, so erkennt man, dass es diese beiden Mittelkräfte sind, welche mit der Kraft Q zusammen den Bogen im Gleichgewicht halten. Es müssen daher

Fig. 329.



die Richtungslinien der drei Kräfte W, Q, W_1 in einem Punkte zusammentreffen.

Um die Lage des Durchschnittspunktes O zu finden, hat man die algebraische Summe der statischen Momente der beiden Kräfte $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{H}$ in Bezug auf den Punkt O gleich Null zu setzen; man gelangt dann zu der Gleichung:

$$4)\quad 0 = \mathfrak{V}_1 (l + x) - \mathfrak{H} u,$$

aus welcher man, nach Substitution der oben für $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{H}$ gefundenen Ausdrücke, für das Verhältniss $\frac{u}{f}$ den folgenden Werth erhält:

$$5)\quad \frac{u}{f} = \frac{32}{5\left(5 - \frac{x^2}{l^2}\right)}.$$

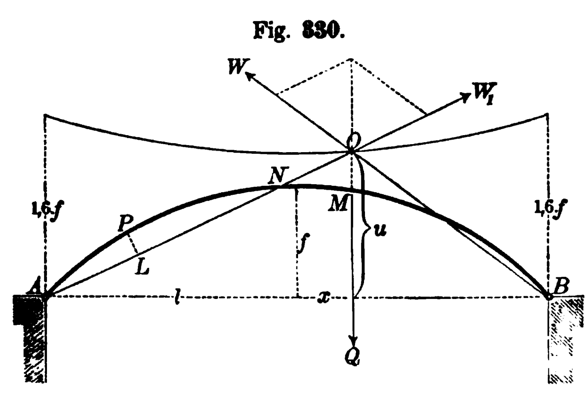
Aus den Gleichungen 1) und 5) ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{x}{l}$ =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{n\mathfrak{H}}{Q}$ =	0,3906	0,3859	0,372	0,3491	0,3176	0,2783	0,232	0,1797	0,1226	0,0622	0
$\frac{u}{f}$ =	1,28	1,283	1,29	1,303	1,322	1,347	1,379	1,419	1,468	1,527	1,6

Die Gleichung 5) kann man benutzen, um das Gesetz, nach welchem die Grösse u mit der Abscisse x sich ändert, durch eine krumme Linie geometrisch darzustellen. Diese krumme Linie bildet den geometrischen Ort für alle möglichen Lagen, welche der Punkt O

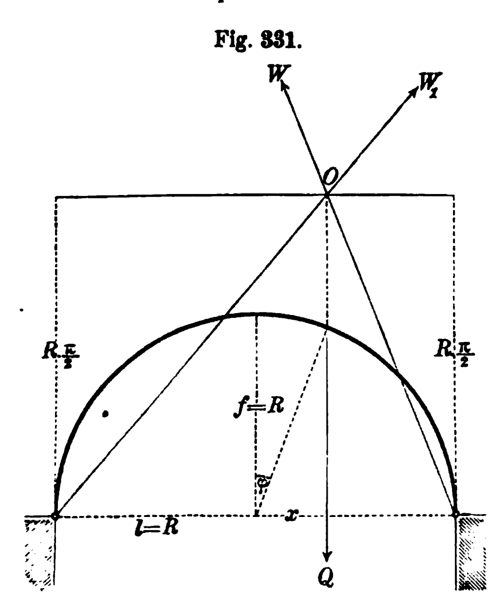
als Durchschnittspunkt der drei Kräfte W, Q, W_1 annehmen kann. Mit Hülfe dieser krummen Linie kann man alsdann für jede beliebige gegebene Lage des Belastungspunktes M durch die in Fig. 330 angedeutete Construction des Kräfteparallelogramms die beiden Gegendrücke W und W_1 ihrer Grösse und Richtung nach darstellen.

Fig. 330.



Um für die Stelle P das Biegungsmoment zu berechnen, würde man die Kraft W_1 mit dem Hebelarme $\overline{PL}$ zu multipliciren haben. Hieraus folgt, dass an der Stelle N, wo die Richtungslinie der Kraft W_1 den Bogen schneidet, das Biegungsmoment die Grösse Null hat. An dieser Stelle würde man ein Scharnier einschalten können, ohne dass dadurch in dem Spannungszustande des Bogens Etwas geändert wird. Aus Fig. 330 ergiebt sich zugleich das Verfahren, welches man in dem umgekehrten Falle anzuwenden haben würde: wenn jener Nullpunkt N gegeben ist, und der zugehörige Belastungspunkt M gesucht wird. Man findet den letzteren, indem man die Linie AN bis zum Durchschnittspunkte mit der Curve verlängert und durch diesen Durchschnittspunkt eine Verticale legt.

Fig. 331.



Das eben erklärte Constructionsverfahren würde man auch auf den kreisbogenförmig gekrümmten Balken anwenden können. Nach § 75 würde z. B. für den Halbkreisbogen vom Halbmesser $l = R = f$ der Werth:

$$6) \quad \mathfrak{H} = \frac{Q \cos \varphi^2}{\pi}$$

in Gleichung 4) zu substituiren sein, und wenn man ausserdem $x = R \sin \varphi$ setzt, so erhält man aus jener Gleichung für u den von x unabhängigen constanten Werth:

$$7) \quad u = \frac{R\pi}{2}.$$

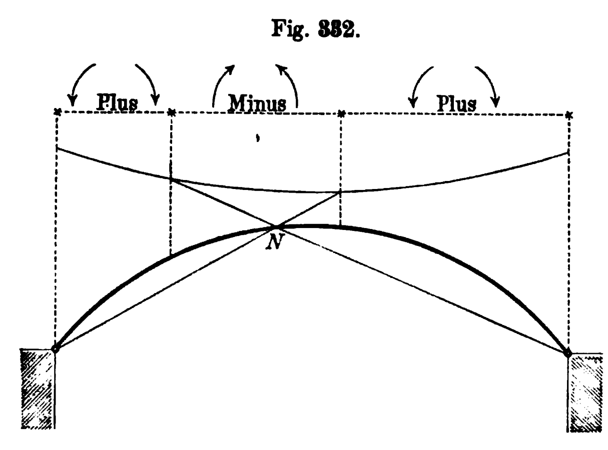
Es ergiebt sich hieraus das bemerkenswerthe Resultat, dass bei dem Halbkreisbogen der geometrische Ort aller Lagen, welche der Durchschnittspunkt O annehmen kann, eine horizontale gerade Linie bildet (Fig. 331).

§ 83.

Ermittelung der ungünstigsten Belastungszustände.

Die im vorigen Paragraphen gefundene Curve würde man auf die in Fig. 332 angedeutete Weise benutzen können, um diejenigen Belastungszustände aufzufinden, bei welchen an einer bestimmten gegebenen Stelle N das Biegungsmoment ein Maximum oder Minimum wird. Die beiden Punkte, deren Belastungen den Beitrag „Null“ liefern zu jenem Biegungsmomente, zerlegen die ganze Spannweite in drei Abtheilungen, deren Belastungen resp. positive und negative Beiträge zu demselben liefern, wie in Figur 332 durch die Ueberschriften „Plus“ und „Minus“ angedeutet ist. Zugleich zeigen die beigefügten Drehungspfeile: dass das Biegungsmoment als positiv bezeichnet werden soll, wenn dasselbe eine Verstärkung der bereits vorhandenen Krümmung des Bogens bedingt, als negativ im entgegengesetzten Falle. Das Biegungsmoment an

Fig. 332.



der Stelle N wird ein Maximum, wenn die beiden mit „Plus“ bezeichneten Abtheilungen allein belastet sind, ein Minimum, wenn die mit „Minus“ bezeichnete Abtheilung allein belastet ist.

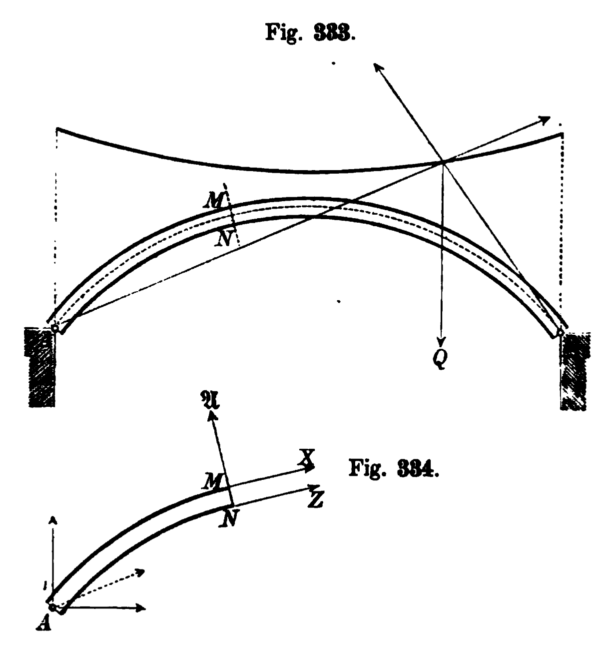


Fig. 333.

Fig. 334.

Wenn der Bogen als Blech- oder Gitter-Balken aus zwei parallelen Gurtungen und einer zwischen denselben befindlichen Blech- oder Gitterwand construirt ist, so kann man bei der Berechnung der in diesen drei Constructionstheilen hervorgebrachten Spannungen — wie im dritten Abschnitte gezeigt wurde — die Methode der statischen Momente anwenden (Fig. 333 und Fig. 334).

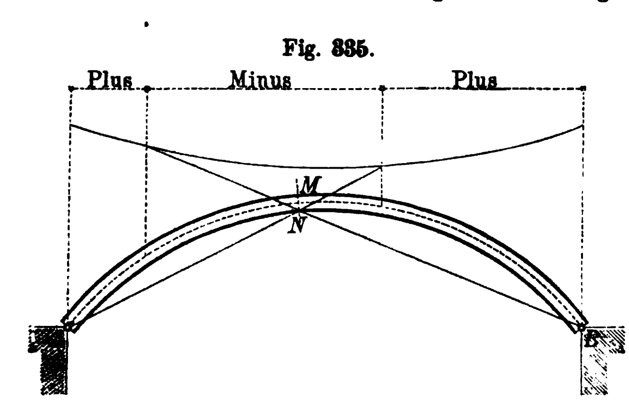
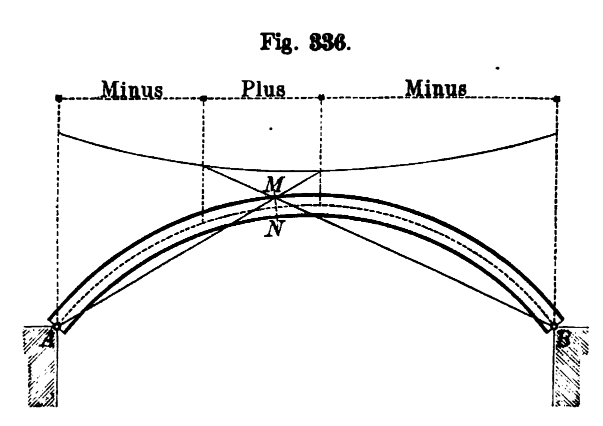


Fig. 335.

Um die in der oberen Gurtung an der Stelle M hervorgebrachte Spannung X zu berechnen, würde man für den Theil AMN (Fig. 334) die Gleichung der statischen Momente aufzustellen und den Punkt N dabei als Drehpunkt zu wählen haben. Hieraus ergiebt sich die in Fig. 335 ange-

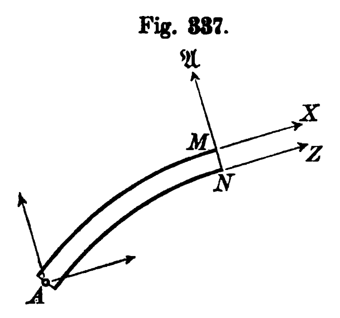
deutete Construction derjenigen Belastungszustände, bei welchen die Spannung X resp. ein Maximum oder Minimum wird. Bei der Berechnung von Z würde man den Punkt M als Drehpunkt zu wählen haben. Es können daher die Belastungszustände, bei welchen die Spannung Z resp. ein Maximum oder Minimum wird, auf eine der vorigen ganz analoge Weise mittelst der in Fig. 336 ausgeführten Construction ermittelt werden.

Fig. 336.



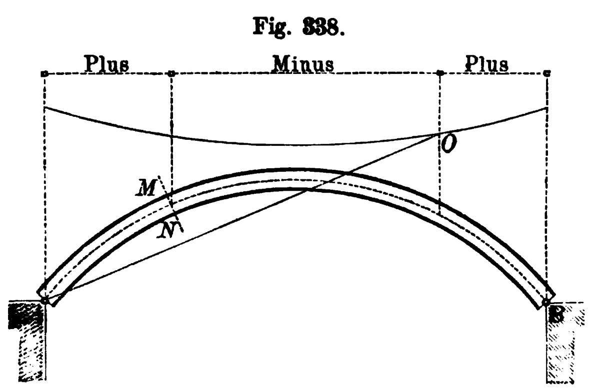
Um die Abscheerungsspannung 𝔄 zu berechnen, hat man sich an dem unbelasteten Theile den Gegendruck des festen Unterstützungspunktes in zwei Seitenkräfte zerlegt zu denken, von denen die eine rechtwinkelig, die andere parallel zu der Querschnitts-Ebene MN gerichtet ist. Man erkennt, dass 𝔄 gleich Null wird, wenn die letztere Seitenkraft gleich Null ist, d. h. wenn der Gegendruck selbst rechtwinkelig zu der Schnitt-Ebene MN gerichtet ist; man erkennt ferner, dass 𝔄 negativ oder positiv wird, jenachdem jene parallele Seitenkraft der Richtung des positiven 𝔄 gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist. Hierauf gründet sich die in Fig. 338 dargestellte Construction der Belastungszustände, bei welchen die Abscheerungsspannung 𝔄 resp. ein Maximum oder Minimum wird. Die Linie AO ist rechtwinkelig zu der Querschnitts-Ebene MN gerichtet. Ein in der Verticalen des Punktes O angebrachtes Gewicht würde daher zu der Abschéerungsspannung 𝔄 den Beitrag Null liefern. Die Verticale scheidet demnach die „Plus"-Abtheilung von der „Minus"-Abtheilung. Der Schnitt MN selbst bildet

Fig. 337.



ebenfalls eine solche Belastungsgrenze, insofern jede Belastung links von dem Schnitte einen positiven Beitrag zu der Spannung $\mathfrak{A}$ liefern würde, wovon man sich leicht überzeugt, indem man die Wirkung einer solchen Belastung auf den rechts von dem Schnitte liegenden Theil BMN untersucht.

Fig. 338.



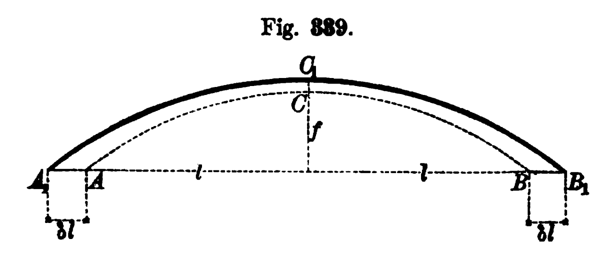
Für jeden der gefundenen Belastungszustände kann man die beiden Seitenkräfte des von jedem Unterstützungspunkte geleisteten Gegendruckes nach § 81 berechnen. Die betreffende Spannung selbst findet man alsdann, indem man für den Theil AMN oder den Theil BMN die Gleichung der statischen Momente aufstellt.

§ 84.

Einfluss der Temperatur-Aenderungen.

Denkt man sich in Folge einer Temperatur-Erhöhung den (zunächst frei im Raume schwebend vorausgesetzten) Bogen aus der Form ACB in die Form $A_1C_1B_1$ übergehend (Fig. 339), und nachher durch die beiden Horizontalkräfte H die ursprüngliche Sehnenlänge $AB = 2l$ wieder hergestellt, so erkennt man leicht, dass der Bogen alsdann genau in demselben Spannungszustande sich befinden wird, wie wenn von vornherein durch Befestigung der beiden Endpunkte jede Veränderung der Spannweite verhindert worden wäre (Fig. 340). Die Grösse des entstehenden

Fig. 339.

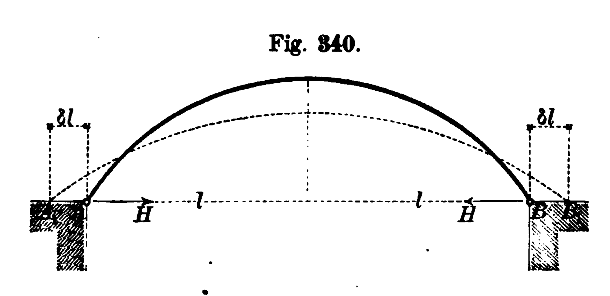


Horizontaldruckes kann man daher nach der Tabelle des § 80 berechnen, indem man darin δl statt ξ setzt, aus der Gleichung:

$$1)\quad \delta l = \frac{8 n^2 H l^3}{15 E \mathfrak{T}}, \quad \text{oder:} \quad H = \frac{15 \delta E \mathfrak{T}}{8 n^2 l^2}.$$

Die durch diesen Horizontaldruck in dem Scheitel-Querschnitte an der concaven Seite hervorgebrachte grösste Druckspannung (pro Flächeneinheit) kann man — auf dieselbe Weise wie in § 59 die von den beiden Kräften K hervorgebrachte Spannung — berechnen aus der Gleichung:

Fig. 340.



$$2)\quad S = S_1 + S_2 = \frac{H}{F} + \frac{w H f}{\mathfrak{T}},$$

welcher man nach Substitution des oben für H gefundenen Ausdruckes (indem man zugleich wieder $nl = f$ setzt) die folgende Form geben kann:

$$3)\quad S = \frac{15 \delta E}{8} \left(\frac{\mathfrak{T}}{F f^2} + \frac{w}{f} \right).$$

Wenn man hierin $w = \frac{h}{2}$ und $\mathfrak{T} = \frac{F h^2}{12}$ setzt, so erhält man die für den rechteckigen Querschnitt von der Höhe h geltende Gleichung:

$$4)\quad S = \frac{5 \delta E}{32} \left(6 \frac{h}{f} + \frac{h^2}{f^2} \right).$$

Für Schmiedeisen wird das einer Temperatur-Erhöhung von t Graden (Celsius) entsprechende Ausdehnungsverhältniss zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$5)\quad \delta = 0{,}000\,0122 \,.\, t.$$

Es würde also z. B. für $t = 41$ Grad der Werth $\delta = \frac{1}{2000}$ sich ergeben. Wenn man ausserdem $E = 20\,000$ und $\frac{h}{f} = \frac{1}{4}$ setzt, so erhält man für die obige Temperaturspannung den Werth:

$$6)\quad S = \frac{5\,.\,20\,000}{32\,.\,2000} \cdot \left\{6 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} = 2^{\text{Kil.}},44.$$

Die gleichzeitig von den Belastungen des Bogens an derselben Stelle hervorgebrachte Druckspannung würde daher nur $3^{\text{Kil.}},56$ betragen dürfen, wenn die practisch zulässige Spannung von 6 Kil. pro Quadratmillimeter nicht überschritten werden soll. Jene Temperatur-Aenderung hat daher denselben Einfluss, wie wenn die Festigkeit des Materials im Verhältniss 6 : 3,56 vermindert worden wäre. Wegen dieses nachtheiligen Einflusses der Temperatur-Aenderungen ist der krumme Balken mit festliegenden Endpunkten als eine keineswegs empfehlenswerthe Construction zu bezeichnen und bei Brückenconstructionen thunlichst zu vermeiden.

Der obigen Berechnung der Temperaturspannung lag die Voraussetzung zu Grunde: dass das Verhältniss $\frac{h}{f}$ sehr klein ist. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so würde die nach den Gleichungen 10) und 11) des § 79 auszuführende Correction erforderlich sein, und der oben für den Horizontaldruck H gefundenen Gleichung 1) würde für diesen Fall die Form zu geben sein:

$$7)\quad \delta l = \frac{8 n^2 H l^3}{15 E \mathfrak{T}} + \frac{H l}{E F}, \quad \text{oder:} \quad H = \frac{\delta E \mathfrak{T}}{\frac{8}{15} n^2 l^2 + \frac{\mathfrak{T}}{F}}.$$

Man erhält alsdann aus Gleichung 2) für die Temperaturspannung den genaueren Ausdruck:

$$8)\quad S = \frac{\delta E \left(1 + \frac{F w f}{\mathfrak{T}}\right)}{1 + \frac{8 F f^2}{15 \mathfrak{T}}},$$

welcher für den Fall des rechteckigen Querschnittes die folgende Form annimmt:

$$9)\quad S = \frac{5 \delta E \left(6 \frac{h}{f} + \frac{h^2}{f^2}\right)}{32 + 5 \frac{h^2}{f^2}}.$$

Wenn man mit Beibehaltung der oben angenommenen Zahlenwerthe die Temperaturspannung nach dieser genaueren Gleichung berechnet, so findet man den Werth $S = 2^{\text{Kil.}},42$. Es ergiebt sich hieraus, dass die erwähnte Correction selbst dann noch vernachlässigt werden darf, wenn die Querschnittshöhe den vierten Theil der Pfeilhöhe des Bogens erreicht.

§ 85.

Parabolischer Träger mit steifen Gurtungen.

Bei dem in Fig. 341 dargestellten Falle sind die horizontalen Gegendrücke der beiden Unterstützungspunkte nach innen gerichtet und dieselben haben (nach § 82, Gleichung 1) die Grösse:

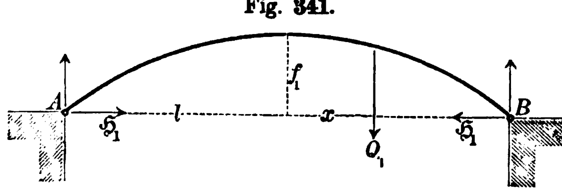
$$1)\quad \mathfrak{H}_1 = \frac{5\,Q_1 l}{64 f_1}\left(5 - 6\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right).$$

Bei dem in Fig. **342** dargestellten Falle sind die horizontalen Gegendrücke der beiden Unterstützungspunkte nach aussen gerichtet und haben die Grösse:

$$2)\quad \mathfrak{H}_2 = \frac{5\,Q_2 l}{64 f_2}\left(5 - 6\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right).$$

Indem man diese beiden Ausdrücke einander gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

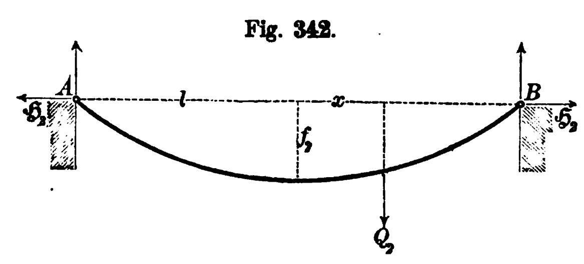
Fig. **341**.



$$3)\quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

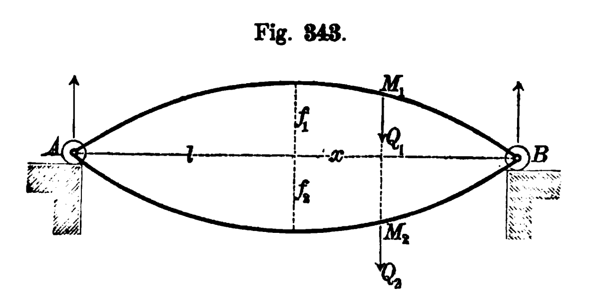
als Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn jene beiden Horizontaldrücke gleiche Grösse haben sollen, wie hier vorausgesetzt wird.

Fig. **342**.



Denkt man sich die beiden Bögen nunmehr auf die in Fig. **343** angedeutete Weise mit einander verbunden, so erkennt man, dass bei dem auf solche Art entstandenen parabolischen Träger an jedem der beiden Unterstützungspunkte die auf denselben übertragenen Horizontaldrücke einander gegenseitig aufheben werden, dass also — wie in der Figur durch die beiden Rollen angedeutet ist — von den beiden Unterstützungspunkten nur verticale Gegendrücke auf das Ganze übertragen werden.

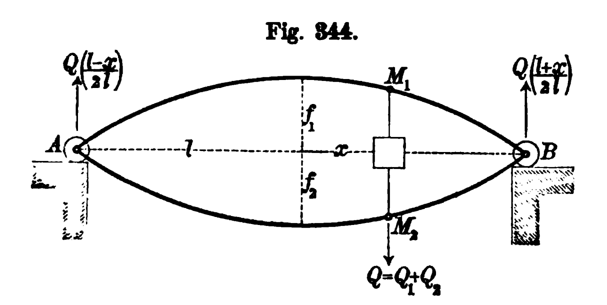
Fig. **343**.



Die in horizontaler Richtung frei beweglich vorausgesetzten Unterstützungspunkte setzen einer durch Temperatur-Aenderungen hervorgebrachten Längen-Aenderung des Trägers keinerlei Widerstand entgegen; folglich können durch solche Temperatur-Aenderungen auch keine Spannungen in demselben hervorgebracht werden. Bei Anwendung eines solchen aus zwei krummen Balken zusammengesetzten parabolischen Trägers (statt des einfachen Bogens mit festliegenden Endpunkten) werden daher die im vorigen Paragraphen hervorgehobenen Uebelstände gänzlich vermieden.

Was die von den Belastungen hervorgebrachten Spannungen betrifft, so sind dieselben bei jedem der beiden Bögen genau auf dieselbe Weise zu berechnen, wie wenn die beiden Endpunkte desselben absolut feste Punkte wären. In diesen Spannungszuständen der beiden Bögen wird keine Aenderung eintreten, wenn die beiden Belastungspunkte M_1 und M_2 (Fig. 343) durch eine (gewichtlos vorausgesetzte) Verticalstange mit einander verbunden werden, und an einer beliebigen Stelle derselben die Summe der beiden Belastungen:

Fig. 344.



$$4) \quad Q = Q_1 + Q_2$$

aufgehängt wird (Fig. 344). Wenn das Totalgewicht Q und die Pfeilhöhen der beiden Bögen gegeben sind, so kann man nunmehr aus den beiden Gleichungen 3) und 4) den von jedem der beiden Bögen aufgenommenen Theil jener Belastung berechnen und erhält für diese beiden Belastungstheile die Werthe:

$$5) \quad Q_1 = Q\left(\frac{f_1}{f_1+f_2}\right), \qquad 6) \quad Q_2 = Q\left(\frac{f_2}{f_1+f_2}\right).$$

Nach demselben Gesetze würde auch eine gleichförmig — entweder über die ganze Spannweite AB oder eine bestimmte Strecke derselben — vertheilte Belastung auf zwei Bögen sich vertheilen. Wenn mit q die Totalbelastung pro Längeneinheit der Strecke bezeichnet wird, so sind:

$$7) \quad q_1 = q\left(\frac{f_1}{f_1+f_2}\right), \qquad 8) \quad q_2 = q\left(\frac{f_2}{f_1+f_2}\right)$$

resp. die von dem oberen und von dem unteren Bogen zu tragenden Belastungen pro Längeneinheit der belasteten Strecke. Die bei solchem Belastungszustande auf jeden der beiden Bogen einzeln genommen von den Unterstützungspunkten übertragenen horizontalen und verticalen Gegendrücke können alsdann unmittelbar nach den Gleichungen des § 81 berechnet werden.

Wenn wegen sehr kleiner Pfeilhöhe des einen oder des andern der beiden Bögen es erforderlich sein sollte, die nach § 79 (Gleichung 11) auszuführende Correction zu berücksichtigen, so würde man zunächst bei Ableitung der allgemeinen Gleichung für den bei symmetrischer Belastung entstehenden Horizontaldruck $H = 2\mathfrak{H}$ in der Gleichung 1) des § 81 auf der rechten Seite noch das Glied $\frac{Hl}{EF}$ hinzuzufügen haben und für den bei einseitiger Belastung entstehenden Horizontaldruck alsdann die Gleichung erhalten:

$$9)\quad \mathfrak{H} = \frac{1}{2} H = \frac{5\, Q l \left(5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right)}{64 f + 120 \cdot \frac{\mathfrak{T}}{F f}}.$$

In diesem Falle wird also der Horizontaldruck nicht nur von Grösse und Lage der Belastung Q, sondern auch von Grösse und Form des Querschnitts abhängen. Bei Anwendung dieser genaueren Gleichung würde man für den in Fig. 348 dargestellten Fall die Bedingungsgleichung erhalten:

$$10)\quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f_1 + \frac{15\, \mathfrak{T}_1}{8 F_1 f_1}}{f_2 + \frac{15\, \mathfrak{T}_2}{8 F_2 f_2}},$$

welche z. B. für den Fall des rechteckigen Querschnitts die folgende Form annimmt:

$$11)\quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f_1 + \frac{5}{32} \cdot \frac{h_1^2}{f_1}}{f_2 + \frac{5}{32} \cdot \frac{h_2^2}{f_2}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $\frac{Q_1}{Q_2} = \infty$ wird, wenn $f_1 = 0$ ist, und dass $\frac{Q_1}{Q_2} = 0$ wird, wenn $f_2 = 0$ ist. In beiden Fällen hat der Horizontaldruck die Grösse Null, wie aus Gleichung 9) sich ergiebt.

Die Gleichung 9), welche für den speciellen Fall des rechteckigen Querschnittes die Form annimmt:

$$12)\quad \mathfrak{H} = \frac{5\, Q l \left(5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right)}{64 f + 10 \frac{h^2}{f}}$$

würde man auch benutzen können, um diejenige Pfeilhöhe zu berechnen, bei welcher der von einer gegebenen Belastung hervorgebrachte Horizontaldruck

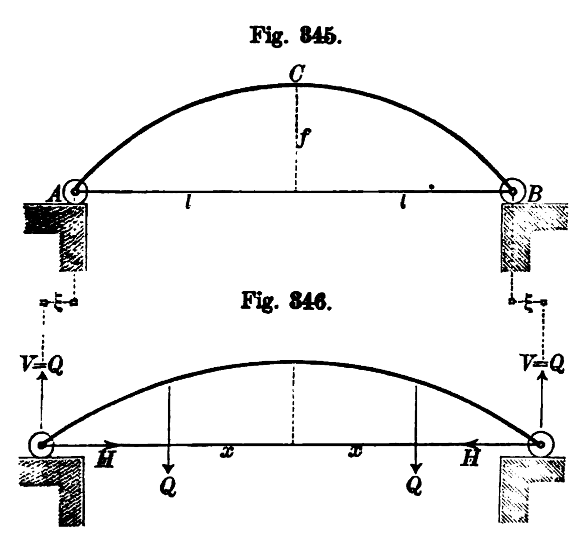
$\mathfrak{H}$ ein Maximum wird. Indem man den Differenzialquotienten des Nenners, nach f genommen, gleich Null setzt, erhält man die Gleichung:

$$13)\quad 0 = 64 - 10\frac{h^2}{f^2}, \quad \text{oder:} \quad f = h\sqrt{\frac{5}{32}}.$$

§ 86.

Parabolischer Träger mit geradliniger unterer Gurtung.

Wenn die beiden in horizontaler Richtung verschiebbar vorausgesetzten Unterstützungspunkte des Bogens durch eine geradlinige Zugstange vom Querschnitte $\mathfrak{F}$ mit einander verbunden sind (Fig. 345), so wird durch die beiden Belastungen Q eine Zugspannung H in derselben hervorgebracht (Fig. 346), und in Folge dessen wird jede Hälfte dieser Zugstange eine Verlängerung erleiden von der Grösse:



$$1)\quad \xi = \frac{Hl}{E\mathfrak{F}}.$$

Denkt man sich die Hälfte AC des Bogens eingemauert, so erkennt man, dass die von den drei Kräften V, H, Q hervorgebrachte Horizontalverschiebung des Endpunktes B ebenfalls gleich ξ sein muss. Aus der Tabelle des § 80 ergiebt sich für diese Horizontalverschiebung der Werth:

$$2)\quad \xi = \frac{5nVl^3}{12E\mathfrak{T}} - \frac{8n^2Hl^3}{15E\mathfrak{T}} - \frac{nQx^2}{2E\mathfrak{T}}\left(l - \frac{x^2}{6l}\right).$$

Nach Substitution der Werthe $V = Q$ und $n = \frac{f}{l}$ erhält man durch Gleichsetzung der obigen beiden für ξ gefundenen Ausdrücke eine Gleichung, welche für die Horizontalspannung H aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$3)\quad H = \frac{5\,Q\,l\left(5 - 6\,\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right)}{32\,f + 60 \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F}\,f}}.$$

Das Hinwegnehmen einer von den beiden Belastungen wird zur Folge haben, dass diese Horizontalspannung auf die Hälfte reducirt wird. Bei dem in Fig. 347 dargestellten Belastungszustande hat also die Horizontalspannung die Grösse:

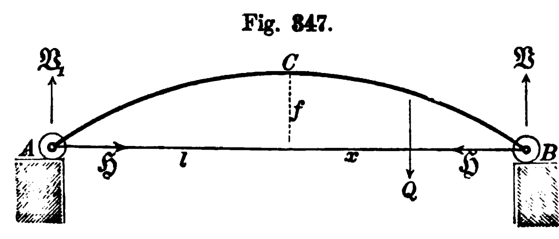
$$4)\quad \mathfrak{H} = \frac{5\,Q\,l\left(5 - 6\,\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right)}{64\,f + 120\,\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F}\,f}}.$$

Die verticalen Gegendrücke der Unterstützungspunkte sind wie bei dem Balken auf zwei Stützen zu berechnen aus den Gleichungen:

$$5)\quad \mathfrak{B} = \frac{Q\,(l + x)}{2\,l}, \qquad 6)\quad \mathfrak{B}_1 = \frac{Q\,(l - x)}{2\,l}.$$

Der oben für $\mathfrak{H}$ gefundene Ausdruck unterscheidet sich nur durch das im Nenner neu hinzugekommene Glied $120 \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F}\,f}$ von dem in § 82 (Gleichung 1) gefundenen Werthe. Wenn also der Bogenquerschnitt so klein wäre im Verhältniss zu dem

Fig. 347.



Querschnitte der horizontalen Zugstange, dass das Verhältniss $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F}\,f}$ gleich Null gesetzt werden darf, so würde der Bogen in demselben Spannungszustande sich befinden wie bei dem in Fig. 329 dargestellten Falle. Wenn dagegen $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F}\,f}$ unendlich gross wäre, d. h. wenn die horizontale Zugstange sehr schwach wäre oder ganz fehlte, so würde $\mathfrak{H} = 0$ werden, und es würden auf die Endpunkte des Bogens nur die verticalen Gegendrücke wirken, und das Biegungsmoment an der Belastungsstelle würde den Werth annehmen:

$$7)\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{B}\,(l - x) = \mathfrak{B}_1\,(l + x) = \frac{Q\,(l^2 - x^2)}{2\,l}.$$

Um für den in Fig. 328 dargestellten Belastungszustand die Spannung der horizontalen Zugstange zu berechnen, würde man in der Gleichung 6) des § 81 auf der rechten Seite im Nenner das Glied $120 \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F} f}$ hinzuzufügen haben und die Gleichung erhalten:

$$8)\quad \mathfrak{H} = \frac{5\, q\, l^2 \left\{ 5 \left(\frac{x_2 - x_1}{l} \right) - 2 \left(\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{x_2^5 - x_1^5}{l^5} \right) \right\}}{64 f + 120 \cdot \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F} f}},$$

während die verticalen Gegendrücke $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ wie bei dem frei aufliegenden Balken auf zwei Stützen nach den Gleichungen 7) und 8) des § 81 zu berechnen sein würden.

Da die beiden Unterstützungspunkte — ebenso wie bei dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle — in horizontaler Richtung frei beweglich vorausgesetzt werden, so kann bei diesem Träger ebenfalls durch Temperatur-Aenderungen keinerlei nachtheilige Wirkung hervorgebracht werden.

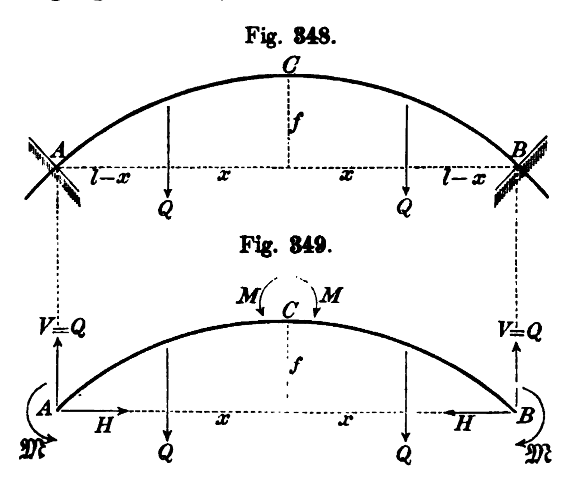
§ 87.

Parabolischer Bogen mit eingemauerten Enden.

Wenn an jedem von den beiden Enden des belasteten Bogens nicht nur die Lage des Endpunktes, sondern auch die Tangentenrichtung der Achsenlinie unverändert bleiben sollte, so müsste an jeder von diesen beiden Stellen zu dem Gegendrucke des festen Unterstützungspunktes noch ein Kräftepaar hinzugefügt werden. Bei dem in Fig. 348 dargestellten Bogen, dessen Enden in feste Wände eingeschlossen sind, wird man daher, indem man die in den Wand-Oberflächen liegenden Punkte des Bogens als Endpunkte desselben ansieht, die von jeder Wand auf den betreffenden Endpunkt des Bogens übertragene Wirkung zu betrachten haben als zusammengesetzt aus einer Einzelkraft und einem Kräftepaare. Da hinsichtlich der Lage der Belastungen sowohl als der Unterstützungsstellen eine vollkommene Symmetrie stattfindet, so werden jene beiden Kräftepaare gleiche Momente und entgegengesetzte Drehungsrichtungen haben müssen (Fig. 349).

Denkt man sich nunmehr die linksseitige Hälfte AC in eine feste Wand eingeschlossen, so erkennt man, dass an der rechtsseitigen Hälfte die nach der Tabelle des § 80 zu bestimmenden

Wirkungen der in Fig. 349 mit V, H, $\mathfrak{M}$, Q bezeichneten vier Biegungsursachen, sowohl hinsichtlich der hervorgebrachten Horizontalverschiebung des Endpunktes B, als auch hinsichtlich der an dieser Stelle hervorgebrachten Aenderung der Tangentenrichtung einander gegenseitig aufheben müssen. Wenn man demgemäss die aus der Tabelle des § 80 resp. für die Grössen ξ und ω zu entnehmenden Ausdrücke einen jeden gleich Null setzt, so erhält man die Gleichungen:



$$1)\quad 0 = \frac{5nVl^3}{12E\mathfrak{T}} - \frac{8n^2Hl^3}{15E\mathfrak{T}} - \frac{2n\mathfrak{M}l^2}{3E\mathfrak{T}} - \frac{nQx^2}{2E\mathfrak{T}}\left(l - \frac{x^2}{6l}\right).$$

$$2)\quad 0 = \frac{Vl^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{2nHl^2}{3E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}} - \frac{Qx^2}{2E\mathfrak{T}},$$

welche für die Grössen H und $\mathfrak{M}$ aufgelöst, nach Substitution der Werthe $V = Q$ und $n = \frac{f}{l}$, die folgenden Formen annehmen:

$$3)\quad H = \frac{15\,Ql}{16f}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2,$$

$$4)\quad \mathfrak{M} = -\frac{Ql}{8}\left\{1 - 6\frac{x^2}{l^2} + 5\frac{x^4}{l^4}\right\}.$$

Für das Biegungsmoment im Scheitelpunkte des Bogens ergiebt sich aus Fig. 349 der Ausdruck:

$$5)\quad M = Qx - Ql + Hf + \mathfrak{M},$$

und nach Substitution der obigen beiden Werthe erhält man für dasselbe die Gleichung:

$$6)\quad M = \frac{Ql}{16}\left(-3 + 16\frac{x}{l} - 18\frac{x^2}{l^2} + 5\frac{x^4}{l^4}\right).$$

Wenn man in den obigen Gleichungen $q\,dx$ statt Q setzt und alsdann die Integration ausführt zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$, so erhält man die Werthe:

$$H = \frac{q\,l^2}{2f}, \qquad \mathfrak{M} = 0, \qquad M = 0.$$

Bei gleichförmig über die ganze Horizontalprojection vertheilter Belastung verhält sich daher der Bogen wie eine vollkommen biegsame an ihren Endpunkten unterstützte Kette. (Vergl. § 81, Gleichung 5).

Dem oben für $\mathfrak{M}$ gefundenen Ausdrucke würde man auch die folgende Form geben können:

$$7)\quad \mathfrak{M} = -\frac{Q\,l}{8}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\left(1 - 5\,\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Man erkennt an der Form dieses Ausdruckes, dass dem Werthe $\frac{x}{l} = \sqrt{\frac{1}{5}}$ der Werth $\mathfrak{M} = 0$ entspricht. Bei dieser Lage der Belastungspunkte würde daher der Bogen genau in demselben Spannungszustande sich befinden, wie bei der in Fig. 325 dargestellten Unterstützungsweise. Wenn $\frac{x}{l}$ grösser ist als $\sqrt{\frac{1}{5}}$, so wird $\mathfrak{M}$ positiv, wenn dagegen $\frac{x}{l}$ kleiner ist als $\sqrt{\frac{1}{5}}$, so wird $\mathfrak{M}$ negativ.

§ 88.

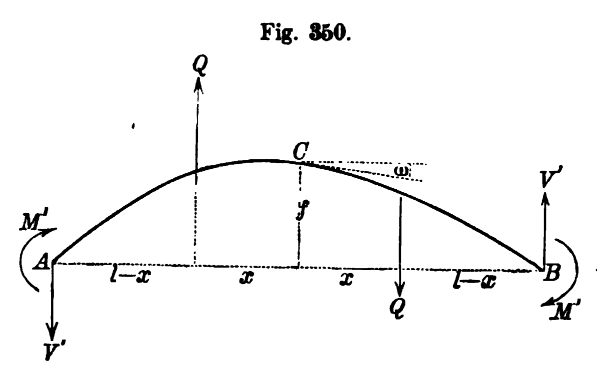
Wirkung eines an beliebiger Stelle hängenden Einzelgewichtes.

Durch die beiden Gewichte Q werden in dem Scheitelpunkte des Bogens die folgenden drei Wirkungen hervorgebracht. Erstens findet an dieser Stelle eine horizontale Druckspannung statt von der Grösse H; zweitens wird an dieser Stelle ein Biegungsmoment von der Grösse M hervorgebracht; drittens wird der Scheitelpunkt um eine gewisse Grösse sich senken, welche mit σ bezeichnet werden soll. Offenbar liefert zu jeder von diesen drei Grössen das eine von den beiden Gewichten Q einen ebenso grossen Beitrag wie das andere. Das Hinwegnehmen des einen von den beiden Gewichten wird daher zur Folge haben, dass eine jede von den drei Grössen H, M, σ auf die Hälfte reducirt wird.

Wenn die Richtungen der beiden Kräfte Q in die entgegengesetzten übergingen, d. h. wenn dieselben vertical aufwärts statt vertical abwärts wirkten, so würden die Vorzeichen jener drei Grössen ebenfalls in die entgegengesetzten übergehen; ihre absoluten Werthe würden jedoch dieselben bleiben, und die obige Schlussfolgerung würde auch für diesen Fall ihre Gültigkeit behalten. Hieraus folgt, dass bei dem in Fig. 350 dargestellten Falle — zu welchem man gelangt, indem man von den beiden abwärts wirkenden Kräften Q die linksseitige, von den beiden aufwärts

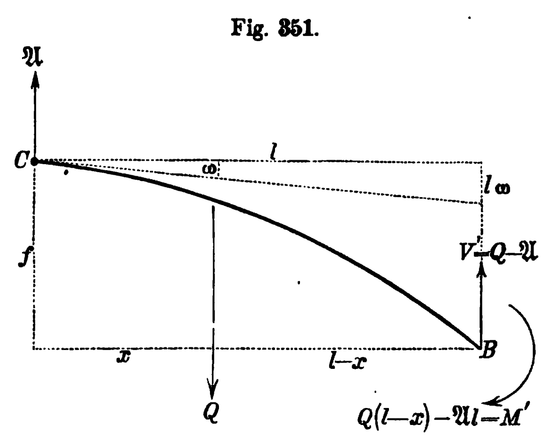
wirkenden die rechtsseitige hinweggenommen und die beiden Fälle alsdann zu einem vereinigt sich denkt — eine jede von den drei Grössen H, M, σ gleich Null sein muss.

Fig. 350.



Da in dem Scheitelpunkte C weder ein Biegungs - Moment, noch eine Horizontalspannung vorhanden ist, so kann es nur eine verticale Abscheerungskraft sein, welche daselbst von der einen Hälfte des Bogens auf die andere übertragen wird. Wäre diese Verticalkraft $\mathfrak{A}$ bekannt, so würde man — indem man auf die in Fig. 351 angedeutete Weise den Gleichgewichtszustand der rechtsseitigen Bogenhälfte sich veranschaulicht — sowohl den verticalen Gegendruck des Unterstützungspunktes B, als auch das an dieser Stelle hervorgebrachte Biegungs-Moment berechnen können, und man würde für diese Grössen die in der Figur angegebenen Werthe erhalten.

Fig. 351.



Durch die beiden Kräfte Q wurde bewirkt, dass die Tangentenrichtung am Scheitelpunkte C um den Winkel ω sich gedreht hat, während die Tangentenrichtung an der Stelle B unverändert geblieben ist. Die letztere hat daher in Bezug auf die erstere eine relative Drehung um den Winkel ω ausgeführt, wobei zugleich der Abstand des Punktes B von der (früher horizontalen) Tangentenrichtung des Scheitelpunktes sich vermindert hat um eine Grösse, welche bei der vorauszusetzenden Kleinheit

des Winkels ω ohne Bedenken gleich $l\omega$ gesetzt werden darf. Indem man diese beiden Aenderungen als Wirkungen der in Fig. **351** angegebenen drei Biegungsursachen (bestehend aus dem Gewichte Q, der vertical aufwärts wirkenden Kraft $V' = Q - \mathfrak{A}$ und dem Kräftepaare vom Momente $M' = Q(l-x) - \mathfrak{A}l$) nach der Tabelle des § 80 berechnet, gelangt man zu den beiden Gleichungen:

$$1) \quad \omega = \frac{(Q-\mathfrak{A})\,l^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{Qx^2}{2E\mathfrak{T}} - \frac{[Q(l-x)-\mathfrak{A}l]\,l}{E\mathfrak{T}},$$

$$2) \quad l\omega = \frac{(Q-\mathfrak{A})\,l^3}{3E\mathfrak{T}} - \frac{Qx^2\left(l-\frac{x}{3}\right)}{2E\mathfrak{T}} - \frac{[Q(l-x)-\mathfrak{A}l]\,l^2}{2E\mathfrak{T}},$$

und erhält durch Gleichsetzung der aus diesen beiden Gleichungen für den Winkel ω zu entnehmenden Werthe eine Gleichung, welche für $\mathfrak{A}$ aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$3) \quad \mathfrak{A} = \frac{Q}{2}\left\{2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right\}.$$

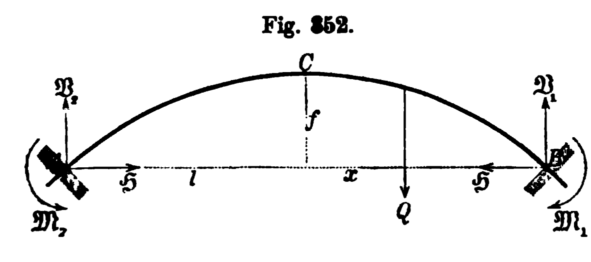
Für die in Fig. **350** mit V' und M' bezeichneten Grössen ergeben sich hiernach die Werthe:

$$4) \quad V' = \frac{Q}{2}\left(3\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$5) \quad M' = \frac{Ql}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Wenn man nunmehr die in Fig. **349** und Fig. **350** dargestellten beiden Belastungszustände gleichzeitig stattfindend sich denkt und zugleich $\frac{Q}{2}$ an die Stelle von Q setzt, so gelangt man zu dem in Fig. **352** dargestellten Falle, für welchen die Gegenwirkungen der Unterstützungspunkte zu berechnen sind aus den Gleichungen:

Fig. **352**.



$$6) \quad \mathfrak{H} = \frac{H+0}{2},$$

$$7)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{V + V'}{2}, \qquad 8)\quad \mathfrak{V}_2 = \frac{V - V'}{2},$$

$$9)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{\mathfrak{M} + M'}{2}, \qquad 10)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{\mathfrak{M} - M'}{2}.$$

Wenn man hierin für die Grössen V', M' die obigen Werthe substituirt und zugleich für die Grössen H, V, $\mathfrak{M}$ die im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe einsetzt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$11)\quad \mathfrak{H} = \frac{15\,Ql}{32f}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2,$$

$$12)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{Q}{4}\left(2 + 3\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$13)\quad \mathfrak{V}_2 = \frac{Q}{4}\left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$14)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{Ql}{16}\left(-1 + 4\frac{x}{l} + 6\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x^3}{l^3} - 5\frac{x^4}{l^4}\right),$$

$$15)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{Ql}{16}\left(-1 - 4\frac{x}{l} + 6\frac{x^2}{l^2} + 4\frac{x^3}{l^3} - 5\frac{x^4}{l^4}\right).$$

§ 89.

Wirkung einer continuirlich vertheilten Belastung.

Wenn man in den am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen fünf Gleichungen $q\,.\,dx$ an die Stelle von Q setzt und hierauf die Integration ausführt zwischen den Grenzen 0 und x, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \mathfrak{H} = \frac{15\,qlx}{32f}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{l^4}\right).$$

$$2)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{qx}{4}\left(2 + \frac{3}{2}\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$3)\quad \mathfrak{V}_2 = \frac{qx}{4}\left(2 - \frac{3}{2}\frac{x}{l} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{l^3}\right),$$

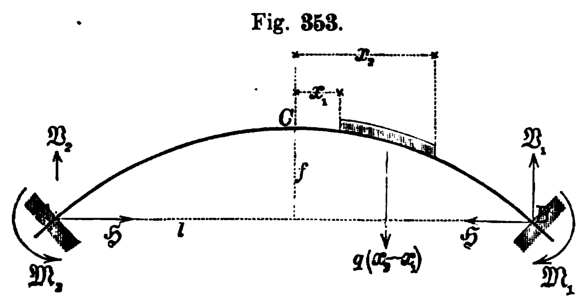
$$4)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{qlx}{16}\left(-1 + 2\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4}\right),$$

$$5)\quad \mathfrak{M}_2 = \frac{qlx}{16}\left(-1 - 2\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4}\right).$$

Wenn ferner mit $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{V}_1'$, $\mathfrak{V}_2'$, $\mathfrak{M}_1'$, $\mathfrak{M}_2'$ resp. diejenigen Werthe der obigen Grössen bezeichnet werden, welche dem Werthe $x = x_1$

entsprechen, und mit $\mathfrak{H}''$, $\mathfrak{V}_1''$, $\mathfrak{V}_2''$, $\mathfrak{M}_1''$, $\mathfrak{M}_2''$ diejenigen, welche dem Werthe $x = x_2$ entsprechen, so gelten für den in Fig. 353 dargestellten Belastungs-Zustand die Gleichungen:

Fig. 353.



$$6)\quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}'' - \mathfrak{H}', \qquad 7)\quad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_1'' - \mathfrak{V}_1', \qquad 8)\quad \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_2'' - \mathfrak{V}_2',$$

$$9)\quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1'' - \mathfrak{M}_1', \qquad 10)\quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2'' - \mathfrak{M}_2',$$

aus welchen man z. B. für den speciellen Fall, in welchem $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ ist, die folgenden Werthe erhält:

$$11)\quad \mathfrak{H} = \frac{q l^2}{4 f}, \qquad 12)\quad \mathfrak{V}_1 = \frac{13}{16} q l, \qquad 13)\quad \mathfrak{V}_2 = \frac{3}{16} q l,$$

$$14)\quad \mathfrak{M}_1 = \frac{q l^2}{16}, \qquad 15)\quad \mathfrak{M}_2 = -\frac{q l^2}{16}.$$

Wäre ausser dieser Belastung ql noch eine gleichförmig über die ganze Horizontalprojection vertheilte (permanente) Belastung von der Grösse $2pl$ vorhanden, so würden die ersteren drei Grössen zu berechnen sein aus den Gleichungen:

$$16)\quad \mathfrak{H} = \frac{p l^2}{2 f} + \frac{q l^2}{4 f},$$

$$17)\quad \mathfrak{V}_1 = pl + \frac{13}{16} q l, \qquad 18)\quad \mathfrak{V}_2 = pl + \frac{3}{16} q l,$$

während für die beiden Momente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ die Gleichungen 14) und 15) ihre Gültigkeit behalten, da die permanente Belastung zu den Biegungsmomenten an den beiden Unterstützungspunkten keinen Beitrag liefert. (Vergl. § 87.)

§ 90.

Ermittelung der Gegendrücke auf dem Wege der Construction.*)

Das in Fig. 354 mit $\mathfrak{M}_0$ bezeichnete Biegungsmoment im Scheitelpunkte C hat — nach § 87, Gleichung 6) — die Grösse $\mathfrak{M}_0 = \frac{1}{2} M$, oder:

*) Vergl. Winkler's „Lehre von der Elasticität und Festigkeit". Prag 1868.

$$1)\quad \mathfrak{M}_0 = \frac{Ql}{32}\left(-3 + 16\frac{x}{l} - 18\frac{x^2}{l^2} + 5\frac{x^4}{l^4}\right),$$

und die verticale Abscheerungskraft an dieser Stelle hat — nach § 88, Gleichung 3) oder Gleichung 13) — die Grösse:

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{2}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_2,\quad \text{oder:}$$

$$2)\quad \mathfrak{A}_0 = \frac{Q}{4}\left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Fig. 354.

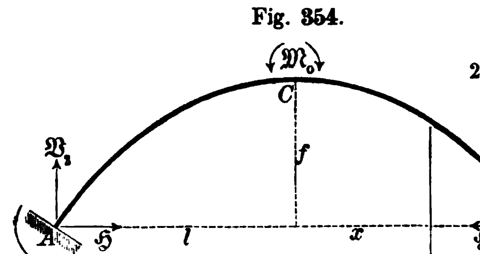


Fig. 355.

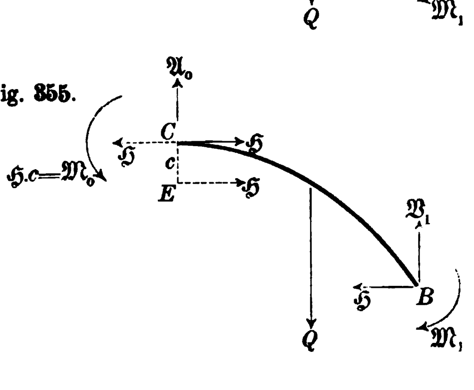
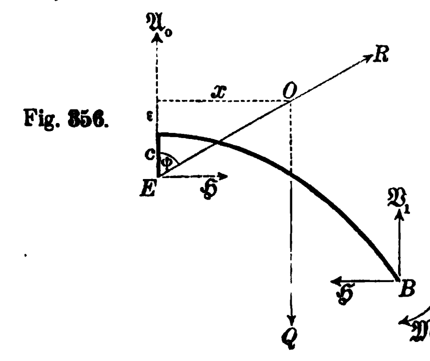


Fig. 356.



Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_0$ repräsentirt ein Kräftepaar, welches man sich auf die in Fig. 355 angedeutete Weise durch die zwei Horizontalkräfte von der — nach § 88, Gleichung 11) zu berechnenden — Grösse $\mathfrak{H}$ dargestellt denken kann. Für den zu wählenden Hebelarm dieses Kräftepaares ergiebt sich alsdann nach Figur 355 der Werth:

$$3)\quad c = \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{H}} = \frac{f}{15}\left\{\frac{-3 + 10\frac{x}{l} + 5\frac{x^2}{l^2}}{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^2}\right\}.$$

Die zwei im Scheitelpunkte C angreifenden Horizontalkräfte $\mathfrak{H}$ heben einander auf, und in dem Punkte E kann man nunmehr die daselbst angreifende Horizontalkraft $\mathfrak{H}$ mit der Verticalkraft $\mathfrak{A}_0$ zu einer Mittelkraft zusammensetzen. Die Lage des Durchschnittspunktes O, in welchem diese Mittelkraft R die Verticale des Belastungspunktes schneidet, kann man alsdann nach Fig. 356 berechnen aus der Gleichung:

$$4)\quad 0 = \mathfrak{A}_0 x - \mathfrak{H}(c+\varepsilon),\quad \text{oder:}\quad 0 = \mathfrak{A}_0 x - \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{H}\varepsilon.$$

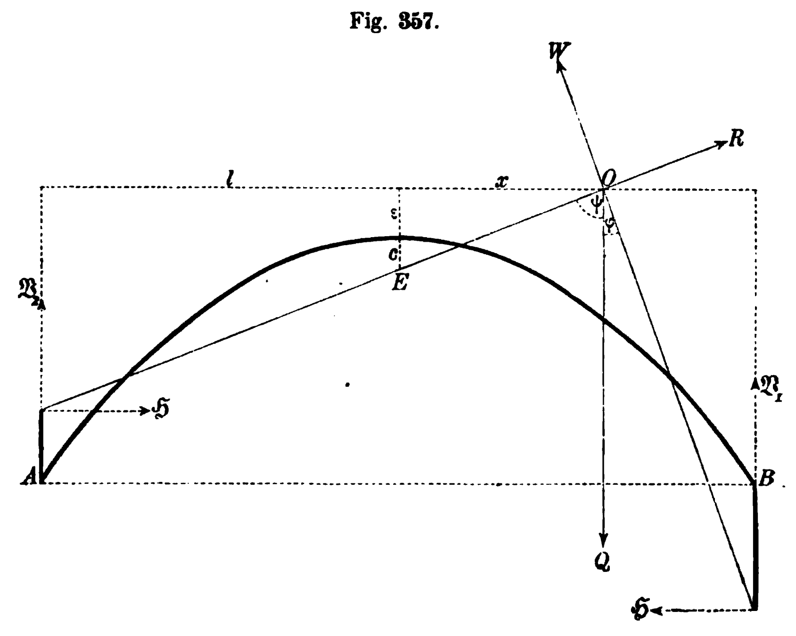
Wenn man diese Gleichung für ε auflöst und nachher für die Grössen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{H}$ die gefundenen Werthe substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$5)\quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{A}_0 x - \mathfrak{M}_0}{\mathfrak{H}} = \frac{f}{5},$$

welche zeigt, dass die Höhe des Durchschnittspunktes O über dem Scheitelpunkte des Bogens ganz unabhängig ist von der Lage des Belastungspunktes.

Denkt man sich auf gleiche Weise auch an der Unterstützungsstelle B das daselbst wirkende Kräftepaar mit den beiden Einzel-

Fig. 357.



kräften zu einer Mittelkraft zusammengesetzt, so erkennt man, dass die Richtungslinie dieser Mittelkraft W ebenfalls durch den

Punkt O hindurchgehen muss. Man kann sich daher den Bogen auf die in Fig. 357 dargestellte Weise von den drei Kräften Q, R, W im Gleichgewicht gehalten denken, und aus Gleichung 5) ergiebt sich, dass der geometrische Ort für alle Lagen, welche der Durchschnittspunkt jener drei Kräfte annehmen kann, eine horizontale gerade Linie bildet, welche in der Höhe $\varepsilon = \frac{f}{5}$ über dem Scheitelpunkte des Bogens liegt.

Die Winkel, welche die beiden Gegendrücke R und W mit der Verticalen einschliessen, sind nach Fig. 357 zu berechnen aus den Gleichungen:

$$6)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}_1},\qquad 7)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{V}_2} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}_0}.$$

§ 91.

Umhüllungslinie der Gegendrücke.

Wenn die Lage des Belastungspunktes eine unendlich kleine Aenderung erleidet, d. h. wenn dessen Abscisse x um die Grösse dx zunimmt, so wird der Abstand c um die Grösse dc und der Winkel ψ um die Grösse $d\psi$ sich vergrössern, insofern die Richtungslinie der Kraft R dabei eine andere Lage annehmen und statt der Kraft R nunmehr eine andere Kraft R' die Mittelkraft von den an der Unterstützungsstelle A auf den Bogen übertragenen Kräften bilden wird. Für die Abscisse des Durchschnittspunktes J, in welchem die Richtungslinien der beiden Kräfte R und R' einander schneiden, ergeben sich aus Fig. 358 die beiden Werthe:

Fig. 358.

$$1)\quad z = (w - c)\operatorname{tg}\psi,$$

$$2)\quad z = \left\{w - (c + dc)\right\}\operatorname{tg}(\psi + d\psi).$$

Indem man diese beiden Ausdrücke einander gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$3)\quad (w-c)\,\mathrm{tg}\,\psi = (w-c)\,\mathrm{tg}\,(\psi+d\psi) - dc\,\mathrm{tg}\,(\psi+d\psi),$$

oder:
$$4)\quad 0 = (w-c)\,d(\mathrm{tg}\,\psi) - dc\,(\mathrm{tg}\,\psi + d\,\mathrm{tg}\,\psi),$$

welcher letzteren man — nach Weglassung der Grösse $dc\,d(\mathrm{tg}\,\psi)$, als einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung — auch die folgenden Formen geben kann:

$$5)\quad w - c = \frac{\mathrm{tg}\,\psi\,.\,dc}{d(\mathrm{tg}\,\psi)},$$

$$6)\quad w = \frac{c\,.\,d(\mathrm{tg}\,\psi) + \mathrm{tg}\,\psi\,.\,dc}{d(\mathrm{tg}\,\psi)} = \frac{d(c\,\mathrm{tg}\,\psi)}{d(\mathrm{tg}\,\psi)}.$$

Nach Substitution des für $w-c$ gefundenen Ausdruckes erhält man aus Gleichung 1) für z den Werth:

$$7)\quad z = \frac{\mathrm{tg}\,\psi^2\,.\,dc}{d(\mathrm{tg}\,\psi)}.$$

Wenn man nunmehr für die Grössen c und $\mathrm{tg}\,\psi$ die im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe einsetzt, so nehmen die letzteren beiden Gleichungen die folgenden Formen an:

$$8)\quad w = \frac{d\left(\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{A}_0}\right)}{d\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}_0}\right)} = \frac{\mathfrak{A}_0\,d\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M}_0\,d\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_0\,d\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,d\mathfrak{A}_0},$$

$$9)\quad z = \left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}_0}\right)^2 \cdot \frac{d\left(\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{H}}\right)}{d\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}_0}\right)} = \frac{\mathfrak{H}\,d\mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M}_0\,d\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}_0\,d\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,d\mathfrak{A}_0}.$$

Hierin sind für die Grössen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{A}_0$ die resp. in § 88 und § 90 gefundenen Werthe zu substituiren; man erhält dann die Gleichungen:

$$10)\quad w = \frac{f}{15}\left\{\frac{23 + 20\frac{x}{l} + 5\frac{x^2}{l^2}}{3 + 4\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}}\right\},$$

$$11)\quad z = \frac{2l}{3 + \frac{x}{l}}.$$

Wenn man den aus letzterer Gleichung zu entnehmenden Werth:

$$12)\quad \frac{x}{l} = \frac{2l}{z} - 3$$

in Gleichung 10) substituirt, so nimmt dieselbe die folgende Form an:

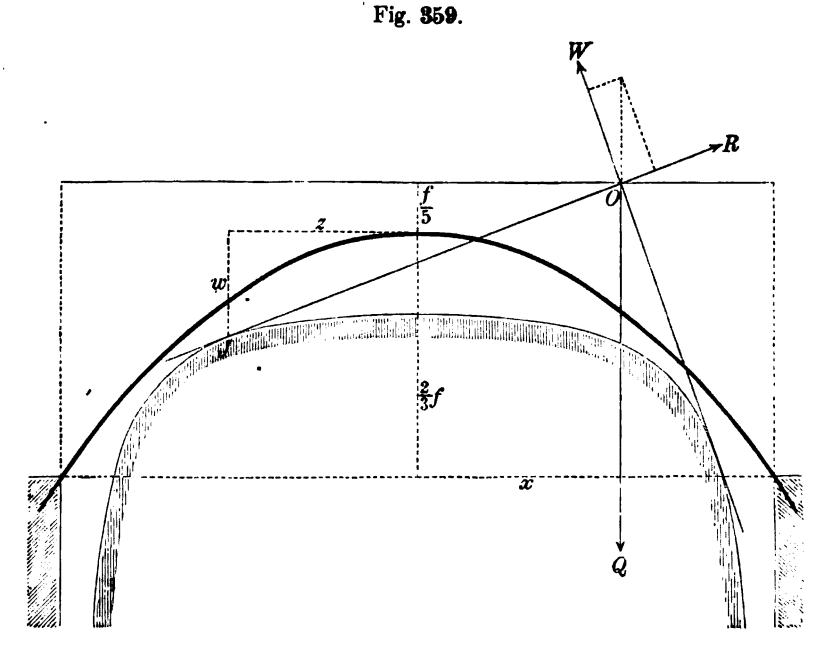
$$13) \quad w = \frac{f}{15} \left\{ \frac{5 - 5\frac{z}{l} + 2\frac{z^2}{l^2}}{1 - \frac{z}{l}} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{z}{l} =$	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$\frac{w}{f} =$	$\frac{1}{3}$	0,34	0,369	0,4	0,453	0,76	∞.

Die obige Gleichung oder die nach derselben berechnete Tabelle kann man benutzen, um die krumme Linie zu construiren, welche für alle möglichen Lagen des Durchschnittspunktes J den geometrischen Ort bildet. Da der Punkt J als Durchschnittspunkt

Fig. 359.

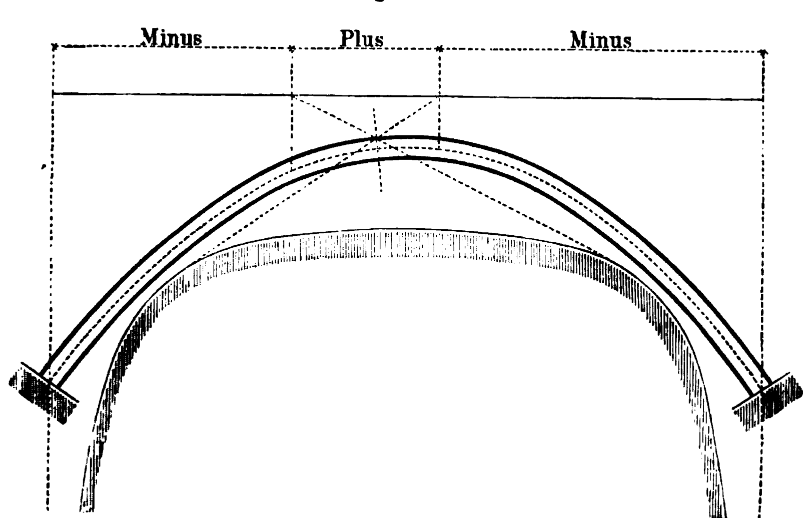


zweier auf einander folgender Tangenten dieser Curve zu betrachten ist, so bildet dieselbe die Umhüllungslinie für sämmtliche Lagen, welche die Richtungslinie der Kraft R annehmen kann. Mit Be-

nutzung dieser Umhüllungscurve kann man nunmehr die Construction der von dem Gewichte Q hervorgerufenen Gegendrücke auf ähnliche Weise wie in Fig. **330** ausführen, insofern die von dem Punkte O aus an jene Curve gelegten Tangenten die Richtungslinien jener Gegendrücke darstellen (Fig. **359**).

Es ergiebt sich hieraus, dass die in § 83 erklärte Methode des Aufsuchens der ungünstigsten Belastungszustände — derjenigen Belastungszustände nämlich, bei welchen resp. die in Fig. **334** mit X, Z, $\mathfrak{A}$ bezeichneten Spannungen ihre grössten (positiven oder negativen) Werthe annehmen — auf den Bogen mit eingemauerten Enden ebenfalls angewendet werden kann. Wenn man in den Figuren **335**, **336**, **338** die Richtungslinien der Gegendrücke — anstatt dieselben, wie dort geschehen, durch die festen Endpunkte des Bogens hindurchzulegen — tangential zu der Umhüllungslinie

Fig. **360**.



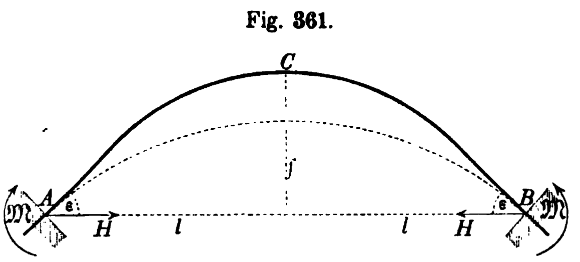
legte, so würden jene Figuren nunmehr für den vorliegenden Fall die ungünstigsten Belastungszustände darstellen. So z. B. würde die Construction derjenigen Belastungszustände, bei welchen die in Fig. **334** mit Z bezeichnete Spannung der unteren Gurtung resp. ein Maximum oder Minimum wird, für den Bogen mit eingemauerten Enden auf die in Fig. **360** angedeutete Weise auszuführen sein.

§ 92.

Berechnung der Temperatur-Spannungen.

Denkt man sich in Fig. 340 an jedem von den beiden Endpunkten des Bogens ausser der Horizontalkraft noch ein Kräftepaar angebracht, und auf solche Weise bewirkt, dass nicht nur die ursprüngliche Spannweite, sondern auch an jedem Ende die ursprüngliche Tangenten-Richtung der elastischen Linie wieder hergestellt wird, so erkennt man, dass jene Figur alsdann für den Bogen mit eingemauerten Enden die Wirkung einer Temperatur-Erhöhung darstellen würde (Fig. 361).

Fig. 361.



Um den Horizontaldruck H und das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ zu berechnen, hat man sich die eine Hälfte AC in eine feste Wand eingeschlossen zu denken, und auf die andere Hälfte BC nunmehr die Tabelle des § 80 anzuwenden. Indem man die Horizontalverschiebung des Endpunktes B (wie in § 84, Gleichung 7) gleich δl setzt, und den für ω aus jener Tabelle zu entnehmenden Werth gleich Null setzt, erhält man die beiden Gleichungen:

$$1)\quad \delta l = \frac{8Hlf^2}{15E\mathfrak{T}} + \frac{Hl}{EF} - \frac{2\mathfrak{M}lf}{3E\mathfrak{T}},$$

$$2)\quad 0 = \frac{2Hlf}{3E\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{M}l}{E\mathfrak{T}},$$

aus denen für die beiden Grössen H und $\mathfrak{M}$ die folgenden Werthe sich ergeben:

$$3)\quad H = \frac{45\delta EF\mathfrak{T}}{4Ff^2 + 45\mathfrak{T}},$$

$$4)\quad \mathfrak{M} = \frac{2}{3}Hf = \frac{30\delta fEF\mathfrak{T}}{4Ff^2 + 45\mathfrak{T}}.$$

Die im Scheitelquerschnitte hervorgebrachte grösste Druckspannung (pro Flächeneinheit) hat die Grösse:

$$5)\quad S = \frac{H}{F} + \frac{w}{\mathfrak{T}}(Hf - \mathfrak{M}),$$

und die in jedem von den beiden Endquerschnitten hervorgebrachte Druckspannung hat die Grösse:

$$6)\quad S' = \frac{H \cos \varepsilon}{F} + \frac{w}{\mathfrak{T}} \mathfrak{M}.$$

Nach Substitution des oben für $\mathfrak{M}$ gefundenen Ausdruckes erhält man für diese beiden Maximalspannungen die Werthe:

$$7)\quad S = \frac{H}{F}\left(1 + \frac{f w F}{3 \mathfrak{T}}\right),$$

$$8)\quad S' = \frac{H}{F}\left(\cos \varepsilon + \frac{2 f w F}{3 \mathfrak{T}}\right).$$

Da die Grösse $\cos \varepsilon$ nur wenig kleiner als „Eins“, dagegen der Quotient $\frac{f w F}{\mathfrak{T}}$ stets beträchtlich grösser als „Eins“ vorauszusetzen ist, so wird S' immer die grössere von jenen beiden Spannungen sein.

Nach Substitution des in Gleichung 3) für H gefundenen Werthes nehmen die obigen beiden Gleichungen die folgenden Formen an:

$$9)\quad S = \frac{15\,\delta E\,(f w F + 3\,\mathfrak{T})}{4 F f^2 + 45\,\mathfrak{T}},$$

$$10)\quad S' = \frac{15\,\delta E\,(2 f w F + 3\,\mathfrak{T} \cos \varepsilon)}{4 F f^2 + 45\,\mathfrak{T}}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt (von der Höhe h) ist $\mathfrak{T} = \frac{F h^2}{12}$ und $w = \frac{h}{2}$ zu setzen; also wird für diesen Fall:

$$11)\quad S = \frac{15\,\delta E h\,(2 f + h)}{16 f^2 + 15 h^2},$$

$$12)\quad S' = \frac{15\,\delta E h\,(4 f + h \cos \varepsilon)}{16 f^2 + 15 h^2}.$$

Wenn man hierin wieder (wie bei dem in § 84 berechneten Zahlenbeispiele) $\delta = \frac{1}{2000}$, $E = 20\,000$, $\frac{h}{f} = \frac{1}{4}$ setzt, so erhält man die Werthe:

$$S = 5, \quad S' = 8{,}86 + 0{,}55 \,.\, \cos \varepsilon,$$

und da $\cos \varepsilon$ annäherungsweise gleich „Eins“ gesetzt werden darf, so ergiebt sich hieraus für die bei einer Temperatur-Erhöhung von 41 Graden (Celsius) eintretende grösste Druckspannung der Werth:

$$S' = 9{,}4 \text{ Kil. pro Quadratmillimeter.}$$

Derselbe beträgt nahezu das Vierfache von dem in § 84 gefundenen Werthe, und zeigt, dass die Temperatur-Aenderungen bei dem Bogen mit eingemauerten Enden einen noch viel nachtheiligeren Einfluss ausüben, als bei dem Bogen mit Gelenkpunkten an den Enden (vergl. § 84).

§ 93.

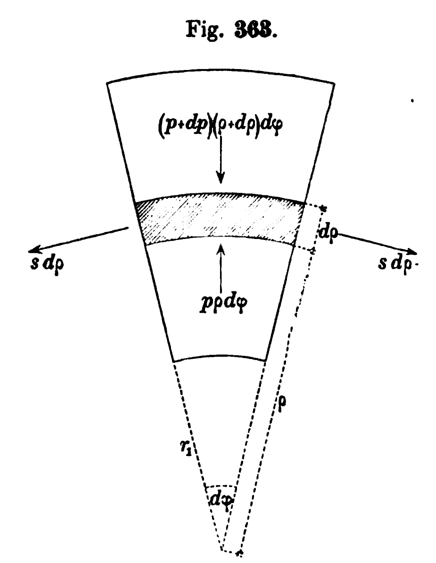
Spannungen in Röhren.

Wenn die Länge der Röhre als Längeneinheit gewählt wird, so repräsentirt in der Querschnittsfigur jede Längeneinheit der inneren oder äusseren Querschnitts-peripherie eine Flächeneinheit resp. der inneren oder äusseren Wandoberfläche (Fig. 362). Man kann daher eine Röhre, bei welcher auf jede Flächeneinheit der inneren Wandfläche der Druck p_1 und auf jede Flächeneinheit der äusseren Wandfläche der Druck p_2 wirkt, auch als einen Kreisring betrachten, bei welchem auf jede Längeneinheit der inneren Peripherie der Druck p_1 und auf jede Längeneinheit der äusseren Peripherie der Druck p_2 wirkt.

Fig. 362.

Durch diese Drücke werden in den einzelnen (unendlich schmalen) concentrischen ringförmigen Fasern, aus welchen man sich den ganzen Ring zusammengesetzt denken kann, Zug- oder Druck-Spannungen hervorgebracht, welche an allen Stellen einer und derselben Ringfaser gleiche Grösse haben. Ausserdem wird auf eine solche Ringfaser an jeder Stelle sowohl von der inneren als von der äusseren Seite her ein radial gerichteter Druck übertragen, und wenn mit p die Grösse des Druckes pro Längeneinheit (oder pro Flächeneinheit) bezeichnet wird im Abstande ϱ vom Mittelpunkte, so wird mit $p + dp$ der Druck im Abstande $\varrho + d\varrho$ zu bezeichnen sein. Hiernach kann man sich auf die in Fig. 363 dargestellte Weise den Gleichgewichtszustand des dem Centriwinkel $d\varphi$ ent-

Fig. 363.



sprechenden unendlich kleinen Bogenstückes einer solchen Ringfaser veranschaulichen, und indem man die algebraische Summe der in radialer Richtung wirkenden Seitenkräfte gleich Null setzt, erhält man die Gleichung:

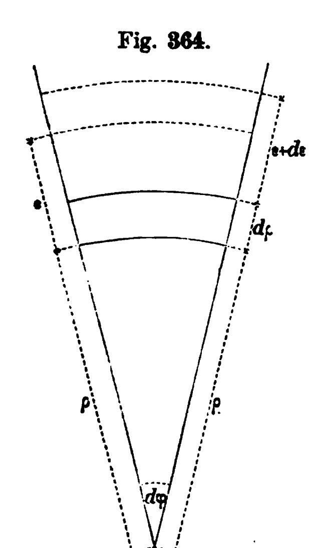
$$1)\quad 0 = 2\,s\,d\varrho \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + (p + dp)(\varrho + d\varrho)\,d\varphi - p\,\varrho\,d\varphi.$$

Hierin kann $\frac{d\varphi}{2}$ statt $\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$ gesetzt werden, und nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $d\varphi$ kann man dieser Gleichung, indem man das Glied $dp\,d\varrho$ als unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung unterdrückt, auch die folgende Form geben:

$$2)\quad 0 = s\,d\varrho + p\,d\varrho + \varrho\,dp.$$

Das gleichzeitige Vorhandensein der Spannungen s und p bedingt eine peripherische Ausdehnung der Ringfaser und zugleich eine radiale Zusammendrückung derselben. Die in Folge dessen eintretende Form- und Lagen-Veränderung des oben betrachteten unendlich kleinen Bogenstückes derselben kann man sich auf die in Fig. 364 angedeutete Weise veranschaulichen. Für das peripherische Verlängerungs-Verhältniss desselben ergiebt sich aus dem Elasticitätsgesetze die Gleichung:

Fig. 364.



$$3)\quad \frac{(\varrho + \varepsilon)\,d\varphi - \varrho\,d\varphi}{\varrho\,d\varphi} = \frac{s}{E},\ \text{oder:}$$

$$4)\quad \frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{s}{E},$$

und für das radiale Verkürzungs-Verhältniss erhält man (ebenfalls nach dem Elasticitätsgesetze) die Gleichung:

$$5)\quad \frac{d\varrho - \{(d\varrho + \varepsilon + d\varepsilon) - \varepsilon\}}{d\varrho} = \frac{p}{E},$$

oder:

$$6)\quad \frac{d\varepsilon}{d\varrho} = -\frac{p}{E}.$$

Für diesen letzteren Differenzialquotienten findet man aus Gleichung 4), indem man dieselbe differenziirt, den Ausdruck:

$$7)\quad \frac{d\varepsilon}{d\varrho} = \frac{1}{E}\left(\varrho\frac{ds}{d\varrho} + s\right).$$

Durch Gleichsetzung der in den letzteren beiden Gleichungen für den Differenzialquotienten $\frac{d\varepsilon}{d\varrho}$ gefundenen Ausdrücke erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$8)\quad s + p = -\varrho \frac{ds}{d\varrho}.$$

Für die auf der linken Seite stehende Grösse ergiebt sich aus Gleichung 2) der Werth:

$$9)\quad s + p = -\varrho \frac{dp}{d\varrho},$$

und die Gleichsetzung dieser beiden für die Grösse $s + p$ gefundenen Werthe führt zu der Gleichung:

$$10)\quad \frac{dp}{d\varrho} = \frac{ds}{d\varrho}.$$

Wenn man nunmehr die Gleichung 8) nach ϱ differenziirt und in derselben nachher $\frac{ds}{d\varrho}$ statt $\frac{dp}{d\varrho}$ setzt, so erhält man die Gleichungen:

$$11)\quad \frac{ds}{d\varrho} + \frac{dp}{d\varrho} = -\varrho \frac{d^2 s}{d\varrho^2} - \frac{ds}{d\varrho},$$

$$12)\quad \varrho \frac{d^2 s}{d\varrho^2} = -3 \frac{ds}{d\varrho}.$$

Für den Differenzialquotienten $\frac{ds}{d\varrho}$, welcher abkürzungsweise mit z bezeichnet werden soll, ergiebt sich aus Gleichung 8) der Werth:

$$13)\quad z = \frac{ds}{d\varrho} = -\left(\frac{s+p}{\varrho}\right),$$

und nach Einführung dieser Bezeichnungsweise kann man der Gleichung 12) auch die folgende Form geben:

$$14)\quad \frac{dz}{z} = -3 \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Indem man diese letztere Gleichung integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen z_1 und z, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen r_1 und ϱ — gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$15)\quad \int_{z_1}^{z} \frac{dz}{z} = -3 \int_{r_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho},$$

$$16)\quad \lg\left(\frac{z}{z_1}\right) = -3 \lg\left(\frac{\varrho}{r_1}\right),$$

$$17)\quad \frac{z}{z_1} = \left(\frac{r_1}{\varrho}\right)^3, \quad \text{oder:} \quad z\varrho^3 = z_1 r_1^3.$$

Wenn man nunmehr für die Grösse z wieder ihren Werth $\frac{ds}{d\varrho}$ einsetzt, so kann man der letzteren Gleichung auch die folgende Form geben:

$$18)\quad ds = z_1 r_1^3 \frac{d\varrho}{\varrho^3}.$$

Durch nochmalige Ausführung der Integration erhält man alsdann die Gleichungen:

$$19)\quad \int_{s_1}^{s} ds = z_1 r_1^3 \int_{r_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^3},$$

$$20)\quad s - s_1 = -\frac{z_1 z_1^3}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r_1^2}\right).$$

Nach Substitution des aus dieser letzteren Gleichung für s zu entnehmenden Werthes kann man der Gleichung 2) auch die Form geben:

$$21)\quad \left\{s_1 - \frac{z_1 r_1^3}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\right\} d\varrho = -d(p\varrho)$$

und gelangt durch Integration derselben zu den nachfolgenden Gleichungen:

$$22)\quad \left(s_1 + \frac{z_1 r_1}{2}\right)\int_{r_1}^{r_2} d\varrho - \frac{z_1 r_1^3}{2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\varrho}{\varrho^2} = -\int_{p_1,\, r_1}^{p_2,\, r_2} d(p\varrho),$$

$$23)\quad \left(s_1 + \frac{z_1 r_1}{2}\right)(r_2 - r_1) + \frac{z_1 r_1^3}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = p_1 r_1 - p_2 r_2.$$

Wenn man endlich in dieser letzteren Gleichung für die Grösse z_1 den aus Gleichung 13) zu entnehmenden Ausdruck:

$$24)\quad z_1 = -\left(\frac{s_1 + p_1}{r_1}\right)$$

substituirt und dieselbe nachher für s_1 auflöst, so erhält man die Gleichungen:

$$25)\quad \left(\frac{s_1 - p_1}{2}\right)(r_2 - r_1) + \left(\frac{s_1 + p_1}{2}\right)(r_2 - r_1)\frac{r_1}{r_2} = p_1 r_1 - p_2 r_2,$$

$$26)\quad s_1 = \frac{p_1(r_2^2 + r_1^2) - 2 p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Nachdem auf solche Weise der Werth der constanten Grösse s_1 bestimmt worden ist, kann man nunmehr die Gleichung 20) benutzen, um die veränderliche Grösse s als Function des Halb-

messers ϱ darzustellen. Zu diesem Zwecke hat man darin zunächst für z_1 den in Gleichung 24) angegebenen Werth und nachher für s_1 den in Gleichung 26) gefundenen Ausdruck zu substituiren. Man erhält dann für s die Gleichungen:

$$27)\quad s = \frac{s_1(r_1^2 + \varrho^2) + p_1(r_1^2 - \varrho^2)}{2\varrho^2}, \quad \text{oder:}$$

$$28)\quad s = \frac{p_1 r_1^2(\varrho^2 + r_2^2) - p_2 r_2^2(\varrho^2 + r_1^2)}{\varrho^2(r_2^2 - r_1^2)},$$

welche letztere nach Substitution der Werthe $s = s_2$ und $\varrho = r_2$ die folgende Form annimmt:

$$29)\quad s_2 = \frac{2p_1 r_1^2 - p_2(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

§ 94.

Berechnung der erforderlichen Wandstärke.

Um bei gegebenem inneren Halbmesser des Rohres die erforderliche Wandstärke:

$$1)\quad \Delta = r_2 - r_1$$

für dasselbe zu berechnen, hat man die stärkste in dem Rohre vorkommende Spannung gleich der practisch zulässigen Spannung S zu setzen.

Wenn man in den Gleichungen 26) und 29) des vorigen Paragraphen zunächst die Werthe $p_1 = p$ und $p_2 = 0$ substituirt, so nehmen dieselben die Formen an:

$$2)\quad s_1 = p\left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right), \qquad 3)\quad s_2 = \frac{2pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Für das Verhältniss dieser beiden Spannungen ergiebt sich hieraus der Werth:

$$4)\quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1^2}.$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass bei innerem Drucke stets an der inneren Peripherie die stärkste Spannung stattfindet. Für diesen Fall hat man demnach $s_1 = S$ zu setzen, und wenn man ausserdem für r_2 den aus Gleichung 1) zu entnehmenden Werth substituirt, so nimmt die Gleichung 2) die folgende Form an:

$$5)\quad S = p\left\{\frac{(r_1 + \Delta)^2 + r_1^2}{(r_1 + \Delta)^2 - r_1^2}\right\}.$$

Durch Auflösung derselben erhält man für das Verhältniss $\frac{\Delta}{r_1}$ den Werth:

$$6)\quad \frac{\Delta}{r_1} = \sqrt{\frac{S+p}{S-p}} - 1.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{p}{S} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{\Delta}{r_1} =$	0,1055	0,225	0,363	0,528	0,732	1	1,38	2	3,36	∞

Wenn man ein anderes Mal die Werthe $p_1 = 0$ und $p_2 = p$ substituirt, so nehmen die Gleichungen 26) und 29) des vorigen Paragraphen die Formen an:

$$7)\quad s_1 = -\frac{2pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \qquad 8)\quad s_2 = -p\left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right),$$

und man erhält für das Verhältniss der beiden Spannungen den Werth:

$$9)\quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{2r_2^2}{r_2^2 + r_1^2}.$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass bei äusserem Drucke ebenfalls an der inneren Peripherie die stärkste Spannung stattfindet, und zwar ist dieselbe in diesem Falle eine Druckspannung. Wenn man demgemäss $s_1 = -S$ und ausserdem wieder $r_1 + \Delta$ statt r_2 setzt, so erhält man aus Gleichung 7) für das Verhältniss $\frac{\Delta}{r_1}$ den Werth:

$$10)\quad \frac{\Delta}{r_1} = \sqrt{\frac{S}{S-2p}} - 1.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{p}{S} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{\Delta}{r_1} =$	0,118	0,291	0,581	1,236	∞

Wenn man endlich $p_1 = p_2 = p$ setzt, so nehmen die Gleichungen 26) und 29) des vorigen Paragraphen die Formen an:

$$11)\quad s_1 = s_2 = -p.$$

Bei gleicher Grösse des inneren und äusseren Druckes entsteht also in der Rohrwand eine überall gleichförmig vertheilte Druckspannung von eben derselben Grösse.

Dass unter gewissen Umständen die stärkste Spannung auch an der äusseren Peripherie entstehen kann, erkennt man aus Gleichung 26) des vorigen Paragraphen, indem man darin beispielsweise s_1 gleich Null setzt; man erhält dann die Bedingungsgleichung:

$$12)\quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{2 r_2^2}{r_2^2 + r_1^2},$$

und aus Gleichung 29) des vorigen Paragraphen ergiebt sich für s_2 der zugehörige Werth:

$$13)\quad s_2 = -p_1 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 r_2^2}\right) = -p_2 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}\right).$$

Auf analoge Weise findet man, dass s_2 gleich Null wird, wenn die Bedingungsgleichung:

$$14)\quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{2 r_1^2}$$

erfüllt ist, und dass für diesen Fall die Spannung s_1 den Werth annimmt:

$$15)\quad s_1 = p_1 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 + r_1^2}\right) = p_2 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 r_1^2}\right).$$

Bei der Berechnung der erforderlichen Wandstärke Δ wird man jedoch auf solche Fälle keine Rücksicht zu nehmen haben — aus dem Grunde nämlich: weil stets einer von den beiden Fällen des einseitigen Druckes — also entweder der Fall, in welchem nur der innere Druck, oder der Fall, in welchem nur der äussere Druck vorhanden ist — als der ungünstigere Fall eine grössere Wandstärke erfordern wird als der Fall des gleichzeitigen Vorhandenseins beider Drücke. Man wird daher in solchen Fällen, wo die Drücke p_1 und p_2 beide von Null verschieden sind, die erforderliche Wandstärke Δ in der Weise zu berechnen haben, dass man das eine Mal nur den Druck p_1, das andere Mal nur den Druck p_2 als vorhanden betrachtet, und von den beiden auf solche Weise für Δ gefundenen Werthen nachher den grösseren auswählt.

§ 95.

Röhren mit Verstärkungsringen.

Aus Gleichung 6) des vorigen Paragraphen ergiebt sich für $p = S$ der Werth $\Delta = \infty$. Man erkennt hieraus, dass bei alleinigem Vorhandensein eines inneren Druckes, welcher die practisch

zulässige Spannung S übersteigt, es überhaupt nicht mehr möglich sein würde, eine genügende Wandstärke herzustellen. Denn bei jeder, wenn auch noch so grossen Wandstärke würde an der inneren Peripherie in diesem Falle eine Zugspannung s_1 entstehen, welche die practisch zulässige Spannung überschreitet.

Die Schwierigkeiten, welche in solchem Falle der Herstellung eines Rohres von genügender Stärke sich entgegenstellen, kann man dadurch überwinden, dass man auf irgend eine Weise einen Druck auf die äussere Wandfläche künstlich hinzufügt und hierdurch bewirkt, dass die Zugspannung an der inneren Peripherie wieder bis auf die practisch zulässige Spannung vermindert wird.

Um die erforderliche Grösse dieses hinzuzufügenden äusseren Druckes p_2 zu berechnen, hat man in Gleichung 26) des § 93 den Werth $s_1 = S$ zu substituiren; man erhält dann durch Auflösung jener Gleichung für p_2 den Werth:

$$1)\quad p_2 = \frac{p_1(r_2^2 + r_1^2) - S(r_2^2 - r_1^2)}{2r_2^2}.$$

Wenn z. B. $p_1 = 1{,}2 \,.\, S$ und $r_2 = 2r_1$ ist, so ergiebt sich aus dieser Gleichung für p_2 der Werth:

$$2)\quad p_2 = \frac{3}{8} . S.$$

Bei alleinigem Vorhandensein des inneren Druckes würde — nach Gleichung 2) des vorigen Paragraphen — an der inneren Peripherie eine Spannung entstehen von der Grösse:

$$3)\quad s_1' = 2\,S.$$

Bei alleinigem Vorhandensein des äusseren Druckes würde — nach Gleichung 7) des vorigen Paragraphen — an derselben Stelle eine Spannung entstehen von der Grösse:

$$4)\quad s_1'' = -\,S.$$

Bei gleichzeitigem Vorhandensein beider Drücke entsteht also an der inneren Peripherie eine Spannung von der Grösse:

$$5)\quad s_1 = s_1' + s_1'' = +\,S.$$

An der äusseren Peripherie wird von dem inneren Drucke — nach Gleichung 3) des vorigen Paragraphen — die Spannung:

$$6)\quad s_2' = 0{,}8 \,.\, S$$

hervorgebracht, und von dem äusseren Drucke — nach Gleichung 8) des vorigen Paragraphen — die Spannung:

7) $s_2'' = -\frac{5}{8} S.$

Bei gleichzeitigem Vorhandensein beider Drücke entsteht also an der äusseren Peripherie eine Spannung von der Grösse:

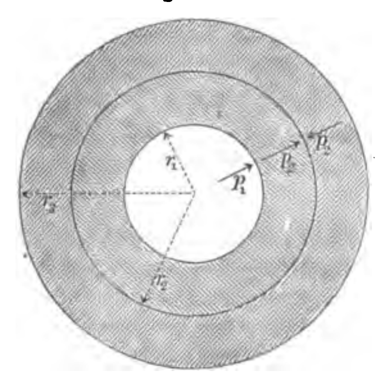
8) $s_2 = s_2' + s_2'' = 0,175 . S.$

Für ein zweites Rohr, dessen innerer Halbmesser gleich r_2 ist, würde bei dem inneren Drucke $p_2 = \frac{3}{8} S$ — nach Gleichung 6) des vorigen Paragraphen — eine Wandstärke erforderlich sein von der Grösse:

9) $r_3 - r_2 = 0,483 . r_2.$

Denkt man sich das zweite Rohr über das erste geschoben, während beide Röhren in den oben beschriebenen Spannungszuständen sich befinden, so erkennt man, dass die beiden Röhren alsdann den Druck p_2 an der Berührungsfläche auf einander gegenseitig übertragen werden (Fig. 365). Die Beiträge, welche zu den in diesem Doppelrohre hervorgebrachten Spannungen der innere Druck $p_1 = 1,2 . S$ liefert, kann man auf dieselbe Weise wie bei einem einfachen Rohre nach Gleichung 28) des § 93 berechnen, indem man darin r_3 statt r_2 und $p_2 = 0$ setzt. Für den Beitrag, welchen zu der im Abstande $\varrho = r_2 = 2 r_1$ hervorgebrachten Spannung der innere Druck allein liefert, ergiebt sich aus jener Gleichung der Werth:

Fig. 365.



10) $\sigma = 0,4924 . S.$

Das Aufhören des inneren Druckes würde zur Folge haben, dass die Spannung in diesem Abstande um eben dieselbe Grösse sich vermindert. Ohne das Vorhandensein des inneren Druckes würde also an der äusseren Peripherie des inneren Rohres eine Spannung übrig bleiben von der Grösse:

11) $s_2 - \sigma = -0,3174 . S,$

und an der inneren Peripherie des äusseren Rohres eine Spannung von der Grösse:

$$12)\quad S - \sigma = 0{,}5076 \,.\, S.$$

Bei diesen Spannungszuständen, welche die beiden miteinander verbundenen Röhren lediglich durch ihre Elasticitätskräfte in einander gegenseitig erzeugen, befindet sich das innere Rohr im zusammengedrückten Zustande, und das Verkürzungsverhältniss seines äusseren Halbmessers hat nach dem Elasticitätsgesetze die Grösse:

$$13)\quad \frac{\delta}{r_2} = \frac{0{,}3174 \,.\, S}{E}.$$

Das äussere Rohr dagegen befindet sich im ausgedehnten Zustande, und das Verlängerungsverhältniss seines inneren Halbmessers hat die Grösse:

$$14)\quad \frac{\lambda}{r_2} = \frac{0{,}5076 \,.\, S}{E}.$$

Wenn also die beiden Röhren von einander getrennt würden, und ein jedes in seinen natürlichen (spannungslosen) Zustand überginge, so würde der äussere Halbmesser des inneren Rohres die Grösse annehmen:

$$15)\quad R = r_2\left(1 + \frac{0{,}3174 \,.\, S}{E}\right),$$

und der innere Halbmesser des äusseren Rohres würde die Grösse annehmen:

$$16)\quad \mathfrak{R} = r_2\left(1 - \frac{0{,}5076 \,.\, S}{E}\right).$$

Für die Differenz dieser beiden Halbmesser ergiebt sich hieraus der Werth:

$$17)\quad R - \mathfrak{R} = r_2 \cdot \frac{0{,}825 \,.\, S}{E}.$$

Wenn beide Röhren aus Schmiedeisen bestehen, so ist $S = 6$ und $E = 20000$ zu setzen; es wird also in diesem Falle:

$$18)\quad \frac{R - \mathfrak{R}}{r_2} = 0{,}000\,2475.$$

Um das äussere Rohr in spannungslosem Zustande über das innere Rohr schieben zu können, müsste man das erstere zuvor durch Erwärmung so weit ausdehnen, bis der Halbmesser desselben um 247,5 Milliontel seiner Länge sich vergrössert. Da Schmiedeisen bei einer Temperatur-Erhöhung von 1 Grad (Celsius) um 12,2 Milliontel sich ausdehnt, so würde hierzu eine Temperatur-Erhöhung von 20,3 Graden erforderlich sein.

Die letzteren Zahlenwerthe dürfen jedoch nur als Annäherungswerthe betrachtet werden, weil bei obiger Untersuchung keine Rücksicht darauf genommen wurde, dass in Wirklichkeit die Verlängerung einer in ihrer Längenrichtung gezogenen Stange (oder Ringfaser), welche gleichzeitig einem rechtwinkelig zur Längenrichtung wirkenden Drucke ausgesetzt ist, stets grösser ist als diejenige Verlängerung, welche dem alleinigen Vorhandensein der Zugspannung entsprechen würde — und dass überhaupt die Längenänderung einer Stange nicht nur durch die in der Längenrichtung stattfindenden Spannungen, sondern auch durch die rechtwinkelig zu der Längenrichtung vorhandenen Spannungen beeinflusst wird.

SECHSTER ABSCHNITT.

Theorie des Erddruckes und Berechnung der Futtermauern.

§ 96.

Natürlicher Böschungswinkel.

Eine aus lose auf einander liegenden Körnern bestehende Erd- oder Sandmasse kann — im Gegensatze zu den sogenannten festen Körpern — betrachtet werden als ein Körper, welchem sowohl die Widerstände gegen Zugkräfte als durch die Widerstände gegen Abscheerungskräfte gänzlich fehlen; oder als ein Körper, bei welchem die einer Formänderung entgegen wirkenden inneren Kräfte lediglich in Normaldrücken und den zugehörigen Reibungswiderständen bestehen.

Durch Beimischung eines Bindemittels kann in der Erdmasse eine Art von Cohäsion erzeugt werden, welche bewirkt, dass ihr Verhalten äusseren Kräften gegenüber dem der festen Körper mehr oder weniger ähnlich wird. Auf diese in den meisten Fällen wirklich vorhandene Cohäsion soll einstweilen keine Rücksicht genommen werden.

Fig. 366.

Der Gleichgewichtszustand einer auf horizontaler Bodenfläche lagernden Erd- oder Sand-Masse würde nicht gestört werden, wenn irgend ein Theil derselben in einen starren Körper verwandelt würde. Denkt man sich auf die in Fig. 366 angedeutete Weise eine unter dem Winkel α ansteigende Ebene durch die Erdmasse hindurchgelegt, so erkennt

man, dass der oberhalb dieser Ebene befindliche Theil derselben wie ein auf schiefer Ebene ruhender starrer Körper, nur durch die Reibungswiderstände verhindert wird, auf dieser schiefen Ebene hinabzugleiten. Ein solches Hinabgleiten würde wirklich stattfinden, wenn der Neigungswinkel α grösser wäre als der Reibungswinkel φ. Wenn also die freie Oberfläche der Erdmasse an irgend einer Stelle mit der Horizontalen einen Winkel bildete, welcher grösser ist als der Reibungswinkel φ, so würde kein Gleichgewicht möglich sein; denn in solchem Falle würde es stets möglich sein, jene Ebene so zu legen, dass ein Gleiten des oberhalb derselben befindlichen Theiles der Erdmasse wirklich eintreten müsste. Hieraus folgt, dass der sogenannte „natürliche Böschungswinkel“ oder derjenige Grenzwinkel, bis zu welchem der Neigungswinkel der freien Oberfläche höchstens vergrössert werden kann, ohne dass ein Gleiten eintritt, stets gleich dem Reibungswinkel ist (Fig. 367). Wenn man diesen natürlichen Böschungswinkel auf experimentellem Wege ermittelt hat, so kann man den Reibungscoefficienten nachher berechnen aus der Gleichung:

Fig. 367.

$$1)\quad f = \operatorname{tg} \varphi.$$

Aus den zu solchem Zwecke ausgeführten Versuchen haben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe ergeben.

Material.	Gewicht eines Cubikmeters.	Natürlicher Böschungswinkel.	Reibungs-Coefficient.
Grobes Gerölle . .	1300 Kil. bis 1700 Kil.	30° bis 48°	0,58 bis 1,11
Feiner Sand	1400 „ „ 2300 „	23° „ 40°	0,42 „ 0,84
Erde	1200 „ „ 2800 „	17° „ 55°	0,31 „ 1,43
Blei-Schrot	6750 Kil.	23° „ 27°	0,42 „ 0,51
Roggen	750 „	25° „ 30°	0,47 „ 0,58
Hirse	650 „	23° „ 25°	0,42 „ 0,47
Wasser	1000 „	0°	0

§ 97.

Activer und passiver Erddruck.

Denkt man sich bei einer auf horizontaler Bodenfläche lagernden und an eine verticale Wand sich anlehnenden Erd- oder Sandmasse die Dimensionen jedes einzelnen Sandkornes auf das Hundertfache oder Tausendfache vergrössert, so erkennt man leicht, dass der Druck, welchen ein solcher Haufen von mehr oder weniger unregelmässig geformten Steinblöcken gegen die verticale Wand ausübt, sowohl von den Formen der einzelnen Blöcke, als auch von der Art ihrer Anordnung abhängen wird. Bei entsprechender Auswahl und Anordnung der einzelnen Blöcke würde es in manchen Fällen möglich sein, aus denselben ein Gebäude in solcher Weise aufzubauen, dass dasselbe ohne Mörtelverband und ohne an die Wand sich anzulehnen auf der horizontalen Bodenfläche im Gleichgewichte sich halten könnte.

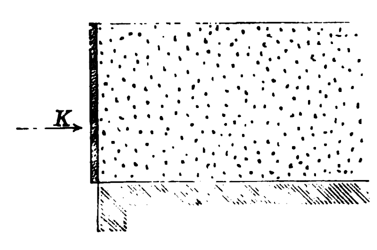
Hieraus folgt, dass zu der Bestimmung des wirklichen Druckes, welchen die Erdmasse gegen die verticale Wand ausübt, eine microscopische Ausmessung der Form jedes einzelnen Sandkornes, sowie eine genaue Kenntniss von der Art und Weise, wie ein jedes in seine Lage gelangte, erforderlich sein würde. Aber selbst dann, wenn diese Vorbedingung erfüllt wäre, und wenn es gelingen sollte, die von den unregelmässigen Formen der einzelnen Sandkörner herrührenden Rechnungsschwierigkeiten zu überwinden, so würde doch dem Resultate kein practischer Werth beizulegen sein, insofern dasselbe immer nur für den vorausgesetzten speciellen Fall Gültigkeit beanspruchen könnte.

Um zu practisch brauchbaren Resultaten zu gelangen, wird man vielmehr — wie im vorigen Paragraphen schon geschehen — die Erdmasse als einen continuirlichen, nur durch das Vorhandensein der Reibungswiderstände von einer Flüssigkeit sich unterscheidenden, Körper zu behandeln haben, und sich damit begnügen müssen, auf Grundlage von Erfahrungsresultaten gewisse Grenzwerthe zu ermitteln, in Bezug auf welche behauptet werden darf, dass die Grösse des wirklichen Druckes zwischen denselben liegen muss.

Denkt man sich die feste verticale Wand ersetzt durch eine bewegliche (gewichtlos und vollkommen glatt vorausgesetzte) ebene Platte, welche durch eine Horizontalkraft K gegen die Erdmasse gedrückt dieselbe im Gleichgewichte hält, so erkennt man, dass

die Bestimmung des Erddruckes hierdurch auf die Bestimmung der Kraft K zurückgeführt wird, insofern diese Kraft stets dem wirklichen Drucke der Erdmasse gegen die Platte gleich und entgegengesetzt sein wird (Fig. 368).

Fig. 368.



Der untere Grenzwerth, bis zu welchem hinab die Grösse der Kraft K höchstens abnehmen dürfte, wenn die Platte nicht durch den Erddruck zurückgedrängt werden soll, entspricht dem Falle des sogenannten activen Erddruckes, oder dem Falle, bei welchem die Erdmasse im Begriffe steht vorzurücken und die Platte vor sich her zu schieben — also gewissermassen activ aufzutreten.

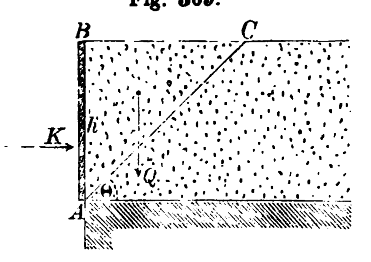
Der obere Grenzwerth, bis zu welchem hinauf die Grösse der Kraft K höchstens zunehmen dürfte, wenn nicht eine Bewegung der Platte im Sinne der Kraft K eintreten soll, entspricht dem Falle des sogenannten passiven Erddruckes, bei welchem die Erdmasse auf dem Punkte steht, von der Platte zurückgedrängt zu werden — also gewissermassen passiv sich verhält.

§ 98.

Activer Druck einer Erdmasse mit horizontaler Oberfläche.

Eine Horizontalkraft K, welche auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel θ einen Körper vom Gewichte Q am Hinabgleiten verhindern soll, muss mindestens die Grösse haben:

Fig. 369.



1) $K = Q \operatorname{tg} (\theta - \varphi)$.*)

Der Gleichgewichtszustand der in Fig. 369 dargestellten Erdmasse würde keine Störung erleiden, wenn sowohl der prismatische Theil ABC, als auch der ganze Rest der Erdmasse, jeder in einen starren Körper verwandelt würde. Da die gegen die Platte wirkende Horizontalkraft K gross genug sein soll, um jede Bewegung der Erdmasse überhaupt zu verhindern, so muss

*) Vergl. „Technische Mechanik". (Fünfte Aufl.) § 68.

dieselbe jedenfalls auch gross genug sein, um das Hinabgleiten des Prismas ABC längs der Gleitfläche AC zu verhindern. Wenn die Länge des Prismas (oder die rechtwinkelig zur Bildfläche stehende Dimension der Erdmasse) als Längeneinheit gewählt, und das Gewicht der Erdmasse pro Cubikeinheit mit γ bezeichnet wird, so ist nach Fig. 369.

$$2) \quad Q = \frac{\gamma h^2}{2 \operatorname{tg} \theta}$$

zu setzen, und man erhält für die Grösse, welche die Kraft K **mindestens** haben muss, die Gleichung:

$$3) \quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg} \theta}.$$

In dieser Gleichung hat man für θ denjenigen Werth einzusetzen, für welchen K ein Maximum wird; denn die wirklich vorhandene Kraft K soll unter allen Umständen das Hinabgleiten des Prisma ABC verhindern — welche Grösse auch immer für den Winkel θ gewählt werden möge. Indem man den Differenzialquotienten von K, nach θ genommen, gleich Null setzt, erhält man für den Winkel θ die Bedingungsgleichung:

$$4) \quad 0 = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos(\theta - \varphi)^2} - \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\cos \theta^2},$$

welcher man nach Multiplication derselben mit dem Producte der beiden Nenner auch die folgenden Formen geben kann:

$$5) \quad \sin \theta \cos \theta = \sin(\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi), \quad \text{oder:}$$

$$6) \quad \sin 2\theta = \sin(2\theta - 2\varphi).$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass die Summe der beiden Winkel 2θ und $2\theta - 2\varphi$ gleich 180^0 sein muss; folglich hat der Winkel θ die Grösse:

$$7) \quad \theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}.$$

Das durch diesen Werth des Winkels θ bestimmte Erdprisma ABC wird das „Prisma des grössten Druckes" genannt. Wenn man diesen Werth in Gleichung 3) substituirt, so erhält man für den activen Erddruck die Gleichung:

$$8) \quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Wenn man $h = 1$ setzt und die Länge eines Meters als Längeneinheit annimmt, so bedeutet γ das Gewicht der Erdmasse pro

Cubikmeter und K den activen Druck derselben gegen eine verticale Rechteckfläche von 1^m Höhe und 1^m Länge. Aus obiger Gleichung ergeben sich alsdann die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

Material.	γ	φ	K
Sand . . .	1800 Kil.	30°	300 Kil.
Schrot . .	6750 „	25°	1370 „
Roggen . .	750 „	30°	125 „
Wasser . .	1000 „	0°	500 „

§ 99.

Passiver Druck einer Erdmasse mit horizontaler Oberfläche.

Wenn bei dem in Fig. **369** dargestellten Falle das Erdprisma ABC auf der Gleitfläche AC nicht bergan geschoben werden soll, so darf die Kraft K höchstens die Grösse erreichen:

$$1)\quad K = Q \operatorname{tg}(\theta + \varphi),\text{*)}$$

und man erhält nach Substitution des im vorigen Paragraphen für Q angegebenen Ausdruckes für den oberen Grenzwerth von K die Gleichung:

$$2)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\theta + \varphi)}{\operatorname{tg}\theta}.$$

In dieser Gleichung hat man für θ denjenigen Werth einzusetzen, für welchen K ein Minimum wird; denn die wirklich vorhandene Kraft K soll überhaupt keine solche Bewegung des Erdprismas ABC hervorbringen — wie auch immer der Winkel θ gewählt werden möge. Indem man wiederum den Differenzialquotienten von K, nach θ genommen, gleich Null setzt, erhält man die den Gleichungen 4), 5), 6) des vorigen Paragraphen analog gebildeten Gleichungen:

$$3)\quad 0 = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos(\theta + \varphi)^2} - \frac{\operatorname{tg}(\theta + \varphi)}{\cos\theta^2},$$

$$4)\quad \sin\theta\cos\theta = \sin(\theta + \varphi)\cos(\theta + \varphi),$$

$$5)\quad \sin 2\theta = \sin(2\theta + 2\varphi),$$

*) Vergl. „Technische Mechanik". (Fünfte Aufl.) § 68.

aus welcher letzteren für den Winkel θ der Werth sich ergiebt:

$$6)\quad \theta = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Nach Substitution desselben erhält man aus Gleichung 2) für den **passiven** Erddruck den Werth:

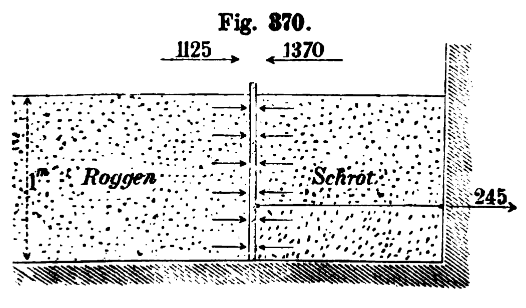
$$7)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Wenn man wiederum $h = 1^m$ setzt, so erhält man aus dieser Gleichung die in nachfolgender Tabelle zusammengesetzten Zahlenwerthe:

Material.	γ	φ	K
Sand . . .	1800 Kil.	30°	2700 Kil.
Schrot . .	6750 „	25°	8323 „
Roggen . .	750 „	30°	1125 „
Wasser . .	1000 „	0°	500 „

Denkt man sich auf horizontaler Bodenfläche neben einander lagernd zwei verschiedene Erdmassen, welche durch eine bewegliche verticale Scheidewand getrennt sind, so erkennt man, dass eine Bewegung der letzteren eintreten wird, sobald der **active** Druck an der einen Seite grösser ist als der **passive** Druck an der anderen Seite. So z. B. würde bei dem in Fig. 370 dargestellten Falle eine Bewegung der Platte nach der Roggenseite hin eintreten, wenn diese Bewegung nicht durch irgend einen Widerstand verhindert würde. Denn nach obigen Tabellen beträgt der **active** Druck des Schrotes 1370 Kil., während der **passive** Gegendruck des Roggens nur 1125 Kil. beträgt. Um die Bewegung der Platte zu verhindern, müsste daher eine nach der Schrotseite hin wirkende Kraft von 245 Kil. noch hinzugefügt werden.

Fig. 370.



§ 100.

Activer Druck einer Erdmasse mit natürlicher Böschungsfläche.

Wenn man in Fig. 371 das Verhältniss der Seiten des Dreiecks ABC gleich dem Verhältniss der Sinus der gegenüberliegenden Winkel setzt, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung:

Fig. 371.

$$1)\quad \frac{x}{h} = \frac{\sin(90^0 - \theta)}{\sin(\theta - \varphi)}, \text{ oder: } x = \frac{h\cos\theta}{\sin(\theta - \varphi)}.$$

Hiernach kann man das Gewicht des Erdprismas ABC berechnen aus der Gleichung:

$$2)\quad Q = \frac{\gamma h x \cos\varphi}{2},$$

welche nach Substitution des obigen Werthes von x die folgende Form annimmt:

$$3)\quad Q = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin(\theta - \varphi)}.$$

Wenn man in der allgemeinen Gleichung 1) des § 98 diesen Ausdruck füs Q einsetzt, so erhält man für den activen Erddruck die Gleichung:

$$4)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\cos(\theta - \varphi)},$$

in welcher für θ wiederum derjenige Werth zu substituiren ist, für welchen K ein Maximum wird.

Um diesen Werth zu finden, hat man der obigen Gleichung die folgende Form zu geben:

$$5)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2}\left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varphi}\right).$$

Man erkennt dann, dass K um so grösser wird, je kleiner der Winkel θ wird. Da jedoch von einem Hinabgleiten des Erdprismas nur die Rede sein kann, so lange der Neigungswinkel der Gleitfläche nicht kleiner ist als der Reibungswinkel, so hat man $\theta = \varphi$

zu setzen, um den grösstmöglichen Werth von K zu erhalten. Folglich hat der active Erddruck in diesem Falle die Grösse:

$$6)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \cos \varphi^2.$$

Wenn man wieder $h = 1^m$ setzt, so erhält man aus dieser Gleichung die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

Material.	γ	φ	K
Sand . . .	1800 Kil.	30°	675 Kil.
Schrot . .	6750 „	25°	2772 „
Roggen . .	750 „	30°	281 „
Wasser . .	1000 „	0°	500 „

§ 101.

Passiver Druck einer Erdmasse mit natürlicher Böschungsfläche.

Um bei dem in Fig. 371 dargestellten Falle den oberen Grenzwerth für die Kraft K zu berechnen, hat man den in Gleichung 3) des vorigen Paragraphen für Q gefundenen Werth in Gleichung 1) des § 99 zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

$$1)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\cos\theta \cos\varphi}{\sin(\theta - \varphi)} \cdot \operatorname{tg}(\theta + \varphi), \quad \text{oder:}$$

$$2)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi)}{(1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varphi)(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi)}.$$

Wenn man hierin abkürzungsweise $\operatorname{tg}\theta = z$ und $\operatorname{tg}\varphi = f$ setzt, so nimmt die letztere Gleichung die folgende Form an:

$$3)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{(z + f)}{(1 - zf)(z - f)}.$$

Hierin ist für z derjenige Werth einzusetzen, für welchen K ein Minimum wird. Indem man den Differenzialquotienten des obigen Ausdrucks, nach z genommen, gleich Null setzt, erhält man die Gleichung:

$$4)\quad 0 = (1 - zf)(z - f) - (z + f)\{1 - zf - (z - f)f\},$$

welcher man auch die folgende einfachere Form geben kann:

$$5)\quad z^2 + 2zf = 2 + f^2.$$

Durch Auflösung derselben erhält man für die Grösse z den Werth:

$$6)\quad z = -f + \sqrt{2 + 2f^2}.$$

Wenn man diesen Werth in Gleichung 3) substituirt, so erhält man für den passiven Erddruck die Gleichung:

$$7)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2\left(1 + 3f^2 - 2f\sqrt{2 + 2f^2}\right)}.$$

Für $f = 1$ oder $\varphi = 45°$ ergiebt sich aus dieser Gleichung der Werth $K = \infty$. Es kann daher von einem passiven Drucke, d. h. von einem oberen Grenzwerthe des wirklichen Druckes überhaupt nur in solchen Fällen die Rede sein, wo der natürliche Böschungswinkel kleiner ist als 45°.

Wenn man wiederum $h = 1^m$ setzt, so erhält man aus obiger Gleichung die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

Material.	γ	φ	K
Sand . . .	1800 Kil.	30°	7868 Kil.
Schrot . .	6750 „	25°	17123 „
Roggen . .	750 „	30°	3278 „
Wasser . .	1000 „	0°	500 „

§ 102.

Angriffspunkt des Erddruckes.

Nach § 98 und § 99 ist bei dem in Fig. 372 dargestellten Falle der Erddruck gegen die ganze Fläche AB zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45° \mp \frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

in welcher das Minuszeichen auf den Fall des activen, das Pluszeichen auf den Fall des passiven Druckes sich bezieht. Wenn man in dieser Gleichung z statt h setzt und zugleich den Factor $\gamma \operatorname{tg}\left(45° \mp \frac{\varphi}{2}\right)^2$ abkürzungsweise mit A bezeichnet, so erhält man für den Druck der Erdmasse gegen den oberen Flächentheil BM den Werth:

$$2)\quad P = \frac{A z^2}{2}.$$

Indem man diese Gleichung differenziirt, erhält man für den Druck gegen das unendlich kleine Flächentheilchen MN den Ausdruck:

Fig. 372.

$$3)\quad dP = Az\,dz.$$

Das statische Moment dieser letzteren Kraft in Bezug auf den Drehpunkt B hat also die Grösse:

$$4)\quad d\mathfrak{M} = dP\,.\,z = Az^2\,dz,$$

und durch Integration dieser Gleichung erhält man für die Summe der statischen Momente sämmtlicher gegen die einzelnen Flächentheilchen wirkenden Drücke den Ausdruck:

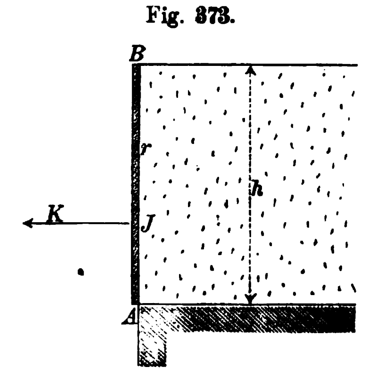
$$5)\quad \mathfrak{M} = \int_{z=0}^{z=h} dP\,.\,z = A\int_0^h z^2\,dz = \frac{Ah^3}{3}.$$

Für den Druck gegen die ganze Druckfläche AB erhält man aus Gleichung 2), indem man darin h statt z setzt, den Werth:

$$6)\quad K = \frac{Ah^2}{2}.$$

Diese Kraft ist als die Mittelkraft der gegen die einzelnen Flächentheilchen wirkenden Drücke zu betrachten, und wenn man das statische Moment dieser Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente jener einzelnen Drücke setzt, so erhält man nach Fig. 373 die Gleichung:

Fig. 373.



$$7)\quad Kr = \mathfrak{M},$$

welche nach Substitution der oben für $\mathfrak{M}$ und K gefundenen Werthe die folgende Form annimmt:

$$8)\quad \frac{Ah^2}{2}\cdot r = \frac{Ah^3}{3},\ \text{oder:}\ r = \frac{2}{3}h.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Lage des Angriffspunktes J unabhängig ist von dem Werthe des constanten Factors A. Dieselbe gilt daher auch für den Fall, in welchem die freie Oberfläche der Erdmasse unter dem natürlichen Böschungswinkel ansteigt; denn

die in § 100 und § 101 für K gefundenen Gleichungen unterscheiden sich von der Gleichung 1) nur hinsichtlich des Werthes dieser constanten Grösse A. Hieraus folgt, dass bei sämmtlichen bisher untersuchten Fällen der Angriffspunkt des Erddruckes im ersten Drittel der Höhe über der Bodenfläche liegt.

§ 103.

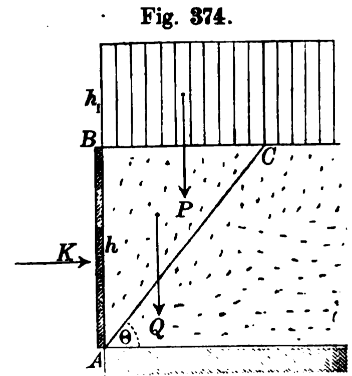
Activer Druck einer Erdmasse mit Oberflächen-Belastung.

Wenn die horizontale Oberfläche der Erdmasse mit einer gleichförmig über dieselbe vertheilten Belastung bedeckt ist, welche auf jede Flächeneinheit der Oberfläche den Druck p ausübt, so kann man sich diese Belastung dargestellt denken durch ein Material, welches dasselbe specifische Gewicht hat wie die Erdmasse selbst. Die Höhe h_1, welche diese Belastungsschicht haben muss, um durch ihr Gewicht auf jede Flächeneinheit der Unterlage den Druck p hervorzubringen, ist alsdann zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad \gamma h_1 = p, \quad \text{oder: } h_1 = \frac{p}{\gamma}.$$

Hiernach ergiebt sich für die Belastung, welche das Erdprisma ABC (Fig. 374) auf seiner horizontalen Oberfläche BC trägt, der Werth:

Fig. 374.



$$2)\quad P = \frac{\gamma h h_1}{\operatorname{tg}\theta},$$

während das eigene Gewicht dieses Erdprismas (wie in § 98) zu berechnen ist aus der Gleichung:

$$3)\quad Q = \frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\theta}.$$

Die Horizontalkraft, welche erforderlich ist um das Erdprisma ABC nebst seiner Belastung am Hinabgleiten auf der Gleitfläche AC zu verhindern, hat nach § 98 (Gleichung 1) die Grösse:

$$4)\quad K = (Q + P)\operatorname{tg}(\theta - \varphi).$$

Wenn man hierin für Q und P die obigen Werthe substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$5)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2}\left(1 + \frac{2 h_1}{h}\right)\frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg}\theta}.$$

Hierin ist für θ wiederum derjenige Winkel einzusetzen, für welchen K ein Maximum wird. Dieser Winkel hat nach § 98 (Gleichung 7) die Grösse:

$$6)\quad \theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2},$$

und nach Substitution dieses Werthes erhält man für den activen Erddruck die Gleichung:

$$7)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2}\left(1 + \frac{2h_1}{h}\right) \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Um den Angriffspunkt des Erddruckes für diesen Fall zu finden, hat man wiederum das im vorigen Paragraphen erklärte Verfahren anzuwenden. Wenn man abkürzungsweise:

$$8)\quad \gamma\left(\operatorname{tg} 45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2 = A \quad \text{und}$$

$$9)\quad \gamma h_1 \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2 = B$$

setzt, so erhält man die den Gleichungen 2) . . . 8) des vorigen Paragraphen analog gebildeten Gleichungen:

$$10)\quad P = \frac{Az^2}{2} + Bz,$$

$$11)\quad dP = (Az + B)\,dz,$$

$$12)\quad d\mathfrak{M} = dP\,.\,z = (Az^2 + Bz)\,dz,$$

$$13)\quad \mathfrak{M} = \int_{z=0}^{z=h} dP\,.\,z = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2}.$$

$$14)\quad K = \frac{Ah^2}{2} + Bh,$$

$$15)\quad Kr = \mathfrak{M},$$

$$16)\quad \left(\frac{Ah^2}{2} + Bh\right) r = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2}.$$

Wenn man in der letzteren Gleichung für die Coefficienten A und B wiederum ihre Werthe einsetzt, so erhält man für den in Fig. **373** mit r bezeichneten Hebelarm des Erddruckes in Bezug auf den Punkt B die Gleichung:

$$17)\quad \frac{r}{h} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{h_1}{h}}{\frac{1}{2} + \frac{h_1}{h}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Höhe des Angriffspunktes J über der horizontalen Bodenfläche zwischen den Grenzwerthen $\frac{h}{3}$ und $\frac{h}{2}$ variirt; denn für $h_1 = 0$ wird $r = \frac{2}{3} h$, und für $h_1 = \infty$ wird $r = \frac{1}{2} h$.

Die obigen Gleichungen kann man auch in solchen Fällen benutzen, bei welchen die Belastung ungleichförmig über die Oberfläche der Erdmasse vertheilt ist, indem man sich die wirkliche Belastung durch eine gleichförmig vertheilte Belastung ersetzt denkt und dabei für die Belastungsschicht diejenige Höhe annimmt, bei welcher sie dieselbe Wirkung hervorbringen würde, wie die wirkliche Belastung.

§ 104.

Berechnung des activen Erddruckes mit Berücksichtigung der Cohäsion.

Das was im gewöhnlichen Leben „Erde“ genannt wird, ist zu betrachten als ein Gemisch von Sandkörnern und gewissen anderen Stoffen, welche als mehr oder weniger vollkommenes Bindemittel wirkend, je nach ihrer Beschaffenheit, ein grösseres oder geringeres Maass von Cohäsion bedingen. Bei einer so beschaffenen Erdmasse wird daher einer Verschiebung des einen Theiles längs des anderen ausser dem bisher schon berücksichtigten Reibungswiderstande noch ein gewisser Abscheerungswiderstand längs der Gleitfläche entgegenwirken. Dieser Abscheerungswiderstand ist im Gegensatze zu dem Reibungswiderstande als eine Kraft zu betrachten, welche unabhängig ist von der Grösse des Normaldruckes und welche, wie bei den festen Körpern, dem Flächeninhalte der Abscheerungsfläche proportional gesetzt werden darf. Wenn also mit c der Abscheerungswiderstand pro Flächeneinheit bezeichnet wird, so hat der Abscheerungswiderstand für eine Fläche F die Grösse:

$$1)\quad W = c \,.\, F.$$

Bei dem in Fig. 375 dargestellten Falle hat die Gleitfläche AC den Flächeninhalt:

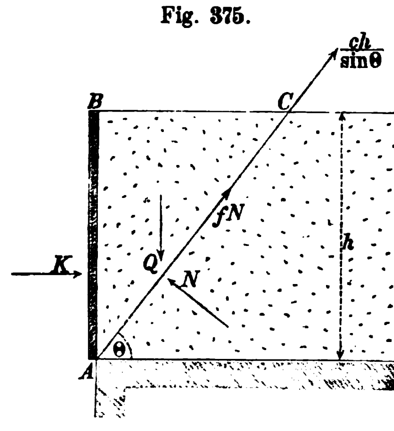
$$2)\quad F = \frac{h}{\sin\theta} \cdot 1,$$

folglich hat der Abscheerungswiderstand in diesem Falle die Grösse:

$$3)\quad W = \frac{ch}{\sin\theta}.$$

Wenn man von den auf das Erdprisma ABC wirkenden Kräften eine jede in zwei rechtwinkelig zu einander gerichtete Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine parallel und die andere normal zu der Gleitfläche AC gerichtet ist, so erhält man nach Fig. 375, indem man für jede von diesen beiden Richtungen die algebraische Summe der Seitenkräfte gleich Null setzt, die beiden Gleichungen:

Fig. 375.



$$4)\quad 0 = K\cos\theta + fN + \frac{ch}{\sin\theta} - Q\sin\theta,$$

$$5)\quad 0 = N - Q\cos\theta - K\sin\theta,$$

und wenn man den aus letzterer Gleichung für N zu entnehmenden Ausdruck in der ersteren substituirt, so erhält man für K den Werth:

$$6)\quad K = Q\left(\frac{\sin\theta - f\cos\theta}{\cos\theta + f\sin\theta}\right) - \frac{ch}{\sin\theta\,(\cos\theta + f\sin\theta)}.$$

Dieser Gleichung kann man nach Substitution der Werthe $Q = \frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\theta}$ und $f = \operatorname{tg}\varphi$ auch die folgende Form geben:

$$7)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\theta-\varphi)}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{ch\cos\varphi}{\sin\theta\cos(\theta-\varphi)}.$$

Um den activen Erddruck zu erhalten, hat man hierin für den Winkel θ denjenigen Werth einzusetzen, für welchen K ein Maximum wird.

Das erste Glied auf der rechten Seite stimmt mit dem in § 98 für K gefundenen Werthe überein und repräsentirt diejenige Grösse, welche die Kraft K haben müsste, wenn keine Cohäsion vorhanden wäre. Dieses Glied nimmt, wie in § 98 bereits gezeigt wurde, seinen grössten Werth an, wenn $\theta = 45° + \frac{\varphi}{2}$ gesetzt wird.

Um denjenigen Werth von θ zu finden, für welchen die den Nenner des zweiten Gliedes bildende Grösse $\sin\theta\cos(\theta-\varphi)$ ein Maximum wird, hat man den Differenzialquotienten derselben, nach θ genommen, gleich Null zu setzen und gelangt dabei zu folgenden Gleichungen:

$$8)\quad 0 = -\sin\theta \sin(\theta - \varphi) + \cos\theta \cos(\theta - \varphi),$$

$$9)\quad 0 = \cos(2\theta - \varphi),$$

$$10)\quad 2\theta - \varphi = 90^\circ, \quad \text{oder:} \quad \theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}.$$

Es zeigt sich also, dass derselbe Werth von θ, für welchen der Minuend ein Maximum wird, zugleich derjenige ist, für welchen der Subtrahend ein Minimum wird. Der in Gleichung 7) für K gefundene Ausdruck wird daher ein Maximum, wenn $\theta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$ gesetzt wird, und man erhält nach Substitution dieses Werthes die Gleichung:

$$11)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{ch \cos\varphi}{\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$

Um den Coefficienten c zu bestimmen, hat man denjenigen Werth $h = h_0$ aufzusuchen, für welchen $K = 0$ wird. Zu diesem Zwecke hat man der obigen Gleichung zunächst die folgende Form zu geben:

$$12)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2 \left\{1 - \frac{2c\cos\varphi}{\gamma h \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2}\right\}.$$

Wenn man hierin die Werthe $h = h_0$ und $K = 0$ einsetzt, so erhält man zur Bestimmung von c die Gleichung:

$$13)\quad 0 = 1 - \frac{2c\cos\varphi}{\gamma h_0 \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2}, \quad \text{oder:}$$

$$14)\quad c = \frac{\gamma h_0 \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2}{2\cos\varphi}.$$

Diesen Werth von c hat man nunmehr in Gleichung 12) zu substituiren, welche dann die folgende Form annimmt:

$$15)\quad K = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{h_0}{h}\right).$$

Hierin bedeutet h_0 diejenige Grenze, welche die Höhe der Erdmasse nicht überschreiten darf, wenn dieselbe, ohne an eine verticale Seitenwand sich anzulehnen, noch im Stande sein soll, sich im Gleichgewichte zu halten. Nach obiger Gleichung kann daher der active Erddruck berechnet werden, sobald diese Höhe h_0 durch directe Versuche ermittelt worden ist. Für gewöhnliche Damm-

erde ist $h_0 = 1^m$ bis 2^m, für Lehm oder Thonerde ist $h_0 = 2^m$ bis 4^m zu setzen.

Selbstverständlich ist die obige Gleichung für solche Fälle, in welchen h kleiner ist als h_0, nicht mehr als gültig zu betrachten, da nach der obigen Definition der Grösse h_0 in solchen Fällen von einem activen Drucke überhaupt nicht mehr die Rede sein kann.

§ 105.

Einfluss der Cohäsion auf die Höhenlage des Angriffspunktes.

Wenn man in der am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung abkürzungsweise:

$$1)\quad \gamma \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2 = A \quad \text{und}$$

$$2)\quad \frac{\gamma h_0}{2} \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2 = B$$

setzt, so kann man jener Gleichung auch die folgende Form geben:

$$3)\quad K = \frac{A h^2}{2} - B h.$$

Für den in Fig. 372 mit P bezeichneten Druck gegen den oberen Flächentheil $BM = z$ ergiebt sich hieraus der Werth:

$$4)\quad P = \frac{A z^2}{2} - B z,$$

und, indem man diese Gleichung differenziirt, erhält man für den Druck gegen das Flächen-Element $MN = dz$ den Werth:

$$5)\quad dP = (A z - B)\, dz.$$

Das statische Moment dieser letzteren Kraft in Bezug auf den Punkt B (Fig. 372) hat demnach die Grösse:

$$6)\quad d\mathfrak{M} = (A z^2 - B z)\, dz.$$

Um die Summe der statischen Momente sämmtlicher Drücke in Bezug auf den Punkt B zu erhalten, hat man diese Gleichung zu integriren und dabei zu berücksichtigen, dass nach der im vorigen Paragraphen für die Grösse h_0 gegebenen Definition in dem oberen Flächentheile $BL = h_0$ (Fig. 376) überhaupt keine Drücke stattfinden. Wenn man demgemäss die Integration auf der rechten Seite zwischen den Grenzen $z = h_0$ und $z = h$ ausführt, so erhält man für jene Momentensumme die Gleichung:

$$7)\quad \mathfrak{M} = \int_{h_0}^{h} (A z^2 - B z)\, dz, \quad \text{oder:}$$

$$8)\quad \mathfrak{M} = \frac{A\,(h^3 - h_0^3)}{3} - \frac{B\,(h^2 - h_0^2)}{2}.$$

Diesen Ausdruck hat man dem statischen Momente der Mittelkraft K gleich zu setzen und zugleich für letztere den in Gleichung 3) gefundenen Werth einzusetzen. Für den Hebelarm dieser Mittelkraft ergiebt sich alsdann die Gleichung:

Fig. 376.

$$9)\quad \left(\frac{A h^2}{2} - B h\right) r = \frac{A\,(h^3 - h_0^3)}{3} - \frac{B\,(h^2 - h_0^2)}{2},$$

welcher man nach Substitution der in den Gleichungen 1) und 2) resp. für die Coefficienten A und B angegebenen Ausdrücke auch die folgende Form geben kann:

$$10)\quad \frac{r}{h} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{h_0}{h} + \frac{1}{6}\,\frac{h_0^2}{h^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Angriffspunkt J bei einer Erdmasse mit Cohäsion unter sonst gleichen Umständen stets tiefer liegt als bei einer Erdmasse ohne Cohäsion; denn für $h_0 = 0$ wird $r = \frac{2}{3}\,h$, und für $h_0 = h$ wird $r = h$.

§ 106.

Stabilität der Böschungen.

Die Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn das Erdprisma ABC (als starrer Körper betrachtet) in Bezug auf das Hinabgleiten längs der Gleitfläche AC an der Grenze des Gleichgewichtes sich befinden soll, ist nach Fig. 377 auszudrücken durch die Gleichung:

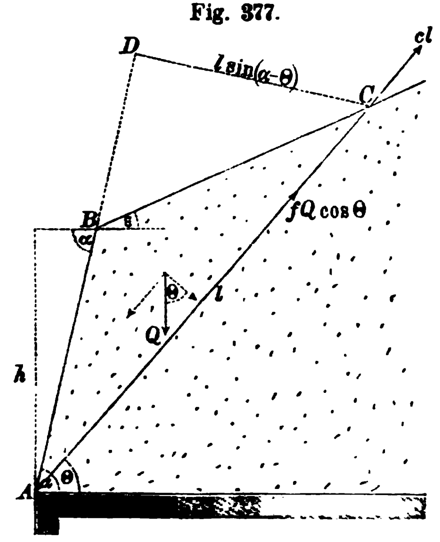
$$1)\quad Q \sin\theta = f Q \cos\theta + c l,$$

welcher man nach Substitution des Werthes $f = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ auch die folgende Form geben kann:

$$2)\quad Q \sin(\theta - \varphi) = c\,l \cos\varphi.$$

Wenn man die Linie $CD = l \sin(\alpha - \theta)$ als Höhe und die Seite $AB = \frac{h}{\sin\alpha}$ als Grundlinie des Dreiecks ABC betrachtet, so erhält man für das Gewicht des Erdprismas den Ausdruck:

Fig. 377.



$$3)\quad Q = \gamma \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \frac{l \sin(\alpha - \theta)}{2}.$$

Nach Substitution desselben nimmt die vorhergehende Gleichung, für c aufgelöst, die folgende Form an:

$$4)\quad c = \frac{\gamma h \sin(\alpha - \theta) \sin(\theta - \varphi)}{2 \sin\alpha \cos\varphi}.$$

Aus dieser Gleichung kann man für jede willkürlich angenommene Neigung der Gleitfläche AC die zum Gleichgewichte erforderliche Grösse des Cohäsionscoefficienten c berechnen. Für $\theta = \varphi$ und ebenso auch für $\theta = \alpha$ wird $c = 0$. Es muss daher zwischen diesen beiden Grenzen ein Werth von θ liegen, für welchen c ein Maximum wird. Um diesen Werth zu finden, hat man von der Function:

$$5)\quad F(\theta) = \sin(\alpha - \theta) \sin(\theta - \varphi)$$

den Differenzialquotienten, nach θ genommen, gleich Null zu setzen. Man erhält dann die Gleichung:

$$6)\quad 0 = \sin(\alpha - \theta)\cos(\theta - \varphi) - \cos(\alpha - \theta)\sin(\theta - \varphi),\ \text{oder:}$$

$$7)\quad 0 = \sin(\alpha - 2\theta + \varphi).$$

Bei dem „Prisma des kleinsten Widerstandes" hat also der Neigungswinkel der Gleitfläche die Grösse:

$$8)\quad \theta = \frac{\alpha + \varphi}{2}.$$

Nach Substitution dieses Werthes erhält man aus Gleichung 4) für jenes Maximum von c den Ausdruck:

$$9)\quad c = \frac{\gamma h \sin\left(\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)^2}{2 \sin\alpha \cos\varphi}.$$

Dieselbe Grösse müsste der wirkliche Cohäsionscoefficient mindestens besitzen, wenn in Bezug auf keine von allen durch den Fusspunkt A gelegten Flächen ein Gleiten eintreten soll. Man kann daher die obige Gleichung in der Form:

$$10)\quad h = \frac{2c \sin\alpha \cos\varphi}{\gamma \sin\left(\frac{\alpha-\varphi}{2}\right)^2},$$

indem man darin für c den wirklichen Werth des Cohäsionscoefficienten einsetzt, dazu benutzen, um diejenige Grenze zu berechnen, welche die Höhe h nicht überschreiten darf, wenn kein Einsturz erfolgen soll.

Für $\alpha = \varphi$ wird $h = \infty$; wenn dagegen α grösser ist als φ, so ergiebt sich für die Grenzhöhe h immer ein endlicher Werth. Hieraus folgt, dass die Erdmasse nur dann im Gleichgewichte sich halten kann, wenn zugleich der in Fig. **377** mit ε bezeichnete Winkel, unter welchem die obere Begrenzungsfläche derselben bis zu unendlicher Höhe ansteigt, nicht grösser ist als der Reibungswinkel φ. Im Uebrigen ist die Höhe h ganz unabhängig von der Grösse des Winkels ε, so lange derselbe jene Grenze nicht überschreitet.

Für $\alpha = 90^0$ ergiebt sich aus obiger Gleichung wiederum der in § 104 (Gleichung 13) mit h_0 bezeichnete Werth:

$$11)\quad h_0 = \frac{2c \cos\varphi}{\gamma \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$

Diese Gleichung kann man auch hier wieder dazu benutzen, um (wie in § 104) den Cohäsionscoefficienten c durch die Höhe h_0 auszudrücken, bis zu welcher die Erdmasse senkrecht abgeschnitten werden kann, ohne das Gleichgewicht zu verlieren. Wenn man die vorhergehende Gleichung durch diese letztere dividirt, so erhält man für das Verhältniss der beiden Grenzhöhen h und h_0 den Werth:

$$12)\quad \frac{h}{h_0} = \frac{\sin\alpha \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{\alpha-\varphi}{2}\right)^2}.$$

Für $\varphi = 30^\circ$ ergeben sich aus dieser Gleichung die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\alpha = 90°$	75°	60°	45°	30°
$\frac{h}{h_0} = 1$	1,649	3,232	13,76	∞,

und wenn man ein anderes Mal $\varphi = 45°$ setzt, so erhält man die zusammengehörigen Werthe:

$\alpha = 90°$	75°	60°	45°
$\frac{h}{h_0} = 1$	2,112	7,444	∞.

§ 107.

Gleichgewicht einer belasteten Erdmasse.

Wenn die wirkliche Höhe der Erdmasse kleiner ist, als die im vorigen Paragraphen für die Grenze der Stabilität gefundene Höhe, so ist in Bezug auf das Hinabgleiten des Erdprismas ABC längs der Gleitfläche AC bei jedem beliebig angenommenen Neigungswinkel der letzteren ein Ueberschuss von Stabilität vorhanden. In diesem Falle würde also das Erdprisma des kleinsten Widerstandes noch einen oben aufgelegten Körper von bestimmtem Gewichte tragen können, ohne das Gleichgewicht zu verlieren. Die Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn das mit dem Gewichte P belastete Erdprisma ABC an der Grenze des Gleichgewichtes sich befinden soll, ist nach Fig. 378 auszudrücken durch die Gleichung:

Fig. 378.

$$1) \quad (P+Q)\sin\theta = f(P+Q)\cos\theta + \frac{ch}{\sin\theta}.$$

Nach Substitution des Werthes $Q = \frac{\gamma h^2}{2\,\mathrm{tg}\,\theta}$ erhält man aus dieser Gleichung (indem man zugleich die Grössen $\sin\theta$ und $\cos\theta$ durch $\mathrm{tg}\,\theta$ ausdrückt) für P den Ausdruck:

$$2) \quad P = \frac{ch(1+\mathrm{tg}\,\theta^2)}{\mathrm{tg}\,\theta^2 - f\,\mathrm{tg}\,\theta} - \frac{\gamma h^2}{2\,\mathrm{tg}\,\theta}.$$

Wenn man abkürzungsweise $\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta} = v$ und $\frac{\gamma h^2}{2} = a$ setzt, so kann man diesem Ausdrucke auch die folgende Form geben:

$$3)\quad P = \frac{(ch + fa)\,v^2 - av + ch}{1 - fv}.$$

In dieser Gleichung hat man für v denjenigen Werth einzusetzen, für welchen P ein Minimum wird. Indem man demgemäss den Differenzialquotienten von P, nach v genommen, gleich Null setzt, erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$4)\quad \frac{(ch + fa)\,v^2 - av + ch}{1 - fv} = \frac{a - 2(ch + fa)\,v}{f}.$$

Nach Gleichung 3) ist der linksseitige Ausdruck gleich P; folglich ist:

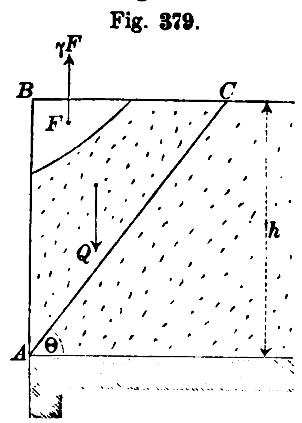
$$5)\quad P = \frac{a - 2v\,(ch + fa)}{f}.$$

Wenn man den aus dieser letzteren Gleichung für v zu entnehmenden Werth in Gleichung 3) substituirt, so erhält man eine Gleichung, welche (nach Wiedereinführung des Ausdruckes $\frac{\gamma h^2}{2}$ statt a) für P aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$6)\quad P = \frac{h}{2f^2}\left\{-(4c + \gamma f h) + 2\sqrt{2c\,(1 + f^2)(2c + \gamma f h)}\right\}.$$

Nach dieser Gleichung kann man für jede gegebene Höhe der Erdmasse denjenigen Werth von P berechnen, welcher der Grenze des Gleichgewichtes entspricht. Für $h = 0$ erhält man $P = 0$ (in Uebereinstimmung mit der gemachten Voraussetzung, nach welcher das Gewicht P stets eine Belastung des Gleit-Prismas ABC selbst bilden soll und demgemäss unendlich klein sein muss, wenn letzteres selbst unendlich klein ist. Wenn man ferner den im vorigen Paragraphen für h_0 gefundenen Ausdruck an die Stelle von h setzt, so findet man, dass für $h = h_0$ ebenfalls $P = 0$ wird. Für grössere Werthe von h ergeben sich **negative** Werthe von P. In diesem letzteren Falle kann man die obige Gleichung dazu benutzen, um die Grösse desjenigen Theiles zu berechnen, welchen man von dem Erdprisma des kleinsten Widerstandes hinwegschneiden müsste, um durch die auf solche Weise hervorgebrachte **Entlastung** den Gleichgewichtszustand desselben herzustellen. Wenn man für diesen hinwegzuschneidenden Theil die Form eines Prismas vom Querschnitte F wählt (Fig. 379), so ist:

Fig. 379.



7) $P = -\gamma F$

zu setzen, und nach Substitution dieses Ausdrucks erhält man aus Gleichung 6) für F den Werth:

8) $$F = \frac{h}{2\gamma f^2}\left\{4c + \gamma f h - 2\sqrt{2c(1+f^2)(2c+\gamma f h)}\right\}.$$

Wenn man z. B. $h_0 = 1^m{,}2$ und $f = \frac{2}{3}$ (oder $\varphi = 33^0\ 42'$) setzt, so erhält man nach § 104 (Gleichung 14) oder § 106 (Gleichung 11) den Werth: $c = 0{,}16056 \,.\, \gamma$, und nach Substitution desselben nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

9) $$F = h\left\{0{,}72252 + 0{,}75 \,.\, h - \sqrt{0{,}75407 + 1{,}5654 \,.\, h}\right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$h = 1^m{,}2$	6	12	18	24
$F = 0^{\square m}$	12,223	63,6266	159,165	300,7656.

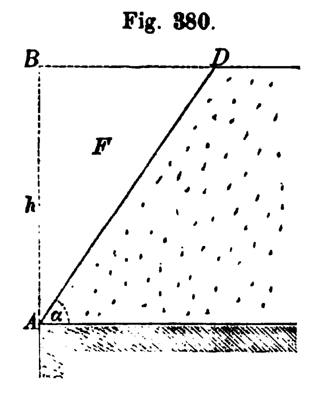
Die Form und die Lage des Flächentheils F können innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden. Nur muss derselbe stets einen Theil der Dreieckfläche ABC selbst bilden, und die Form desselben muss so gewählt werden, dass bei der neu entstehenden Böschungsfläche auch an allen höher gelegenen Stellen die Bedingungen der Stabilität erfüllt sind.

§ 108.

Stabilität terrassenförmiger Böschungen.

Wenn man für die im vorigen Paragraphen mit F bezeichnete Fläche die Form eines rechtwinkeligen Dreiecks wählt, dessen unterer Eckpunkt mit dem Fusspunkte des Böschungsprofils zusammenfällt, so ist nach Fig. 380:

Fig. 380.



1) $$F = \frac{h^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

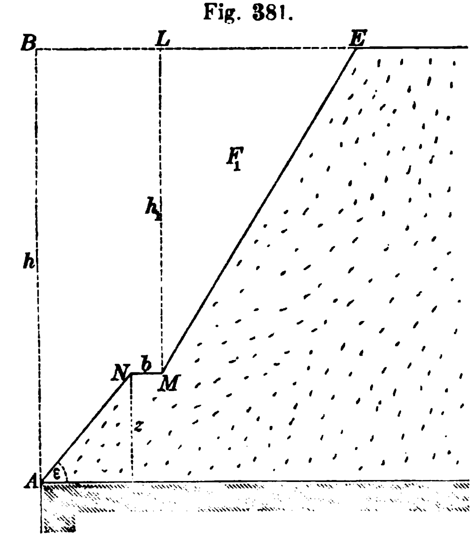
zu setzen, und man erhält zur Bestimmung des Neigungswinkels α, welchen die beim Hinwegnehmen des Theiles ABD entstehende neue Böschungsfläche AD mit der Horizontalen bilden muss, die Gleichung:

2) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h^2}{2F}.$$

Bei den im vorigen Paragraphen angenommenen Zahlenwerthen ergab sich für $h = 24^{m}$ der Werth $F = 300^{\square m},7656$. Hiernach wird für diesen Fall:

$\operatorname{tg} \alpha = 0,9575$ oder $\alpha = 43^{0}\,45'$.

Fig. 381.



Zu demselben Resultate würde auch die in § 106 gefundene Gleichung 12) führen, aus welcher man für $\alpha = 43^{0}\,45'$ wiederum den Werth: $h = 24^{m}$ erhält.

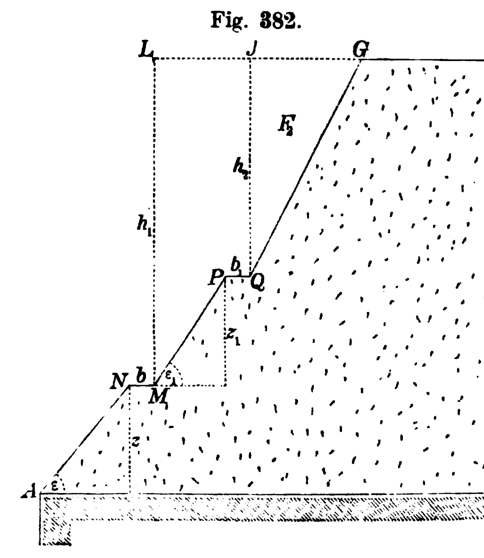
Statt der geraden Linie AD würde man als Begrenzungslinie der Fläche F auch die gebrochene Linie $ANME$ wählen können. Nach Fig. 381 ist alsdann:

$$3)\quad F - F_1 = \frac{z^2}{2 \operatorname{tg} \varepsilon} + \left(b + \frac{z}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) h_1$$

zu setzen, und man erhält durch Auflösung dieser Gleichung für die Grösse $\operatorname{tg} \varepsilon$ den Werth:

$$4)\quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{z\,(z + 2\,h_1)}{2\,(F - F_1 - b\,h_1)}.$$

Fig. 382.



Für $h = 24^{m}$ und $h_1 = 18^{m}$ wurden im vorigen Paragraphen resp. die Werthe $F = 300,7656$ und $F_1 = 159,165$ gefunden. Wenn man also $z = 6^{m}$ und $b = 0^{m},5$ setzt, so wird:

$\operatorname{tg} \varepsilon = 0,9502$, oder: $\varepsilon = 43^{0}\,32'$.

Indem man nunmehr die Horizontale MN als Bodenfläche betrachtend auf den oberhalb dieser Horizontalen befindlichen Theil der Erdmasse abermals dasselbe Verfahren anwendet und der Fläche F_1 statt der geraden Linie ME die gebrochene Linie $MPQG$ als Begrenzungslinie giebt, findet man nach Fig. 382, dass:

$$5)\quad F_1 - F_2 = \frac{z_1^2}{2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_1} + \left(b_1 + \frac{z_1}{\mathrm{tg}\,\varepsilon_1}\right) h_2$$

zu setzen ist, und erhält durch Auflösung dieser Gleichung für die Grösse $\mathrm{tg}\,\varepsilon_1$ den Werth:

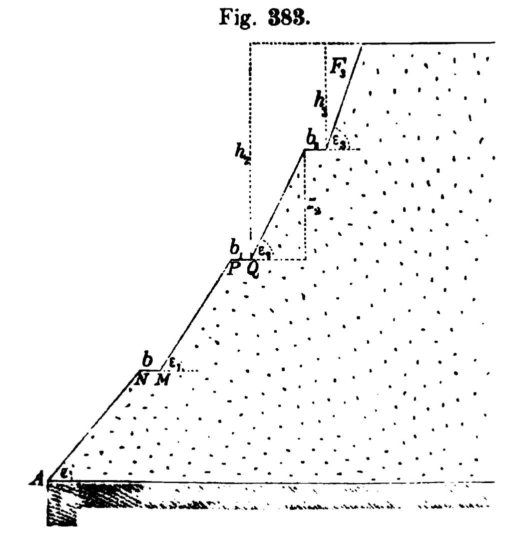
$$6)\quad \mathrm{tg}\,\varepsilon_1 = \frac{z_1(z_1 + 2h_2)}{2(F_1 - F_2 - b_1 h_2)}.$$

Für $h_1 = 18^m$ und $h_2 = 12^m$ wurden im vorigen Paragraphen resp. die Werthe $F_1 = 159{,}165$ und $F_2 = 63{,}6266$ gefunden. Wenn man also $z_1 = 6^m$ und $b_1 = 0^m{,}5$ setzt, so wird:

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_1 = 1{,}00514, \quad \text{oder:} \quad \varepsilon_1 = 45^0\ 9'.$$

Bei nochmaliger Wiederholung des obigen Verfahrens und Anwendung desselben auf den oberhalb der Horizontalen PQ befindlichen Theil der Erdmasse würde man endlich nach Fig. 383 die Gleichung erhalten:

Fig. 383.



$$7)\quad F_2 - F_3 = \frac{z_2^2}{2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_2} + \left(b_2 + \frac{z_2}{\mathrm{tg}\,\varepsilon_2}\right) h_3, \quad \text{oder:}$$

$$8)\quad \mathrm{tg}\,\varepsilon_2 = \frac{z_2(z_2 + 2h_3)}{2(F_2 - F_3 - b_2 h_3)}.$$

Den Werthen $h_2 = 12^m$ und $h_3 = 6^m$ entsprechen resp. die Werthe: $F_2 = 63{,}6266$ und $F_3 = 12{,}223$. Wenn man also $z_2 = 6^m$ und $b_2 = 0^m{,}5$ setzt, so wird:

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_2 = 1{,}1156, \quad \text{oder:} \quad \varepsilon_2 = 48^0\ 8'.$$

Der Böschungswinkel für die oberste Terrasse ist nach Fig. 383 zu berechnen aus der Gleichung:

$$9)\quad F_3 = \frac{h_3^2}{2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_3}, \quad \text{oder:} \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon_3 = \frac{h_3^2}{2F_3}.$$

Wenn man in dieser Gleichung wiederum $h_3 = 6$ und $F_3 = 12{,}223$ setzt, so erhält man den Werth:

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_3 = 1{,}4726, \quad \text{oder:} \quad \varepsilon_3 = 55^0\ 50'.$$

Bei Anwendung des oben erklärten Verfahrens hat man stets zu berücksichtigen, dass die gefundenen Resultate nur dann als gültig zu betrachten sind, wenn die am Schlusse des vorigen Pa-

ragraphen genannte Bedingung erfüllt ist, nach welcher der weggenommene Theil der Erdmasse stets dem „Prisma des kleinsten Widerstandes“ selbst entnommen werden soll. Es würde daher z. B. das in Bezug auf Fig. 381 gefundene Resultat nicht mehr als gültig zu betrachten sein, wenn die willkürlich angenommene Grösse b diejenige Grenze überschritte, bei welcher der Punkt M gerade in die Gleitfläche hineinfallen würde. Um diesen oberen Grenzwerth von b zu ermitteln, hat man zunächst aus der Gleichung 5) des vorigen Paragraphen, indem man darin $-\gamma F$ statt P setzt, den zugehörigen Werth von $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{v}$ zu berechnen. Mit Benutzung desselben findet man alsdann jenen Grenzwerth von b aus der Gleichung:

$$10)\quad b = \frac{z}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{z}{\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

Bei Ausführung dieser Rechnung findet man die Werthe $v = 1{,}247 = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ und $b = 1^m{,}168$. Da bei der obigen Berechnung $b = 0^m{,}5$ angenommen wurde, so ist das gefundene Resultat als gültig zu betrachten.

Auf gleiche Weise würde man für Fig. 382 den Grenzwerth $b_1 = 1^m{,}77$ und für Fig. 383 den Grenzwerth $b_2 = 2^m{,}8$ finden. Es zeigt sich also, dass die genannte Bedingung auch in Bezug auf die oberen Terrassen erfüllt ist, und dass die gefundenen Resultate sämmtlich als gültig betrachtet werden dürfen.

§ 109.

Gekrümmtes Böschungsprofil.

Wenn man die Grössen b, b_1, b_2 sämmtlich gleich Null setzt, so nehmen die im vorigen Paragraphen für die einzelnen Böschungswinkel gefundenen Gleichungen die folgenden Formen an:

$$1)\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{z(z + 2h_1)}{2(F - F_1)},$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{z_1(z_1 + 2h_2)}{2(F_1 - F_2)},$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\varepsilon_2 = \frac{z_2(z_2 + 2h_3)}{2(F_2 - F_3)},$$

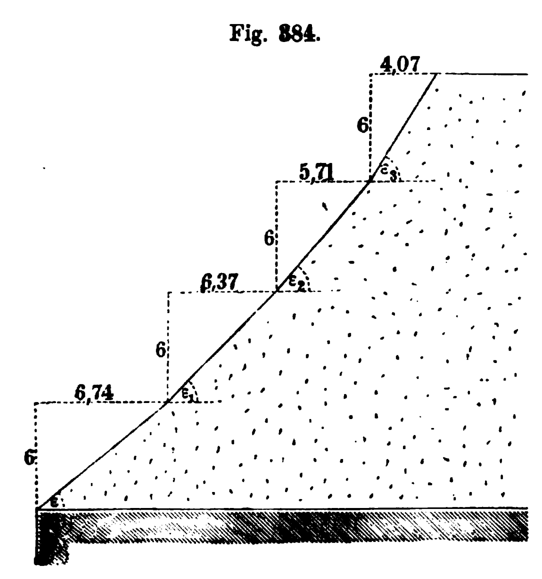
$$4)\quad \operatorname{tg}\varepsilon_3 = \frac{h_3^2}{2F_3}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für das im vorigen Paragraphen berechnete Beispiel die folgenden Zahlenwerthe:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} \varepsilon &= 0{,}89, & \varepsilon &= 41^\circ\,40', \\
\operatorname{tg} \varepsilon_1 &= 0{,}942, & \varepsilon_1 &= 43^\circ\,17', \\
\operatorname{tg} \varepsilon_2 &= 1{,}05, & \varepsilon_2 &= 46^\circ\,25', \\
\operatorname{tg} \varepsilon_3 &= 1{,}473, & \varepsilon_3 &= 55^\circ\,50',
\end{aligned}
$$

und das Böschungsprofil nimmt für diesen Fall die in Fig. 384 dargestellte Form einer aus vier geradlinigen Stücken zusammengesetzten gebrochenen Linie an.

Fig. 384.



Dasselbe Verfahren würde man auch dann noch anwenden können, wenn für die einzelnen Theile, in welche die ganze Höhe $h = 24^m$ zerlegt werden soll, eine grössere Anzahl und geringere Grösse vorgeschrieben wäre. Wenn man z. B. für jeden dieser Theile die Grösse $h_0 = 1^m,2$ wählte, so würde man eine aus zwanzig geradlinigen Stücken zusammengesetzte gebrochene Linie erhalten, deren oberstes Stück eine verticale Linie von der Länge h_0 bilden würde. Bei einem so geformten Böschungsprofil würde die Erdmasse in den Eckpunkten der gebrochenen Linie gerade an der Grenze der Stabilität sich befinden, während innerhalb der geradlinigen Strecken überall ein gewisser Ueberschuss von Stabilität vorhanden sein würde. Eine solche aus sehr vielen geradlinigen Stücken zusammengesetzte gebrochene Linie würde man annäherungsweise als eine krumme Linie behandeln dürfen, deren Krümmungsgesetz aus der Gleichung 9) des § 107 auf folgende Weise abgeleitet werden kann.

Wenn man y statt h setzt und zugleich die vier numerischen Coefficienten resp. mit A, B, C, D bezeichnet, so nimmt jene Gleichung die folgende Form an:

$$5)\quad F = Ay + By^2 - \sqrt{Cy^2 + Dy^3}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man für den Differenzialquotienten von F, nach y genommen, den Ausdruck:

$$6)\quad \frac{dF}{dy} = A + 2By - \left(\frac{2Cy + 3Dy^2}{2\sqrt{Cy^2 + Dy^3}}\right).$$

Nach der in Fig. 385 gewählten Bezeichnungsweise ist $dF = ydx$ und $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varepsilon$ zu setzen. Man kann daher der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

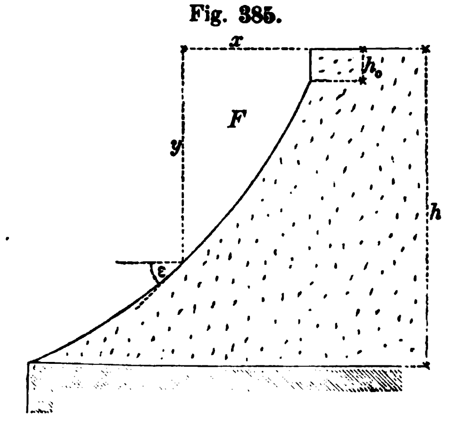
$$7)\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{A}{y} + 2B - \left(\frac{2C + 3Dy}{2\sqrt{Cy^2 + Dy^3}}\right).$$

und dieselbe in dieser Form dazu benutzen, um für jeden gegebenen Werth von y den zugehörigen Neigungswinkel des Böschungsprofils daraus zu berechnen. Für den im vorigen Paragraphen angenommenen Fall würde man z. B. die folgenden zusammengehörigen Werthe erhalten:

$y =$	1,2	6	12	18	24
$\operatorname{tg} \varepsilon =$	3,738	1,185	0,9852	0,9125	0,873
$\varepsilon =$	75° 1′	49° 50′	44° 35′	42° 23′	41° 7′.

Für $y = \infty$ wird $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{2B} = \frac{2}{3} = f$, oder: $\varepsilon = \varphi$. Hieraus folgt, dass bei wachsender Tiefe unter der horizontalen Oberfläche das Böschungsprofil einer unter dem natürlichen Böschungswinkel ansteigenden geraden Linie asymptotisch sich annähert.

Fig. 385.



Für $x = 0$ ist $y = h_0$ zu setzen; denn für den krummlinigen Theil des Böschungsprofiles hat man den im Abstande h_0 von der horizontalen Oberfläche liegenden Punkt als Anfangspunkt zu betrachten, insofern der oberhalb dieser Stelle befindliche Theil des Profiles als vertical und geradlinig vorausgesetzt wird. Die obige Gleichung ist daher für Werthe von y, welche kleiner sind als h_0, nicht mehr als gültig zu betrachten. Bei dem auf solche Weise construirten Profile wird innerhalb der oberen geradlinigen Strecke

ein Ueberschuss von Stabilität vorhanden sein, während in allen Punkten des unteren krummlinigen Theiles die Erdmasse an der Grenze der Stabilität sich befindet.

Wenn man die obige Gleichung integrirt*) — auf der einen Seite zwischen den Grenzen Null und x, auf der anderen zwischen den Grenzen h_0 und y — so erhält man die Gleichung:

$$8)\quad x = (A + \sqrt{C}) \lg\left(\frac{y}{h_0}\right) + 2B(y - h_0) + 3\left(\sqrt{C + Dh_0} - \sqrt{C + Dy}\right) - 2\sqrt{C} \lg\left\{\frac{\sqrt{C + Dy} - \sqrt{C}}{\sqrt{C + Dh_0} - \sqrt{C}}\right\},$$

welcher man nach Wiedereinsetzung der numerischen Werthe für die Coefficienten A, B, C, D auch die folgende Form geben kann:

$$9)\quad x = 1{,}591 \,.\, \lg y + 1{,}5 \,.\, y + 2{,}77745 - \sqrt{6{,}7866 + 14{,}0886 \,.\, y} - 1{,}7367 \,.\, \lg\left\{\sqrt{1{,}326 + 2{,}7525 \,.\, y} - 1{,}1515\right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$y =$ 1,2	6	12	18	24
$x =$ 0	3,1212	8,778	15,132	21,8678.

Bei dem nach obiger Gleichung construirten Böschungsprofile würde man den oberhalb einer beliebig gewählten Stelle M befindlichen Theil desselben auch durch eine gerade Linie ersetzen können, wenn nur diese gerade Linie so gelegt wird, dass die Grösse der in Fig. 385 mit F bezeichneten Fläche dabei keine Aenderung erleidet. Den Neigungswinkel, welchen diese gerade Linie mit der Horizontalen bilden müsste, kann man nach der

---

*) Das von dem letzten Gliede der Gleichung 7) herrührende Integral kann man nach Substitution der Werthe: $\sqrt{C + Dy} = u$, $y = \frac{u^2 - C}{D}$, $dy = \frac{2u\,du}{D}$ in folgender Weise umformen:

$$-\int \frac{(2C + 3Dy)\,dy}{2\sqrt{Cy^2 + Dy^3}} = -2C\int \frac{du}{u^2 - C} - 3\int du$$

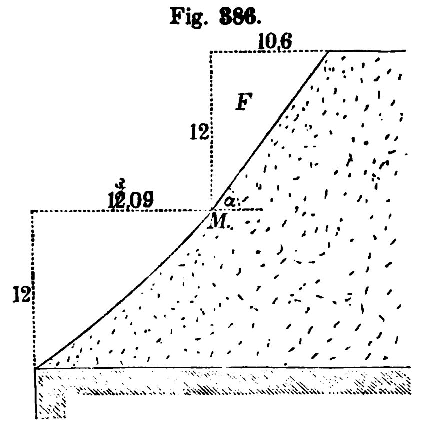
$$= \sqrt{C}\left\{\int \frac{du}{u + \sqrt{C}} - \int \frac{du}{u - \sqrt{C}}\right\} - 3\int du$$

$$= \sqrt{C} \lg\left(\frac{u + \sqrt{C}}{u - \sqrt{C}}\right) - 3u + \text{Const.}$$

$$= 2\sqrt{C} \lg\left(\frac{\sqrt{u^2 - C}}{u - \sqrt{C}}\right) - 3u + \text{Const.}$$

Gleichung 2) des vorigen Paragraphen berechnen, indem man darin für h den Abstand des gewählten Punktes von der horizontalen Oberfläche, und für F den aus der Gleichung 9) des § 107 zu entnehmenden Werth substituirt.

Fig. 886.



Wenn man z. B. $h = 12^m$ annimmt, so ist $F = 63{,}6266$ zu setzen, und es wird:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1{,}1316, \quad \text{oder:} \quad \alpha = 48^0\,32'.$$

Für diesen Fall würde man das in Fig. 886 dargestellte Böschungsprofil erhalten, bei welchem ebenfalls in dem oberen geradlinigen Theile ein Ueberschuss von Stabilität vorhanden ist, während in allen Punkten des unteren krummlinigen Theiles die Erdmasse an der Grenze der Stabilität sich befindet.

§ 110.

Gleichgewicht einer nicht homogenen Erdmasse.

Um die Gleichung 6) des § 107 auf eine Erdmasse anzuwenden, bei welcher der Cohäsionscoefficient und das Gewicht pro Cubikeinheit mit zunehmendem Abstande von der horizontalen Oberfläche nach irgend einem gegebenen Gesetze sich ändern, würde man für die Grössen c und γ in jener Gleichung ihre mittleren Werthe einzusetzen haben — diejenigen Werthe nämlich, welche man bei einer homogenen Erdmasse annehmen müsste, um resp. für den Cohäsionswiderstand und das Gewicht des Erdprisma Werthe zu erhalten, welche den wirklichen Grössen dieser beiden Kräfte gleich sind.

So z. B. würde man für eine Erdmasse, bei welcher jene beiden Coefficienten mit wachsender Tiefe gleichförmig zunehmen, für den Cohäsionscoefficienten den Werth:

$$1) \quad c = \frac{c_0 + c_1}{2}$$

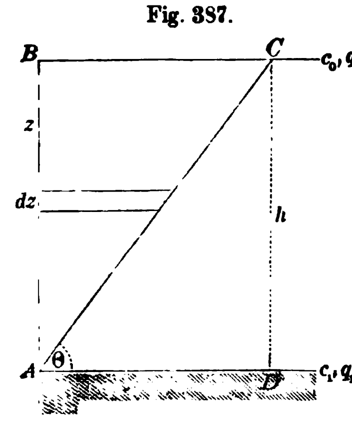
zu substituiren haben, wenn mit c_0 und c_1 die Werthe desselben bezeichnet werden, welche resp. den Werthen $y = 0$ und $y = h$ entsprechen.

Um den mittleren Werth des Gewichtes pro Cubikeinheit für das Erdprisma ABC zu berechnen, hat man die Grösse:

$$2)\quad Q = \frac{\gamma h^2}{2 \operatorname{tg} \theta},$$

welche bei homogener Erdmasse das Gewicht desselben darstellen würde, dem wirklichen Gewichte dieses Prisma gleichzusetzen. Wenn mit q das Gewicht pro Cubikeinheit im Abstande z von der horizontalen Oberfläche bezeichnet wird, so hat das wirkliche Gewicht nach Fig. 387 die Grösse:

Fig. 387.



$$3)\quad Q = \int_0^h q\left(\frac{h-z}{\operatorname{tg}\theta}\right) dz,$$

und man erhält durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke die Gleichung:

$$4)\quad \frac{\gamma h^2}{2} = \int_0^h q\,(h-z)\,dz.$$

Wenn mit q_0 und q_1 resp. die Werthe von q bezeichnet werden, welche den Werthen $z = 0$ und $z = h$ entsprechen, so ist nach dem oben angenommenen Gesetze:

$$5)\quad q = q_0 + \frac{z}{h}(q_1 - q_0)$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Werthes nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$6)\quad \frac{\gamma h^2}{2} = \int_0^h \left\{q_0 + \frac{z}{h}(q_1 - q_0)\right\}(h-z)\,dz.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man aus dieser Gleichung für γ den Werth:

$$7)\quad \gamma = \frac{2q_0 + q_1}{3}.$$

Wenn statt der Dreieckfläche ABC die Rechteckfläche $ABCD$ als Querschnitt des Prismas gelten sollte, so würde der mittlere Werth des Gewichtes pro Cubikeinheit zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$8)\quad \gamma = \frac{q_0 + q_1}{2}.$$

Nach der in Fig. 388 gewählten Bezeichnungsweise würde man hiernach für die drei Mittelwerthe γ_1, γ_2, γ_3 die folgenden Ausdrücke erhalten:

$$9)\quad \gamma_1 = \frac{2q_0 + q'}{3},$$

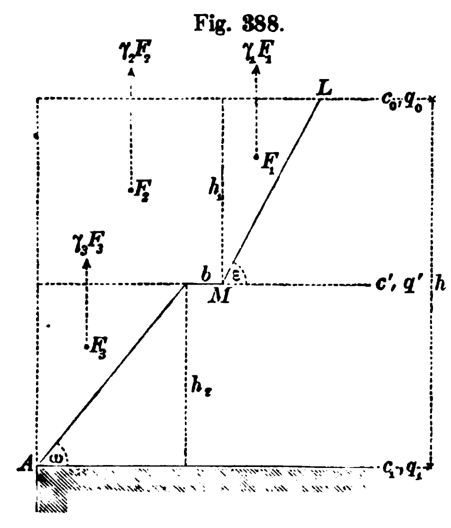
$$10)\quad \gamma_2 = \frac{q_0 + q'}{2},$$

$$11)\quad \gamma_3 = \frac{2q' + q_1}{3},$$

und mit Benutzung derselben die Berechnung des in dieser Figur dargestellten Böschungsprofiles nunmehr auf folgende Weise ausführen können.

Man berechnet zunächst nach der Gleichung 8) des § 107, indem man darin für die Coefficienten c und γ resp. die aus den Gleichungen 1) und 7) zu entnehmenden Mittelwerthe einsetzt, das erforderliche Entlastungsgewicht γF für den Fusspunkt A des ganzen Böschungsprofiles AML. Indem man diesen Werth gleich der Summe der drei in Fig. 388 angegebenen Entlastungsgewichte setzt, erhält man alsdann die Gleichung:

Fig. 388.



$$12)\quad \gamma F = \gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \gamma_3 F_3.$$

In dieser Gleichung stellt das Glied $\gamma_1 F_1$ das für den Fusspunkt M der oberen Terrasse erforderliche Entlastungsgewicht dar, welches man ebenfalls nach der Gleichung 8) des § 107 berechnen kann, indem man darin h_1 statt h und γ_1 statt γ, ferner $\frac{c_0 + c'}{2}$ statt c setzt. Wenn man nunmehr für die Flächen F_2 und F_3 die aus Fig. 388 zu entnehmenden Werthe substituirt, so nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$13)\quad \gamma F = \gamma_1 F_1 + \gamma_2 \left(b + \frac{h_2}{\operatorname{tg}\omega}\right) h_1 + \frac{\gamma_3 h_2^2}{2 \operatorname{tg}\omega}.$$

und man erhält durch Auflösung derselben für die Grösse $\operatorname{tg}\omega$ den Werth:

$$14)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{h_2(2\gamma_2 h_1 + \gamma_3 h_2)}{2(\gamma F - \gamma_1 F_1 - \gamma_2 b h_1)}.$$

Indem man endlich die Grösse F_1 dem aus Fig 388 für diese Fläche zu entnehmenden Werthe gleichsetzt, erhält man zur Bestimmung des Winkels ε die Gleichung:

$$15)\quad F_1 = \frac{h_1^2}{2\operatorname{tg}\varepsilon}, \text{ oder: } \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{h_1^2}{2F_1}.$$

Wenn man mit Beibehaltung der in § 107 angenommenen Werthe $f = \frac{2}{3}$ und $h = 24^m$ für die beiden Terrassen gleiche Höhen annimmt, also $h_2 = h_1 = 12^m$ setzt, und ausserdem für die in Fig. 388 eingeschriebenen Coefficienten die folgenden Werthe annimmt:

$$c_0 = 240^{Kil.},84, \qquad q_0 = 1500 \text{ Kil.},$$
$$c' = 272^{Kil.},952, \qquad q' = 1800 \text{ „}$$
$$c_1 = 305^{Kil.},064, \qquad q_1 = 2100 \text{ „}$$

so erhält man für die bei der obigen Berechnung zu benutzenden mittleren Coefficienten die Zahlenwerthe:

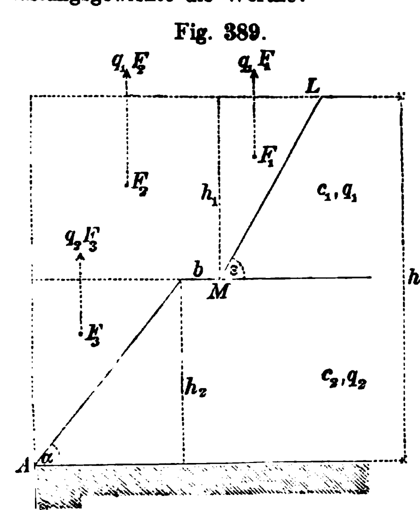
$$\frac{c_0 + c'}{2} = 256{,}896, \qquad \frac{c_0 + c_1}{2} = 272{,}952,$$

$$\gamma = 1700, \quad \gamma_1 = 1600, \quad \gamma_2 = 1650, \quad \gamma_3 = 1900,$$

und für die beiden nach der Gleichung 8) des § 107 zu berechnenden Entlastungsgewichte die Werthe:

$$\gamma F = 511\,301{,}52,$$
$$\gamma_1 F_1 = 101\,802{,}56.$$

Fig. 389.



Mit Benutzung derselben findet man alsdann nach den Gleichungen 14) und 15), indem man $b = 0^m,5$ setzt, die Werthe:

$$\operatorname{tg}\omega = 0{,}937, \quad \text{oder:} \quad \omega = 43^0\,8',$$
$$\operatorname{tg}\varepsilon = 1{,}1316, \quad \text{oder:} \quad \varepsilon = 48^0\,32'.$$

Auf ähnliche Weise würde man das Böschungsprofil auch für den in Fig. 389 dargestellten Fall berechnen können, bei welchem die ganze Erdmasse aus zwei verschiedenen über einander liegenden horizontalen Schichten besteht, deren jede für sich eine homogene Masse bildet. Für diesen Fall würde $\gamma_1 = \gamma_2 = q_1$ und $\gamma_3 = q_2$ zu setzen sein, und für die bei der

Berechnung des ganzen Entlastungsgewichtes zu benutzenden Mittelwerthe würde man bei Anwendung des oben erklärten Verfahrens die folgenden Gleichungen erhalten:

$$\frac{\gamma h^2}{2 \operatorname{tg} \theta} = \frac{q_1 h^2}{2 \operatorname{tg} \theta} + \frac{(q_2 - q_1) h_2^2}{2 \operatorname{tg} \theta}, \quad \text{oder:}$$

$$16) \quad \gamma = q_1 + \frac{h_2^2}{h^2}(q_2 - q_1),$$

$$\frac{ch}{\sin \theta} = \frac{c_1 h_1}{\sin \theta} + \frac{c_2 h_2}{\sin \theta}, \quad \text{oder:}$$

$$17) \quad c = c_1 \cdot \frac{h_1}{h} + c_2 \cdot \frac{h_2}{h}.$$

Wenn man z. B. $c_1 = 256{,}896$, $c_2 = 289{,}008$, $q_1 = 1600$, $q_2 = 2000$ und $h_2 = h_1 = 12^m$ setzt, so wird $c = 272{,}952$, $\gamma = 1700$; und wenn man mit Benutzung dieser Mittelwerthe die Berechnung des vorigen Zahlenbeispiels wiederholt, so erhält man die Werthe:

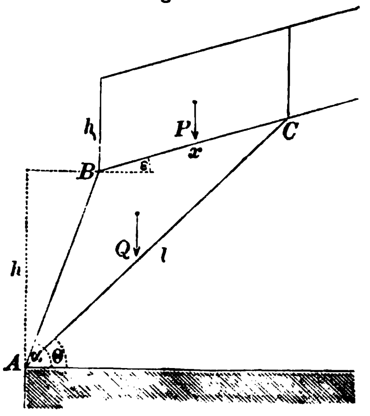
$$\operatorname{tg} \omega = 0{,}9362, \quad \text{oder:} \quad \omega = 43^\circ 7',$$
$$\operatorname{tg} \varepsilon = 1{,}1316, \quad \text{oder:} \quad \varepsilon = 48^\circ 32'.$$

§ 111.

Erdmasse mit gleichförmig über die Oberfläche vertheilter Belastung.

Die Belastungsschicht kann man sich immer — wie in § 103 mit Bezug auf Fig. 374 erklärt wurde — aus einem Materiale bestehend denken, welches dasselbe specifische Gewicht hat wie die darunter befindliche Erdmasse selbst. Der Belastungstheil, welchen das Erdprisma ABC zu tragen hat, ist alsdann nach Fig. 390 zu berechnen aus der Gleichung:

Fig. 390.



$$1) \quad P = \gamma \,.\, h_1 \,.\, x \cos \varepsilon,$$

und wenn man hierin für die Grösse x den aus der Gleichung:

$$2) \quad \frac{x}{l} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin(\alpha - \varepsilon)}$$

zu entnehmenden Werth einsetzt, so erhält man für diese Belastung den Ausdruck:

$$3) \quad P = \frac{\gamma h_1 l \cos \varepsilon \sin(\alpha - \theta)}{\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Das eigene Gewicht des Erdprismas ABC hat nach § 106 (Gleichung 3) die Grösse:

$$4)\quad Q = \frac{\gamma h l \sin(\alpha - \theta)}{2 \sin \alpha},$$

und für das Totalgewicht des belasteten Erdprismas erhält man durch Addition der letzteren beiden Gleichungen den Werth:

$$5)\quad Q + P = \gamma l \sin(\alpha - \theta) \left\{ \frac{h}{2 \sin \alpha} + \frac{h_1 \cos \varepsilon}{\sin(\alpha - \varepsilon)} \right\}.$$

Diesen Ausdruck hat man in der Gleichung 2) des § 106 an die Stelle von Q zu setzen. Jene Gleichung nimmt alsdann für c aufgelöst die folgende Form an:

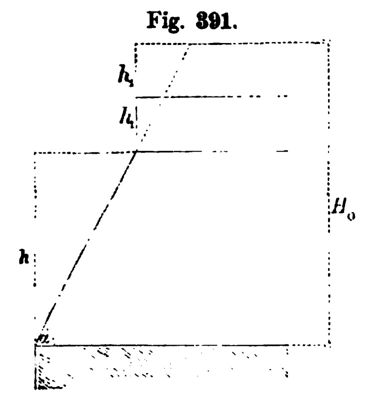
$$6)\quad c = \frac{\gamma}{\cos \varphi} \left\{ \frac{h}{2 \sin \alpha} + \frac{h_1 \cos \varepsilon}{\sin(\alpha - \varepsilon)} \right\} \sin(\alpha - \theta) \sin(\theta - \varphi).$$

In dieser Gleichung ist für den Winkel θ derjenige Werth einzusetzen, für welchen c ein Maximum wird. Bei Vergleichung derselben mit der Gleichung 4) des § 106 erkennt man, dass die Function des Winkels θ in beiden Gleichungen dieselbe Form hat. Es ist daher auch hier wieder $\theta = \frac{\alpha + \varphi}{2}$ zu setzen, und nach Substitution dieses Werthes nimmt die obige Gleichung für h aufgelöst die folgende Form an:

$$7)\quad h = \frac{2 c \sin \alpha \cos \varphi}{\gamma \sin \left(\frac{\alpha - \varphi}{2} \right)^2} - \frac{2 h_1 \sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stimmt mit dem in § 106 (Gleichung 10) für h gefundenen Werthe überein, und stellt diejenige Höhe dar, bei welcher die unbelastete Erdmasse gerade noch im Gleichgewichte sich würde halten können. Man kann daher, indem man diese nach § 106 zu berechnende Grenzhöhe mit H_0 bezeichnet, der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

Fig. 391.



$$8)\quad h = H_0 - \frac{2 h_1 \sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

Wenn die Oberfläche der Erdmasse eine horizontale Ebene bildet, so ist hierin $\varepsilon = 0$ zu setzen. Für den in Fig. 391 dargestellten Fall wird also:

$$9)\quad h = H_0 - 2h_1 \quad \text{oder:} \quad h_1 = \frac{H_0 - h}{2}.$$

Für $\varphi = 30^0$ und $\alpha = 45^0$ wurde in der am Schlusse des § 106 berechneten Tabelle der Werth: $H_0 = 13{,}76 \,.\, h_0$ gefunden. Wenn also z. B. $h_0 = 2^m$ ist, so wird für diesen Fall $H_0 = 27^m{,}52$. Bei dieser Höhe würde die unbelastete Erdmasse an der Grenze des Gleichgewichtes sich befinden. Wenn die wirkliche Höhe h kleiner ist als $27^m{,}52$, so wird die Erdmasse auf ihrer horizontalen Oberfläche noch eine Belastungsschicht tragen können von der Höhe:

$$h_1 = \frac{27{,}52 - h}{2}.$$

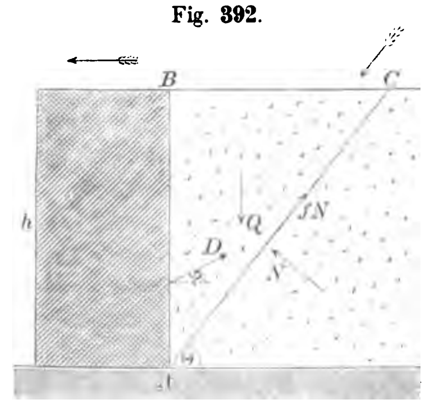
So z. B. erhält man für $h = 17^m{,}52$ den Werth $h_1 = 5^m$; d. h. wenn die Belastungsschicht dasselbe specifische Gewicht hat wie die Erdmasse selbst, so dürfte die Höhe der ersteren höchstens 5^m betragen. Wenn dagegen das specifische Gewicht der Belastungsschicht z. B. doppelt so gross wäre als das der Erdmasse, so dürfte die Höhe der Belastungsschicht nicht mehr als $2^m{,}5$ betragen.

§ 112.

Erddruck gegen Futtermauern.

Wenn bei dem Hinabgleiten des Erdprismas ABC die Mauer entweder fortgeschoben oder umgekippt wird, so setzt sich der von letzterer auf das Erdprisma übertragene Gegendruck zusammen aus dem horizontal gerichteten Normaldrucke und dem vertical aufwärts gerichteten Reibungswiderstande (Fig. 392). Der Winkel, welchen die Mittelkraft dieser beiden Kräfte mit der Horizontalen bildet, ist gleich dem natürlichen Böschungswinkel φ zu setzen, da man annehmen darf, dass der Reibungscoefficient für das Gleiten der Mauer längs der Erdmasse dieselbe Grösse hat wie der Reibungscoefficient im Innern der Erdmasse.

Fig. 392.



Wenn man von den auf das Erdprisma ABC wirkenden Kräften eine jede in zwei Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine parallel, die andere rechtwinklig zu der Gleitfläche AC gerichtet ist, und alsdann für jede von diesen beiden Richtungen die algebraische Summe der Seitenkräfte gleich Null setzt, so gelangt man nach Fig. 392 zu den beiden Gleichungen:

$$1)\quad 0 = D\cos(\theta - \varphi) + fN - Q\sin\theta,$$

$$2)\quad 0 = N - Q\cos\theta - D\sin(\theta - \varphi).$$

Nach Substitution des aus letzterer für N zu entnehmenden Ausdruckes erhält man aus der ersteren für D den Werth:

$$3)\quad D = \frac{Q(\sin\theta - f\cos\theta)}{\cos(\theta - \varphi) + f\sin(\theta - \varphi)}, \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad D = \frac{Q\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - 2\varphi)}.$$

Für den in Fig. 392 dargestellten Fall ist $Q = \frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\theta}$ zu setzen, und nach Substitution dieses Werthes kann man der obigen Gleichung auch die folgenden Formen geben:

$$5)\quad D = \frac{\gamma h^2 \sin(\theta - \varphi)}{2\operatorname{tg}\theta\cos(\theta - 2\varphi)},$$

$$6)\quad D = \frac{\gamma h^2 \cos\varphi(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi)}{2\cos 2\varphi\operatorname{tg}\theta(1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\varphi)},$$

$$7)\quad D = \frac{\gamma h^2\cos\varphi}{2\cos 2\varphi}\left\{\frac{1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta}}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\varphi}\right\}.$$

Hierin ist für die Grösse $\operatorname{tg}\theta = x$ derjenige Werth einzusetzen, für welchen D ein Maximum wird. Um diesen Werth zu finden, hat man den Differenzialquotienten des eingeklammerten Ausdruckes, nach x genommen, gleich Null zu setzen. Man erhält dann eine Gleichung, welcher man die folgenden Formen geben kann:

$$8)\quad \frac{1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{x}}{1 + x\operatorname{tg}2\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{x^2\operatorname{tg}2\varphi}, \quad \text{oder:}$$

$$9)\quad x^2 - 2x\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi}$$

und findet durch Auflösung derselben für die Grösse $x = \operatorname{tg}\theta$ den Werth:

$$10)\quad x = \operatorname{tg}\varphi + \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi} + \operatorname{tg}\varphi^2}, \quad \text{oder:}$$

$$11)\quad x = f + \sqrt{\frac{1 + f^2}{2}} = \operatorname{tg}\theta.$$

Wenn man nunmehr für den eingeklammerten Ausdruck in Gleichung 7) den aus Gleichung 8) zu entnehmenden Ausdruck einsetzt,

und nachher für x den gefundenen Werth darin substituirt, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$12)\quad D = \frac{\gamma h^2}{4 \cos \varphi \, . \, x^2}, \quad \text{oder:}$$

$$13)\quad D = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1+f^2}}{4\left(f + \sqrt{\frac{1+f^2}{2}}\right)^2}.$$

Wenn hierin z. B. $\varphi = 30^0$ gesetzt wird, oder $f = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735$, so wird:

$$14)\quad D = 0{,}14861 \, . \, \gamma h^2.$$

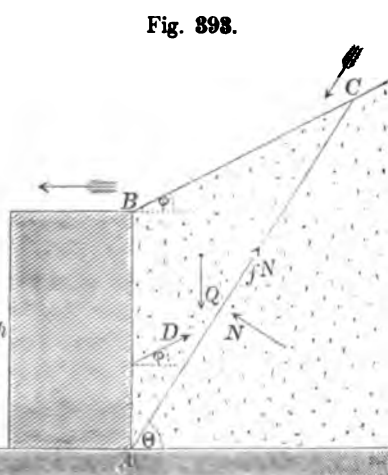
Für die horizontale und verticale Seitenkraft des Erddruckes ergeben sich hiernach resp. die Werthe:

$$15)\quad H = D \cos \varphi = 0{,}1287 \, . \, \gamma h^2,$$

$$16)\quad V = D \sin \varphi = 0{,}0743 \, . \, \gamma h^2.$$

Um die Gleichung 4) auf den in Fig. 393 dargestellten Fall anzuwenden, hat man darin für Q den in § 100 (Gleichung 3) gefundenen Werth einzusetzen; man erhält dann die Gleichung:

Fig. 393.



$$17)\quad D = \frac{\gamma h^2 \cos \varphi \cos \theta}{2 \cos (\theta - 2\varphi)},$$

und überzeugt sich auf dieselbe Weise wie in § 100, dass die Grösse D ein Maximum wird für $\theta = \varphi$. Für diesen Fall ist also:

$$18)\quad D = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \cos \varphi.$$

Wenn man hierin wie oben $\varphi = 30^0$ setzt, so erhält man die folgenden Werthe:

$$19)\quad D = 0{,}433 \, . \, \gamma h^2,$$

$$20)\quad H = D \cos \varphi = 0{,}375 \, . \, \gamma h^2,$$

$$21)\quad V = D \sin \varphi = 0{,}2165 \, . \, \gamma h^2.$$

§ 113.

Gleichgewicht der Mauer in Bezug auf Gleiten.

Die Stärke der Mauer muss so gewählt werden, dass dieselbe durch den Erddruck weder auf ihrem Fundamente fortgeschoben noch umgekippt werden kann. Man hat daher die Berechnung

der erforderlichen Mauerstärke in der Weise auszuführen, dass man für jeden dieser beiden Fälle einzeln genommen die der Bedingung des Gleichgewichtes entsprechende Dicke der Mauer berechnet, und nachher von den beiden gefundenen Werthen den *grösseren* auswählt.

Diejenige Stärke, welche die Mauer mindestens haben müsste, um nicht auf ihrem Fundamente *fortgeschoben* zu werden, findet man nach Fig. 394, indem man die horizontale Seitenkraft des Erddruckes gleich dem Reibungswiderstande setzt, aus der Gleichung:

Fig. 394.

$$1)\quad f_1 (G + V) = H.$$

Wenn mit γ_1 das Gewicht des Mauerwerkes pro Cubikeinheit bezeichnet wird, so ist hierin:

$$2)\quad G = \gamma_1 b h$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Ausdruckes erhält man für das Verhältniss der Mauerdicke zur Mauerhöhe den Werth:

$$3)\quad \frac{b}{h} = \frac{H}{f_1 \gamma_1 h^2} - \frac{V}{\gamma_1 h^2}.$$

Um hiernach für den in Fig. 392 dargestellten Fall die erforderliche Mauerstärke zu berechnen, hat man für H und V resp. die in den Gleichungen 15) und 16) des vorigen Paragraphen gefundenen Werthe zu substituiren; die obige Gleichung nimmt dann die folgende Form an:

$$4)\quad \frac{b}{h} = \left(\frac{0{,}1287}{f_1} - 0{,}0743\right)\frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Wenn man hierin $\frac{\gamma}{\gamma_1} = 0{,}8$ und $f_1 = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ setzt, so erhält man den Werth:

$$5)\quad \frac{b}{h} = 0{,}1189.$$

Auf gleiche Weise findet man für den in Fig. 393 dargestellten Fall, indem man für die Grössen H und V die in den Gleichungen 20) und 21) des vorigen Paragraphen gefundenen Ausdrücke einsetzt, den Werth:

$$6)\quad \frac{b}{h} = \left(\frac{0,375}{f_1} - 0,2165\right)\frac{\gamma}{\gamma_1}, \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad \frac{b}{h} = 0,3464.$$

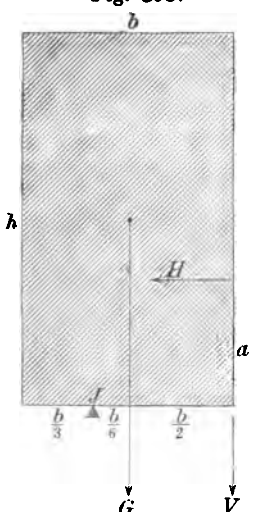
Die wirkliche Stärke der Mauer muss demnach im ersteren Falle grösser als $0,1189 \,.\, h$, im letzteren Falle grösser als $0,3464 \,.\, h$ gewählt werden.

§ 114.

Gleichgewicht der Mauer in Bezug auf Drehung.

Um diejenige Stärke zu finden, welche die Mauer mindestens haben muss, wenn dieselbe durch den Erddruck nicht umgekippt werden soll, würde man die algebraische Summe der statischen Momente der drei Kräfte H, V, G in Bezug auf die Aussenkante gleich Null zu setzen haben — entsprechend dem Grenzfalle, in welchem die Mittelkraft jener drei Kräfte durch die Drehkante selbst hindurchgeht. Die auf solche Weise berechnete Mauerstärke würde jedoch nur dann als wirklich genügend zu betrachten sein, wenn die Mauer aus absolut festem Materiale bestände, da der Druck pro Flächeneinheit einen unendlich grossen Werth annimmt, sobald der Druck auf eine Linie sich concentrirt, anstatt auf eine Fläche sich zu vertheilen.

Fig. 395.



Um eine wirklich genügende Mauerstärke zu erhalten, hat man die bei obiger Berechnung anzunehmende Drehachse weiter nach innen zu verlegen. Da die Mauer als ein elastischer Balken betrachtet werden kann, welcher durch jene drei Kräfte sowohl gebogen als auch in seiner (verticalen) Längenrichtung zusammengedrückt wird, und welcher zugleich (wegen der horizontalen Fugenschnitte) unfähig ist, Zugspannungen anzunehmen, so empfiehlt es sich, der obigen Berechnungsweise eine solche Lage der Drehachse zum Grunde zu legen, bei welcher für die grösste in diesem Balken hervorgebrachte Zugspannung der Werth Null sich ergiebt. Da der horizontale Querschnitt der Mauer die Form eines Rechtecks hat, so wird diese Bedingung erfüllt werden, wenn die Drehachse

im Abstande $\frac{b}{3}$ von der Aussenkante (oder im Abstande $\frac{b}{6}$ von der Mitte) angenommen wird.*) Indem man demgemäss die algebraische Summe der statischen Momente der drei Kräfte H, V, G in Bezug auf den Drehpunkt J gleich Null setzt, erhält man nach Fig. 395 die Gleichung:

$$1)\quad 0 = G \cdot \frac{b}{6} + V \cdot \frac{2}{3} b - H \,.\, a,$$

welcher man nach Substitution des Werthes $G = \gamma_1 b h$ auch die folgende Form geben kann:

$$2)\quad \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{h}\right) \cdot \frac{2V}{\gamma_1 h^2} = \frac{6 H a}{\gamma_1 h^3}.$$

Durch Auflösung derselben erhält man für das Verhältniss der Mauerstärke zur Mauerhöhe den Werth:

$$3)\quad \frac{b}{h} = -\frac{2V}{\gamma_1 h^2} + \sqrt{\left(\frac{2V}{\gamma_1 h^2}\right)^2 + \frac{6H}{\gamma_1 h^2} \cdot \frac{a}{h}}.$$

Eine im Abstande s von der Achsenrichtung des Balkens parallel zu derselben wirkende Druckkraft K kann ersetzt werden durch ein Kräftepaar vom Momente $K \,.\, s$ und eine in die Achsenrichtung selbst fallende Einzelkraft K. Letztere bringt eine gleichförmig über die Querschnittsfläche F vertheilte Druckspannung von der Grösse:

$$S_1 = \frac{K}{F}$$

pro Flächeneinheit hervor. Indem man diese Spannung der von dem Biegungsmomente $K \,.\, s$ herrührenden grössten Zugspannung:

$$S_2 = \frac{w}{\mathfrak{T}} \cdot K s$$

gleichsetzt, erhält man zur Bestimmung der Grösse s die folgende Gleichung:

$$\frac{w}{\mathfrak{T}} K s = \frac{K}{F}, \quad \text{oder:} \quad s = \frac{\mathfrak{T}}{w F}.$$

Wenn der Querschnitt ein Rechteck ist von der Höhe $b = 2w$, so ist $\mathfrak{T} = \frac{F b^2}{12}$ zu setzen, und es wird:

$$s = \frac{b}{6}.$$

Bei dieser Grösse des Hebelarmes s findet in der Querschnittsfläche überall nur Druckspannung statt, welche an dem einen Ende des Querschnitts den Werth Null, am anderen Ende den Werth $S = 2\frac{K}{F}$ pro Flächeneinheit annimmt.

Das obige Resultat bleibt auch dann noch gültig, wenn die Kraft K die der Achsenrichtung parallele Seitenkraft einer unter beliebigem Neigungswinkel gegen die Querschnittsfläche wirkenden Druckkraft R bildet, da die andere — der Querschnittsfläche parallel wirkende — Seitenkraft von R, als Abscheerungskraft wirkend, bei obiger Berechnung der Zug- und Druck-Spannungen unberücksichtigt gelassen werden darf.

Für den in Fig. **392** dargestellten Fall hat man hierin (nach § 112) die Werthe: $H = 0{,}1287 \,.\, \gamma h^2$, $V = 0{,}0743 \,.\, \gamma h^2$, $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$ zu substituiren, und wenn man zugleich (wie im vorigen Paragraphen geschehen) $\gamma_1 = \frac{5}{4}\gamma$ setzt, so erhält man den Werth:

$$4) \quad \frac{b}{h} = 0{,}35.$$

Auf gleiche Weise erhält man für den in Fig. **393** dargestellten Fall, indem man: $H = 0{,}375 \,.\, \gamma h^2$, $V = 0{,}2165 \,.\, \gamma h^2$, $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$, $\gamma_1 = \frac{5}{4}\gamma$ setzt, den Werth:

$$5) \quad \frac{b}{h} = 0{,}5.$$

Bei der auf solche Weise berechneten Futtermauer würde die grösste in derselben hervorgebrachte Druckspannung pro Flächeneinheit zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$6) \quad S = \frac{2(G + V)}{b}.$$

Bei sehr grosser Höhe der Mauer würde man den obigen Werth mit der practisch zulässigen Druckspannung des Materials zu vergleichen haben, und falls eine Ueberschreitung dieser Grenze sich herausstellen sollte, die Mauerstärke entsprechend zu vergrössern haben.

§ 115.

Erddruck gegen geneigte Mauerflächen.

Bei dem in Fig. **396** dargestellten Falle weicht die Richtungslinie des activen Erddruckes um den Winkel $\varepsilon + \varphi$ von der Horizontalen ab, und schliesst demnach mit der Gleitfläche AC den Winkel $\theta - (\varepsilon + \varphi)$ ein. Nach der Theorie der schiefen Ebene nimmt die Bedingung des Gleichgewichtes gegen Hinabgleiten des Erdprismas ABC für diesen Fall die folgende Form an:

$$1) \; 0 = D\cos\{\theta - (\varepsilon + \varphi)\} + f\{Q\cos\theta + D\sin[\theta - (\varepsilon + \varphi)]\} - Q\sin\theta.$$

Wenn man hierin $f = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ setzt, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichung für D den Werth:

$$2) \quad D = \frac{Q\sin(\theta - \varphi)}{\cos\{\theta - (\varepsilon + 2\varphi)\}}.$$

Das Gewicht des Erdprismas ABC hat nach Fig. **396** die Grösse:

$$3) \quad Q = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg}\varepsilon}{2} + \frac{\gamma h^2}{2\operatorname{tg}\theta},$$

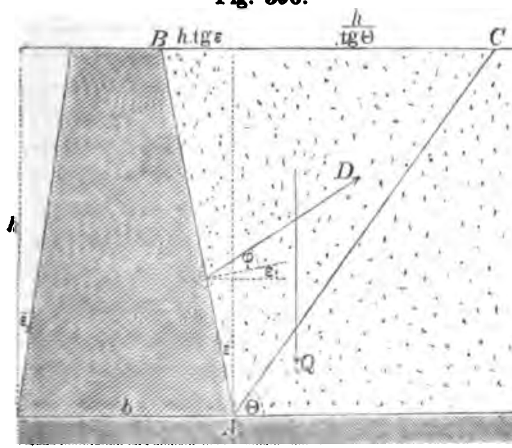
und nach Substitution dieses Ausdruckes kann man der vorhergehenden Gleichung die folgende Form geben:

$$4)\quad D = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos\{\theta - (\varepsilon + 2\varphi)\}} \cdot \left(\operatorname{tg}\varepsilon + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\right), \text{ oder:}$$

$$5)\quad D = \frac{\gamma h^2 \cos\varphi}{2\cos(\varepsilon + 2\varphi)} \left\{ \frac{1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\theta}}{\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} + \operatorname{tg}(\varepsilon + 2\varphi)} \right\} \left(\operatorname{tg}\varepsilon + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\right).$$

Hierin ist für die Grösse $\operatorname{tg}\theta$ derjenige Werth einzusetzen, für welchen D ein Maximum wird. Wenn man $\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = x$ setzt, so kann das Product der beiden eingeklammerten Factoren als Function von x mit $F(x)$ bezeichnet werden, und wenn man zugleich abkürzungsweise: $\operatorname{tg}\varphi = A$, $\operatorname{tg}(\varepsilon + 2\varphi) = B$, $\operatorname{tg}\varepsilon = C$ setzt, so wird:

Fig. 396.



$$6)\quad F(x) = \frac{C + (1 - AC)x - Ax^2}{x + B}.$$

Indem man den Differenzialquotienten dieser Function gleich Null setzt, erhält man eine Gleichung*), welcher man die folgende Form geben kann:

$$7)\quad \frac{C + (1 - AC)x - Ax^2}{x + B} = \frac{(1 - AC) - 2Ax}{1},$$

und wenn man den auf der rechten Seite stehenden Ausdruck für $F(x)$ in Gleichung 5) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$8)\quad D = \frac{\gamma h^2 \cos\varphi}{2\cos(\varepsilon + 2\varphi)} (1 - AC - 2Ax), \text{ oder:}$$

*) Wenn $\frac{Z}{N}$ ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner Functionen von x sind, so führt das Null-Setzen des Differenzialquotienten dieses Bruches zu der Gleichung: $\frac{Z}{N} = \frac{dZ}{dN}$.

$$9)\quad D = \frac{\gamma h^2 \sin\varphi}{2\cos(\varepsilon + 2\varphi)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{tg}\varepsilon - 2x\right).$$

Die Grösse x ist nach Gleichung 7) zu berechnen, welcher man auch die folgende Form geben kann:

$$10)\quad x^2 + 2Bx = \frac{B}{A} - \frac{C}{A} - BC.$$

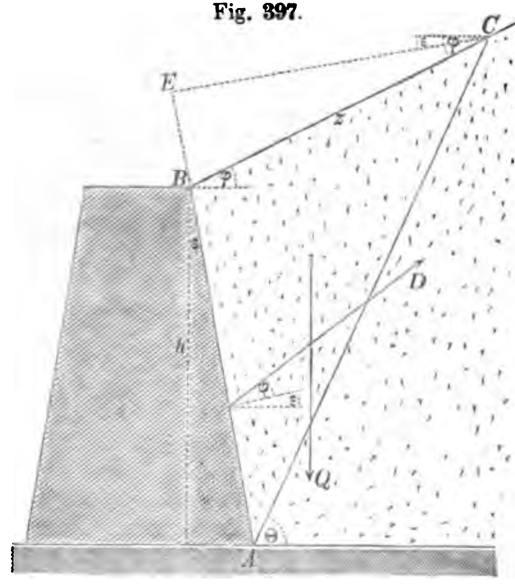
Durch Auflösung derselben erhält man für x den Ausdruck:

$$11)\quad x = -B + \sqrt{B^2 + \frac{B}{A} - \frac{C}{A} - BC}, \quad \text{oder:}$$

$$12)\quad x = -\operatorname{tg}(\varepsilon + 2\varphi) + \sqrt{\operatorname{tg}(\varepsilon + 2\varphi)^2 + \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon + 2\varphi) - \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{tg}(\varepsilon + 2\varphi)\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

Wenn z. B. $\varphi = 30^\circ$ und $\varepsilon = 15^\circ$ ist, so wird: $x = 0{,}6186$ und $D = 0{,}22 \,.\, \gamma h^2$. Für die beiden Seitenkräfte des Erddruckes ergeben sich hiernach die Werthe:

Fig. 397.



$$13)\quad H = D\cos(\varepsilon + \varphi) = D\cos 45^\circ = 0{,}155 \,.\, \gamma h^2,$$

$$14)\quad V = D\sin(\varepsilon + \varphi) = D\sin 45^\circ = 0{,}155 \,.\, \gamma h^2.$$

Die Gleichung 2) kann auch für den in Fig. 397 dargestellten zur Berechnung des Erddruckes benutzt werden. Für diesen Fall hat man nach Fig. 397:

$$15)\quad Q = \frac{\gamma \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{CE}}{2} = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{h}{\cos\varepsilon} \cdot z\cos(\varphi - \varepsilon)$$

zu setzen und die in der Figur mit z bezeichnete Grösse zu berechnen aus der Gleichung:

$$16)\quad \frac{z}{\overline{AB}} = \frac{\sin(90^\circ + \varepsilon - \theta)}{\sin(\theta - \varphi)}, \quad \text{oder:}$$

$$17)\quad z = \frac{h\cos(\theta - \varepsilon)}{\cos\varepsilon \sin(\theta - \varphi)}.$$

Nach Substitution des letzteren Werthes erhält man für das Gewicht Q den Ausdruck:

$$18)\quad Q = \frac{\gamma h^2 \cos(\varphi - \varepsilon)\cos(\theta - \varepsilon)}{2\cos\varepsilon^2 \sin(\theta - \varphi)},$$

und mit Benutzung desselben kann man der Gleichung 2) nunmehr die folgende Form geben:

$$19)\quad D = \frac{\gamma h^2 \cos(\varphi - \varepsilon)\cos(\theta - \varepsilon)}{2\cos\varepsilon^2 \cos(\theta - \varepsilon - 2\varphi)}, \quad \text{oder:}$$

$$20)\quad D = \frac{\gamma h^2 \cos(\varphi - \varepsilon)}{2\cos\varepsilon^2} \cdot \left\{\frac{1}{\cos 2\varphi + \operatorname{tg}(\theta - \varepsilon)\sin 2\varphi}\right\}.$$

Man erkennt an der Form dieses letzteren Ausdruckes, dass (wie in § 100) auch hier wieder θ gleich φ zu setzen ist, und wenn man diese Substitution in Gleichung 19) ausführt, so erhält man für D den Werth:

$$21)\quad D = \frac{\gamma h^2 \cos(\varphi - \varepsilon)^2}{2\cos\varepsilon^2 \cos(\varphi + \varepsilon)}.$$

Wenn man auch hier wieder $\varphi = 30^0$ und $\varepsilon = 15^0$ setzt, so wird $D = \frac{\gamma h^2}{\sqrt{2}}$, und es ergeben sich für die beiden Seitenkräfte des Erddruckes die Werthe:

$$22)\quad H = D\cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma h^2}{2},$$

$$23)\quad V = D\sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma h^2}{2}.$$

Für $\varphi = 30^0$ und $\varepsilon = -15^0$ erhält man auf gleiche Weise die Werthe: $D = 0{,}278 \,.\, \gamma h^2$ und:

$$24)\quad H = D\cos(\varphi - \varepsilon) = 0{,}26855 \,.\, \gamma h^2,$$

$$25)\quad V = D\sin(\varphi - \varepsilon) = 0{,}07295 \,.\, \gamma h^2.$$

§ 116.

Berechnung einer Futtermauer von trapezförmigem Querschnitte.

Das Gewicht der Futtermauer ist nach Fig. 398 zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad G = \gamma_1 b h - \frac{\gamma_1 h^2 \operatorname{tg}\varepsilon}{2} - \frac{\gamma_1 h^2 \operatorname{tg}\varepsilon_1}{2},$$

und wenn man diesen Werth in der Gleichung 1) des § 113 substituirt, so erhält man durch Auflösung derselben für das Verhältniss $\frac{b}{h}$ den Werth:

$$2)\quad \frac{b}{h} = \frac{H}{f_1 \gamma_1 h^2} - \frac{V}{\gamma_1 h^2} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\varepsilon_1}{2}.$$

Wenn man hierin $\varepsilon = 15^0 = \varepsilon_1$ und $f_1 = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ setzt, so erhält man mit Benutzung der Gleichungen 22) und 23) des vorigen Paragraphen, indem man zugleich wieder $\gamma_1 = \frac{5}{4}\gamma$ setzt, für den in Fig. 397 dargestellten Fall den Werth:

$$3)\quad \frac{b}{h} = 0{,}56,$$

und wenn man ein anderes Mal mit Beibehaltung der übrigen Zahlenwerthe $\varepsilon = -15^0$ setzt, so erhält man mit Benutzung der Gleichungen 24) und 25) des vorigen Paragraphen den Werth:

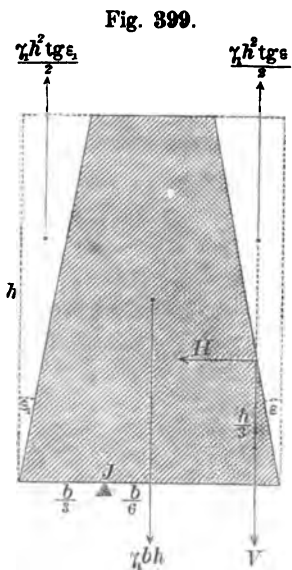
Fig. 398.

$$4)\quad \frac{b}{h} = 0{,}1277.$$

Die Sicherheit des Gleichgewichts gegen Gleiten erfordert demnach, dass die wirkliche Stärke der Mauer an der Basis im ersteren Falle grösser als $0{,}56 \,.\, h$, im letzteren Falle grösser als $0{,}1277 \,.\, h$ gewählt werde.

Um denjenigen Werth von b zu finden, welcher der Bedingung des Gleichgewichtes gegen Drehung entspricht, hat man wiederum das in § 114 erklärte Verfahren anzuwenden, und erhält nach Fig. 399, indem man die algebraische Summe der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt J gleich Null setzt, die Gleichung:

Fig. 399.



$$5)\; 0 = \frac{\gamma_1 b^2 h}{6} + \left(V - \frac{\gamma_1 h^2 \operatorname{tg} \varepsilon}{2}\right)\left(\frac{2}{3} b - \frac{h \operatorname{tg} \varepsilon}{3}\right) + \frac{\gamma_1 h^2 \operatorname{tg} \varepsilon_1}{2}\left(\frac{b}{3} - \frac{h \operatorname{tg} \varepsilon_1}{3}\right) - H \cdot \frac{h}{3}.$$

Wenn man abkürzungsweise den Ausdruck $\frac{2V}{\gamma_1 h^2} - \operatorname{tg} \varepsilon$ mit v bezeichnet, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$6)\quad \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{h}\right)\left(v + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{2}\right) = \frac{2H}{\gamma_1 h^2} + v \operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varepsilon_1^2,$$

und erhält durch Auflösung dieser Gleichung für das Verhältniss $\frac{b}{h}$ den Werth:

$$7)\quad \frac{b}{h} = -\left(v + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{2}\right) + \sqrt{\left(v + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{2}\right)^2 + \frac{2H}{\gamma_1 h^2} + v \operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varepsilon_1^2}.$$

Mit Beibehaltung der oben angenommenen Zahlenwerthe erhält man aus dieser Gleichung für $\varepsilon = +15^0$ den Werth:

8) $\frac{b}{h} = 0{,}54,$

und, wenn man ein anderes Mal $\varepsilon = -15^0$ setzt, so erhält man den Werth:

9) $\frac{b}{h} = 0{,}084.$

Bei Vergleichung dieser Werthe mit den oben in Gleichung 3) und Gleichung 4) gefundenen Zahlenwerthen erkennt man, dass in beiden Fällen die Sicherheit des Gleichgewichtes gegen Gleiten hinsichtlich der wirklich zu wählenden Mauerstärke den Ausschlag giebt.

Wenn $\frac{b}{h} = \operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varepsilon_1$ wird, so geht der trapezförmige Querschnitt in einen dreieckigen Querschnitt über. Die Gültigkeit der oben gefundenen Gleichungen ist daher stets an die Bedingung geknüpft, dass der berechnete Werth des Verhältnisses $\frac{b}{h}$ nicht kleiner als $\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varepsilon_1$ ausfällt.

§ 117.

Einfluss der Erschütterungen.

In § 97 wurde bereits erklärt, dass die Bestimmung der wirklichen Grösse des Erddruckes eine Aufgabe ist, welche im Allgemeinen der Rechnung sich entzieht; dass vielmehr immer nur gewisse Grenzwerthe sich ermitteln lassen, von welchen man behaupten darf, dass die Grösse des wirklichen Erddruckes zwischen denselben liegen muss. Die Bedeutung dieser beiden Grenzwerthe kann man sich mittelst der beiden Figuren 400 und 401 veranschaulichen. Denkt man sich die beiden parallelepipedischen Blöcke, zwischen welchen die Erdmasse sich befindet, das eine Mal in der Richtung nach aussen hin um eine unendlich kleine Strecke verschoben und dann festgelegt, so gelangt man zu dem in Fig. 400 dargestellten

Fig. 400.

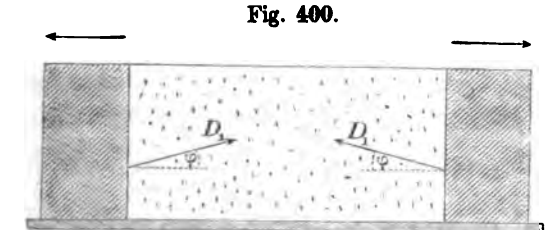
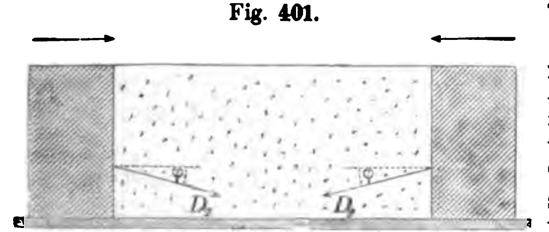


Fig. 401.



Falle des activen Erddruckes. Für diesen Fall ist (nach § 112, Gleichung 13) der wirkliche Erddruck zu berechnen aus der Gleichung:

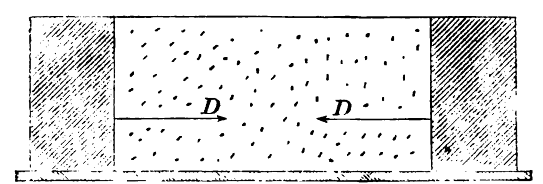
$$1)\quad D_1 = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1+f^2}}{4\left(f+\sqrt{\frac{1+f^2}{2}}\right)^2}.$$

Wenn man sich ein anderes Mal die beiden Blöcke um eine unendlich kleine Strecke nach innen hin verschoben und dann festgelegt denkt, so erhält man den in Fig. 401 dargestellten Fall des passiven Erddruckes. Für diesen Fall ist der wirkliche Erddruck zu berechnen aus der Gleichung:

$$2)\quad D_2 = \frac{\gamma h^2 \sqrt{1+f^2}}{4\left(-f+\sqrt{\frac{1+f^2}{2}}\right)^2},$$

welche man aus der vorhergehenden ableitet, indem man darin die Grösse $+f$ mit der Grösse $-f$ vertauscht. Die Richtungslinie des Erddruckes weicht in dem ersteren Falle nach oben, in dem letzteren nach unten hin um den Reibungswinkel φ von der Horizontalen ab.

Fig. 402.



Wenn man beispielsweise $f = \text{tg}\, 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ setzt, so wird $D_1 = 0{,}1486 \,.\, \gamma h^2$ und $D_2 = 5{,}048 \,.\, \gamma h^2$. Das Verhältniss des passiven Erddruckes zu dem activen hat demnach in diesem Falle die Grösse:

$$3)\quad \frac{D_2}{D_1} = 33{,}97.$$

Bei dem Uebergange aus dem activen Zustande in den passiven würde also der Druck nahezu auf das 34-fache sich steigern, und zugleich die Richtungslinie desselben um einen Winkel von 60° sich drehen.

Man erkennt an diesem Beispiele, dass die Schätzung des wirklichen Druckes in einem bestimmten vorliegenden Falle mit einem beträchtlichen Grade von Unsicherheit behaftet ist, so lange nicht die Art und Weise genau bekannt ist, auf welche die Erdmasse in den gegebenen Zustand gebracht wurde. Die beiden

Figuren **400** und **401** repräsentiren künstlich hervorgebrachte Spannungszustände der Erdmasse, welche als Abweichungen von einem gewissen mittleren natürlichen Zustande derselben betrachtet werden können. Als solcher natürlicher Zustand wird derjenige anzusehen sein, bei welchem die Druckrichtung weder nach oben noch nach unten hin von der Horizontalen abweicht, oder derjenige Zustand, welcher dem Werthe $\varphi = 0$ entspricht (Fig. **402**). In diesen natürlichen Zustand wird die Erdmasse übergehen, sobald durch Erschütterungen (z. B. durch Hammerschläge gegen die Platte, welche der Erdmasse als Unterlage dient) der Einfluss der Reibung ganz zum Verschwinden gebracht, und in Folge dessen jener künstliche Spannungszustand aufgehoben wird.*) In allen solchen Fällen also, wo die Erdmasse starken Erschütterungen ausgesetzt ist, wird man den Erddruck nach der für hydrostatischen Druck geltenden Gleichung:

$$4) \quad D = \frac{\gamma h^2}{2}$$

zu berechnen haben, in welche die Gleichungen 1) und 2) übergehen, sobald darin der Reibungscoefficient f gleich Null gesetzt wird.

Auf diesen Umstand hat man bei der Berechnung der Futtermauern Rücksicht zu nehmen. Nur dann, wenn im Innern der Erdmasse ein gewisser Grad von Cohäsion stattfindet, wird man darauf rechnen dürfen, dass jener dem activen Drucke entsprechende Spannungszustand auch bei Erschütterungen noch fortdauert. Andernfalls wird es erforderlich sein, entweder durch Wahl einer grösseren Mauerstärke oder durch künstliche Hervorbringung einer gewissen Cohäsion in dem angrenzenden Theile der Erdmasse die gehörige Sicherheit der Stabilität herzustellen.

*) Vergl. „Technische Mechanik“ (fünfte Aufl.) § 87.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Theorie der Stützlinien und Berechnung der Gewölbe.

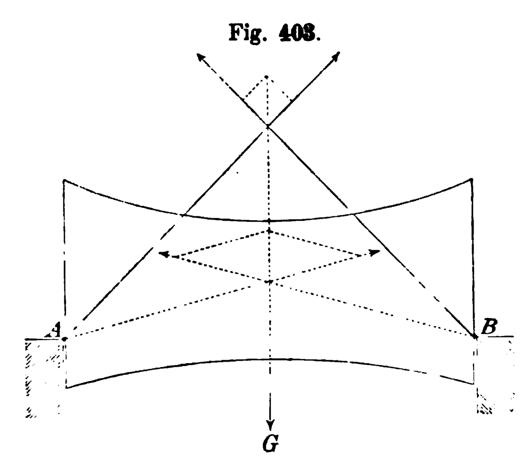
---

§ 118.

Stützlinien und Belastungslinien.*)

Bei dem in Fig. 403 dargestellten, an zwei festen Punkten unterstützten Körper ist die Bestimmung der von den beiden Unterstützungspunkten geleisteten Gegendrücke eine unbestimmte Aufgabe, insofern die Gleichgewichts - Bedingungen nur erfordern, dass die Richtungslinien dieser beiden Kräfte mit der Richtungslinie des Gewichtes G in einem Punkte zusammentreffen. Dieser Bedingung kann auf unendlich viele verschiedene Arten Genüge geleistet werden, und je nachdem für den Durchschnittspunkt jener drei Kräfte eine höhere oder tiefere Lage angenommen wird, ergeben sich für die beiden Gegendrücke andere Grössen und Richtungen.

Fig. 403.

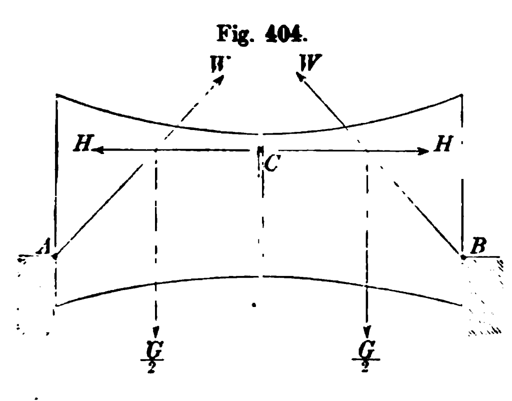


Jene Aufgabe hört jedoch auf, eine unbestimmte zu sein, sobald auf die in Fig. 404 angedeutete Weise der Körper durch einen Verticalschnitt in zwei getrennte Hälften zerlegt ist, welche in einem bestimmten gegebenen Punkte C der Schnittfuge einander

*) Vergl. Schwedler's „Theorie der Stützlinie" (Berliner Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 1859).

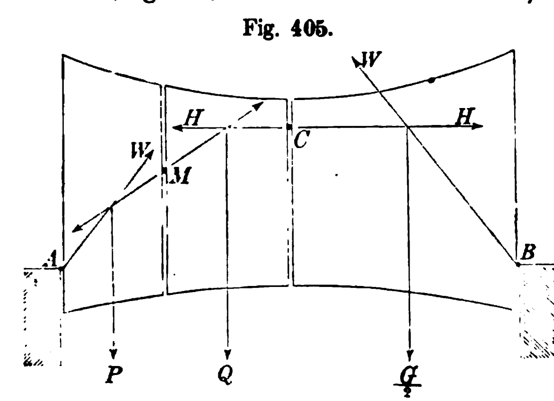
gegenseitig berühren und unterstützen. Für den Druck, welchen die beiden Hälften an dieser Stelle auf einander gegenseitig übertragen, ergiebt sich bei der hier vorausgesetzten Symmetrie eine horizontale Richtungslinie, und die Grösse dieses Horizontaldruckes H würde man berechnen können, indem man bei einer von den beiden Hälften die statischen Momente der beiden Kräfte H und $\frac{G}{2}$ in Bezug auf den betreffenden festen Unterstützungspunkt einander gleich setzt (oder auch, indem man die Kraft H so wählt, dass die Mittelkraft von den beiden Kräften H und $\frac{G}{2}$ durch den betreffenden festen Unterstützungspunkt hindurchgeht).

Fig. 404.



Mit der Lage der drei Punkte A, B, C ist zugleich auch die Lage der Stelle M festgelegt, an welcher in irgend einer beliebigen anderen hindurchgelegten verticalen Schnittfuge die beiden angrenzenden Theile des Körpers einander gegenseitig würden unterstützen müssen (Fig. 405). Man findet diese Stelle M, indem man den Durchschnittspunkt construirt, in welchem jene Fuge von der Mittelkraft der beiden Kräfte H und Q (oder auch von der Mittelkraft der beiden Kräfte W und P) geschnitten wird.

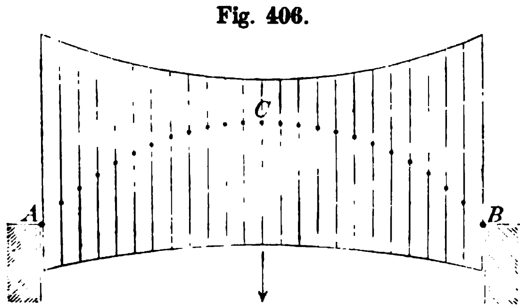
Fig. 405.



Denkt man sich ausser jenen zwei (in Fig. 405 angegebenen) Schnittfugen auch an allen übrigen Stellen verticale Schnittfugen hindurchgelegt, und auf solche Weise den Körper (dessen rechtwinkelig zur Bildfläche gerichtete Dimension überall

gleich gross vorausgesetzt wird) in ein System von unendlich dünnen Platten oder Streifen zerlegt, so erkennt man, dass mittelst des oben erklärten Verfahrens für jede einzelne dieser Schnittfugen die Lage des Stützpunktes ermittelt werden kann, und dass der Inbegriff aller dieser auf solche Weise ermittelten Stützpunkte nunmehr eine stetig gekrümmte Linie ACB bilden wird (Fig. 406). Diese krumme Linie wird die Stützlinie genannt.

Fig. 406.



Man überzeugt sich leicht, dass die Form dieser Stützlinie keine Aenderung erleiden wird, wenn an irgend einer Stelle der zwischen zwei benachbarten Schnittfugen befindliche Streifen vertical aufwärts oder vertical abwärts um eine beliebige Strecke verschoben wird — vorausgesetzt, dass diese Verschiebung innerhalb der durch die Lage der Stützpunkte M, N bedingten Grenzen bleibt (Fig. 407). Denkt man sich die sämmtlichen Streifen so weit nach oben verschoben, dass die **untere** Begrenzungscurve des ganzen Systems durch die Stützlinie selbst gebildet wird, so erhält man in der **oberen** Begrenzungscurve eine Linie, welche in ihrer Form das Gesetz erkennen lässt, nach welchem die Totalbelastung über die Horizontalprojection ver-

Fig. 407.

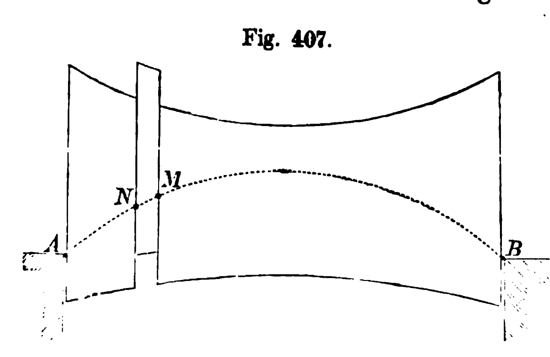
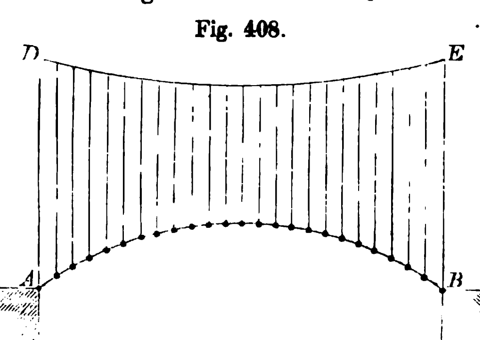


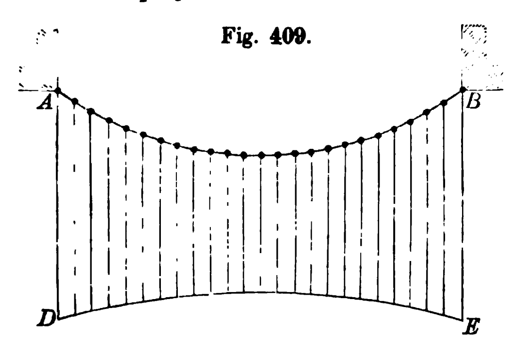
Fig. 408.



theilt ist. Diese obere Begrenzungscurve DE wird die Belastungslinie genannt (Fig. 408). Man erkennt, dass die Form dieser Belastungslinie nach einem bestimmten Gesetze von der Form der Stützlinie abhängen wird, sowie umgekehrt, dass die Form der Stützlinie, welche einer gegebenen Belastungslinie entspricht, durch die Form dieser letzteren bedingt wird.

Die Stützlinie AB kann auch gedeutet werden als labile Gleichgewichtsform einer gewichtlosen Kette, deren Belastung nach dem durch die Belastungscurve veranschaulichten Gesetze über die Horizontalprojection derselben vertheilt ist. Denkt man sich die ganze Figur in der umgekehrten Lage, so erhält man die stabile Gleichgewichtsform derselben oder die Form, welche die hängende Kette bei jenem Belastungsgesetze annehmen würde (Fig. 409). Es ist daher bei dem Aufsuchen der Beziehungen, welche zwischen den beiden Curven AB und DE stattfinden, gleichgültig, ob man dabei von der labilen oder von der stabilen Gleichgewichtslage ausgeht — ob man die Linie AB als Stützlinie oder als Kettenlinie behandelt.

Fig. 409.

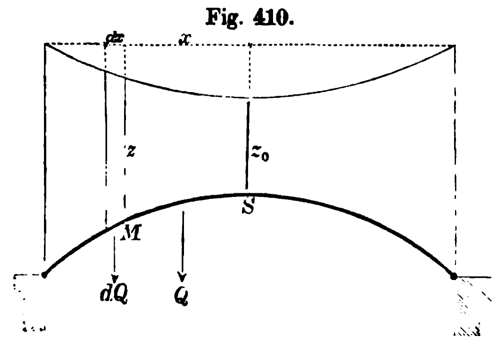


§ 119.

Krümmungshalbmesser der Stützlinie.

Wenn die rechtwinkelig zur Bildfläche gerichtete Dimension des Belastungskörpers als Längeneinheit, und das Gewicht pro Cubikeinheit des Belastungsmaterials als Krafteinheit gewählt wird, so ist nach Fig. 410:

Fig. 410.



1) $dQ = z \, . \, dx$

zu setzen, und für die Belastung des ganzen Kettentheiles MS ergiebt sich hiernach der Ausdruck:

$$2) \quad Q = \int_0^x z \, . \, dx.$$

Nach der in Fig. 411 gewählten Bezeichnungsweise erhält man nunmehr, indem man sich den Gleichgewichtszustand des Kettentheiles MS auf die in Fig. 412 angegebene Weise veranschaulicht, die Gleichungen:

Fig. 411.

$$3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} = \frac{\int z \, . \, dx}{H} = \frac{dy}{dx},$$

und für den zweiten Differenzialquotienten von y, nach x genommen, ergiebt sich aus der letzteren der Werth:

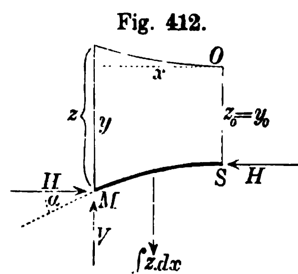


Fig. 412.

$$4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{z}{H}.$$

Nach Fig. 413 ist der Krümmungshalbmesser für den Punkt M der Stützlinie zu berechnen aus der Gleichung:

$$5) \quad \varrho \, . \, d\alpha = ds = \frac{dx}{\cos \alpha}.$$

Wenn man hierin für $d\alpha$ den aus der Gleichung: $d \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\alpha}{\cos \alpha^2}$ zu entnehmenden Werth einsetzt, so erhält man für den Krümmungshalbmesser den Ausdruck:

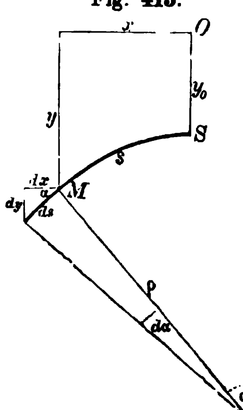


Fig. 413.

$$6) \quad \varrho = \frac{dx}{\cos \alpha^2 d \operatorname{tg} \alpha},$$

welchem man nach Substitution des in Gleichung 3) angegebenen Werthes: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ auch die folgende Form geben kann:

$$7) \quad \varrho = \frac{dx}{\cos \alpha^3 d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{\cos \alpha^3 . \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}.$$

Hierin ist für den Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ der in Gleichung 4) gefundene Werth einzusetzen; man erhält dann die Gleichung:

$$8)\quad \varrho = \frac{H}{z \,.\, \cos\alpha^3}.$$

Für $x = 0$ wird $\alpha = 0$ und $z = z_0$. Wenn also mit R der Krümmungshalbmesser des Scheitelpunktes bezeichnet wird, so ist:

$$9)\quad R = \frac{H}{z_0}$$

zu setzen. Aus dieser Gleichung ergiebt sich für die überall gleich grosse Horizontalspannung der Werth:

$$10)\quad H = R \,.\, z_0.$$

Die Horizontalspannung ist demnach gleich dem Producte aus der Belastung pro Längeneinheit am Scheitelpunkte in den Krümmungshalbmesser an dieser Stelle. Wenn man den obigen Werth für H in Gleichung 8) substituirt, so erhält man für den Krümmungshalbmesser die Gleichung:

$$11)\quad \varrho = \frac{R \,.\, z_0}{z \,.\, \cos\alpha^3},$$

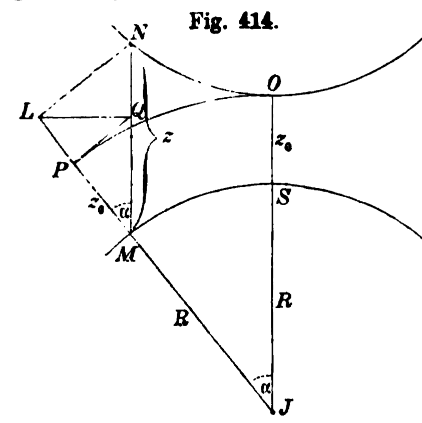
welche man einerseits, bei gegebenem Gesetze der Lastvertheilung, zur Construction der Stützlinie; andererseits — indem man die Gleichung für z auflöst — bei gegebener Stützlinie auch zur Construction der zugehörigen Belastungslinie benutzen kann.

§ 120.

Kreisbogen als Stützlinie.

Wenn als Stützlinie ein Kreisbogen vom Halbmesser R gegeben ist, so hat man ϱ gleich R zu setzen in der am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung, welche alsdann für z aufgelöst die folgende Form annimmt:

Fig. 414.



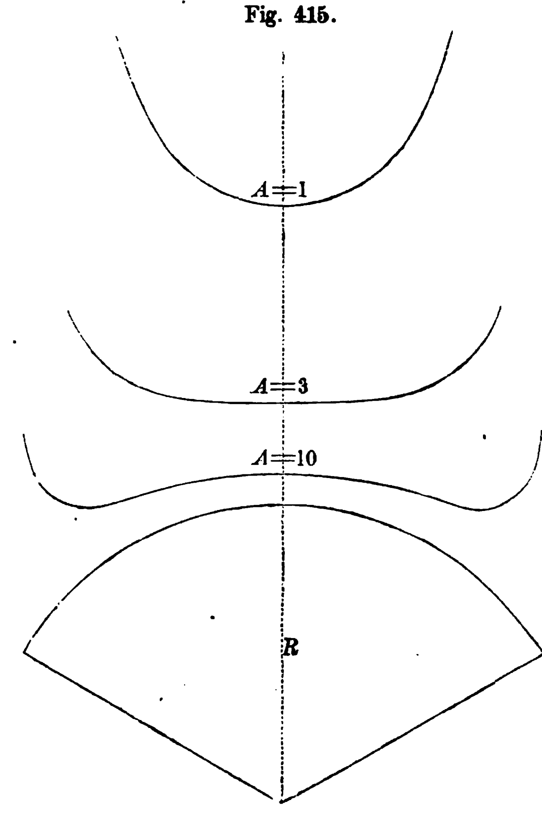
$$1)\quad z = \frac{z_0}{\cos\alpha^3}.$$

Diese Gleichung kann man auf die in Fig. 414 angedeutete Weise zur Construction der zugehörigen Belastungslinie benutzen, indem man zunächst die Strecke

$\overline{MQ} = \frac{z_0}{\cos\alpha}$, dann $\overline{ML} = \frac{z_0}{\cos\alpha^2}$ und hierauf $\overline{MN} = \frac{z_0}{\cos\alpha^3}$ construirt.

Bei Anwendung dieses Verfahrens findet man, dass die Form der auf solche Weise construirten Belastungslinie abhängt von der Wahl der Grösse z_0, oder von der Wahl der Verhältnisszahl:

Fig. 415.



$$2)\quad \frac{R}{z_0} = A,$$

welche letztere der „Modulus“ genannt wird. Wie die in Fig. 415 beispielsweise für die drei Fälle: $A = 10$, $A = 3$, $A = 1$ ausgeführten Constructionen zeigen, wendet die Belastungslinie in der Gegend ihres Scheitelpunktes die convexe Seite nach oben, wenn A gross ist, die concave Seite dagegen, wenn A klein ist. Der Uebergang aus der convexen in die concave Form entspricht dem Grenzfalle $A = 3$, für welchen der Krümmungshalbmesser der Belastungslinie im Scheitelpunkte unendlich gross wird.

Mit Benutzung der im vorigen Paragraphen für den Krümmungshalbmesser abgeleiteten Gleichung und Anwendung derselben auf die Belastungslinie würde man für den Krümmungshalbmesser derselben im Scheitelpunkte den Werth erhalten:

$$3)\quad \mathfrak{R} = \frac{R^2}{3z_0 - R}.$$

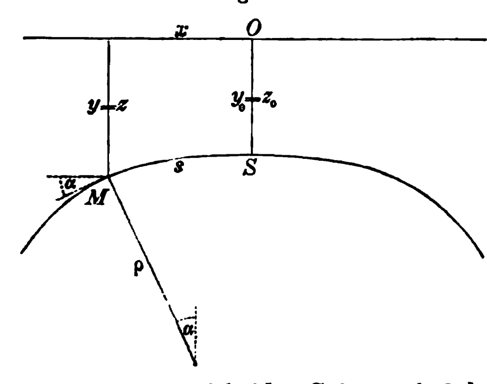
Diese Gleichung zeigt, dass $\mathfrak{R}$ unendlich gross wird, wenn $\frac{R}{z_0} = 3$ ist, ferner dass $\mathfrak{R}$ positiv wird, wenn $\frac{R}{z_0} < 3$, und negativ, wenn $\frac{R}{z_0} > 3$ ist.

§ 121.

Stützlinie für gerade horizontale Belastungslinie.

Nach Fig. 411 ist für den in Fig. 416 dargestellten Fall überall $z = y$ zu setzen; die am Schlusse des § 119 für den Krümmungshalbmesser der Stützlinie gefundene Gleichung nimmt demnach für diesen Fall folgende Form an:

Fig. 416.



$$1)\quad \varrho = \frac{R y_0}{y \cos \alpha^3}.$$

Um die Grösse y als Function des Winkels α darzustellen, hat man die Gleichung 4) des § 119, indem man darin ebenfalls $z = y$ setzt, auf beiden Seiten mit $2dy$ zu multipliciren und hiernach die Integration derselben auszuführen. Man gelangt alsdann zu den nachfolgenden Gleichungen:

$$2)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{H},$$

$$3)\quad 2\left(\frac{dy}{dx}\right) d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2y\,dy}{H},$$

$$4)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{H} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ ist $y = y_0$ zu setzen. Da ferner $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ ist, und $\alpha = 0$ wird für $x = 0$, so ist die Constante zu berechnen aus der Gleichung:

$$5)\quad 0 = \frac{y_0^2}{H} + \text{Const.}$$

und man erhält, indem man die letztere Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt, für y die Gleichung:

$$6)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 - y_0^2}{H} = \operatorname{tg} \alpha^2, \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad y = \sqrt{y_0^2 + H \operatorname{tg} \alpha^2}.$$

Nach Gleichung 10) des § 119 ist hierin $H = Rz_0$ oder $H = Ry_0$ zu setzen; man kann daher der letzteren Gleichung auch die folgende Form geben:

$$8)\quad y = y_0 \sqrt{1 + \frac{R}{y_0}\operatorname{tg}\alpha^2},$$

und wenn man wie im vorigen Paragraphen das Verhältniss $\frac{R}{y_0} = \frac{R}{z_0}$ wiederum mit A bezeichnet, so wird:

$$9)\quad y = y_0 \sqrt{1 + A \operatorname{tg}\alpha^2}.$$

Diesen Werth hat man nunmehr für y in Gleichung 1) zu substituiren; man erhält dann für den Krümmungshalbmesser der Stützlinie die Gleichung:

$$10)\quad \varrho = \frac{R}{\cos\alpha^3 \sqrt{1 + A \operatorname{tg}\alpha^2}}.$$

Um die Ordinate y als Function der Abscisse x darzustellen, hat man der Gleichung 6) die folgende Form zu geben:

$$11)\quad \frac{dx}{\sqrt{H}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}}.$$

Wenn man $y + \sqrt{y^2 - y_0^2} = u$ setzt, so wird der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck gleich $\frac{du}{u}$; man erhält also durch Integration derselben die Gleichung:

$$12)\quad \frac{x}{\sqrt{H}} = \lg\left(y + \sqrt{y^2 - y_0^2}\right) + \text{Const.}$$

Da $y = y_0$ wird für $x = 0$, so ist die Constante zu bestimmen aus der Gleichung:

$$13)\quad 0 = \lg y_0 + \text{Const.},$$

und man erhält durch Subtraction dieser Gleichung von der vorhergehenden, indem man zugleich statt der Differenz der Logarithmen den Logarithmus des Quotienten setzt, die Gleichung:

$$14)\quad \frac{x}{\sqrt{H}} = \lg\left\{\frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1}\right\}, \text{ oder:}$$

$$15)\quad e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} = \frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1}.$$

Aus dieser letzteren Gleichung ergiebt sich für den Quotienten $\frac{y}{y_0}$ der Werth:

$$16)\quad \frac{y}{y_0} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}\right).$$

Wenn man nunmehr wiederum $H = R y_0$ setzt, so kann man den Gleichungen 14) und 16) auch die folgenden Formen geben:

$$17)\quad x = \sqrt{R y_0}\,.\,\lg\left\{\frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1}\right\},$$

$$18)\quad y = \frac{y_0}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{R y_0}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{R y_0}}}\right).$$

Für $R = y_0$ oder $A = 1$ ergiebt sich aus Gleichung 9) der Werth $y = \frac{y_0}{\cos\alpha}$, und wenn man hierin $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ setzt, so kann man jener Gleichung für diesen Fall auch die folgende Form geben:

$$19)\quad \frac{y\,dx}{ds} = y_0.$$

Da der Zähler $y\,dx$ die Belastung des Bogen-Elements ds bildet, so stellt der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung die Belastung pro Längeneinheit des Bogens dar, und da auf der rechten Seite die Constante y_0 steht, so entspricht der Werth $A = 1$ oder $R = y_0$ dem Falle einer gleichförmig über die Bogenlänge vertheilten Belastung.

§ 122.

Evolute der Stützlinie.

Der im vorigen Paragraphen für den Krümmungshalbmesser der Stützlinie gefundenen Gleichung 10) kann man auch die folgende Form geben:

$$1)\quad \varrho = R\,(1 + A\,\mathrm{tg}\,\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\alpha^{-3}.$$

Indem man diese Gleichung differenziirt, erhält man für den Differenzialquotienten von ϱ nach α genommen die Gleichung:

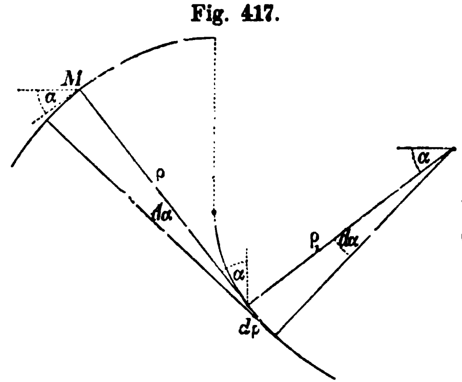
$$2)\quad \frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{3R\sin\alpha(1 + A\,\mathrm{tg}\,\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{\cos\alpha^4} - \frac{A R\,\mathrm{tg}\,\alpha(1 + A\,\mathrm{tg}\,\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}}{\cos\alpha^5},$$

welcher man nach Substitution des für die Grösse $(1 + A\,\mathrm{tg}\,\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ aus der vorhergehenden Gleichung zu entnehmenden Werthes auch die folgende einfachere Form geben kann:

$$3)\quad \frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(3 - \frac{A\varrho^2\cos\alpha^4}{R^2}\right).$$

Wenn mit ϱ_1 der Krümmungshalbmesser der Evolute der Stützlinie bezeichnet wird, so findet nach Fig. 417 zwischen den beiden Krümmungshalbmessern ϱ und ϱ_1 die Beziehung statt:

Fig. 417.



$$4)\quad \varrho_1 \,.\, d\alpha = d\varrho, \quad \text{oder:}$$

$$\varrho_1 = \frac{d\varrho}{d\alpha},$$

und wenn man in letzterer Gleichung für den Differenzial-Quotienten $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ den oben gefundenen Ausdruck substituirt, so erhält man für den Krümmungshalbmesser der Evolute die Gleichung:

$$5)\quad \varrho_1 = \varrho \operatorname{tg} \alpha \left(3 - \frac{A \varrho^2 \cos \alpha^4}{R^2}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass es zwei Werthe von α giebt, für welche ϱ_1 gleich Null wird. Der eine Werth ist $\alpha = 0$, weil für diesen Werth der Factor $\operatorname{tg} \alpha$ gleich Null wird. Um den anderen Werth $\alpha = \theta$ zu finden, hat man den eingeklammerten Factor gleich Null zu setzen, wobei man zugleich für α den Werth θ und für ϱ den diesem Winkel entsprechenden Werth $\varrho = r$ zu substituiren hat. Der Winkel θ ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$6)\quad 0 = 3 - \frac{A r^2 \cos \theta^4}{R^2}.$$

Für den Krümmungshalbmesser r erhält man aus Gleichung 1), indem man darin $\alpha = \theta$ setzt, den Ausdruck:

$$7)\quad r = R\,(1 + A \operatorname{tg} \theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta^{-3},$$

und nach Substitution desselben kann man der oben für θ gefundenen Gleichung die folgenden Formen geben:

$$8)\quad 0 = 3 - \frac{A}{\cos \theta^2 (1 + A \operatorname{tg} \theta^2)}, \quad \text{oder:}$$

$$9)\quad 0 = 3 - \frac{A\,(1 + \operatorname{tg} \theta^2)}{1 + A \operatorname{tg} \theta^2}.$$

Aus dieser letzteren Gleichung ergiebt sich für die Grösse $\operatorname{tg} \theta$ der Werth:

$$10)\quad \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{A - 3}{2A}}.$$

Man erkennt an der Form dieses Ausdruckes, dass die Grösse $\operatorname{tg}\theta$ imaginär wird, sobald der Modulus $A = \frac{R}{y_0}$ kleiner ist als 3.

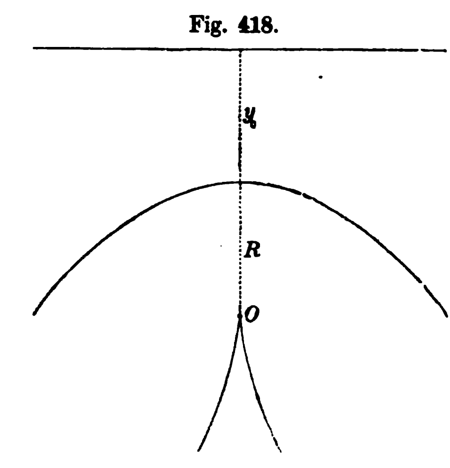


Fig. 418.

Da diejenigen Stellen, an welchen der Krümmungshalbmesser ϱ_1 den Werth Null annimmt, die Eckpunkte der Evolute bilden, so folgt hieraus, dass in solchen Fällen, wo A kleiner ist als 3, nur ein solcher Eckpunkt vorhanden ist, insofern der Werth $\alpha = 0$ in diesen Fällen der einzige Werth von α ist, für welchen $\varrho_1 = 0$ wird (Fig. 418).

Wenn dagegen der Modulus A grösser ist als 3, so hat die Evolute drei Eckpunkte. Der eine entspricht dem Werthe $\alpha = 0$ und fällt in die verticale Mittellinie; die beiden anderen, welche resp. den Werthen $\alpha = +\theta$ und $\alpha = -\theta$ entsprechen, liegen seitwärts von derselben (Fig. 419). Um den Krümmungshalbmesser r zu berechnen, hat man in der Gleichung 7), welcher man auch die folgende Form geben kann:

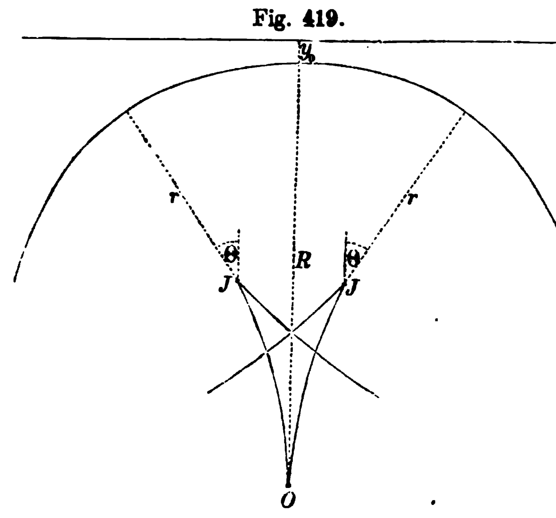


Fig. 419.

$$11)\quad r = R\sqrt{\frac{(1+\operatorname{tg}\theta^2)^3}{1+A\operatorname{tg}\theta^2}},$$

für $\operatorname{tg}\theta$ den in Gleichung 10) gefundenen Werth einzusetzen; man erhält dann die Gleichung:

$$12)\quad r = \frac{R(A-1)\sqrt{27}}{2A\sqrt{A}}, \quad \text{oder:}$$

$$13)\quad r = \frac{y_0(A-1)\sqrt{27}}{2\sqrt{A}}.$$

Aus den beiden Gleichungen 10) und 13) ergeben sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$A =$	25	10	3
$\frac{r}{y_0} =$	12,47	7,394	3
$\operatorname{tg}\theta =$	0,6633	0,5916	0
$\theta =$	33° 33′	30° 37′	0.

§ 123.

Benutzung der Evolute zur Construction der Stützlinie.

Wenn man in der für den Krümmungshalbmesser der Stützlinie gefundenen Gleichung 10) des § 121 für den Halbmesser R seinen Werth Ay_0 einsetzt, so kann man jener Gleichung auch die folgende Form geben:

$$1)\quad \frac{\varrho}{y_0} = \frac{A}{\cos\alpha^3\sqrt{1+A\operatorname{tg}\alpha^2}}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich für $y_0 = 1$ und $A = 25$ die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\alpha =$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
$\varrho =$	25	23,2	19,8	16,7	14,6	13,4	12,5	12,5	12,8	13,8	15,5	18,4	23.

Jedem dieser Werthe von ϱ entspricht ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt oder ein bestimmter Punkt der Evolute, welche in diesem Falle drei Eckpunkte besitzt (s. Fig. 419). Dieser Anzahl der Eckpunkte der Evolute entsprechend, kann man sich die Krümmungsmittelpunkte in drei Gruppen zerlegt denken, von denen die eine die in der Nähe des mittleren Eckpunktes O gelegenen Krümmungsmittelpunkte umfasst, und die anderen beiden diejenigen enthalten, welche resp. um die beiden seitwärts gelegenen Eckpunkte J, J sich gruppiren. Wenn man alsdann jede dieser drei Gruppen durch einen einzelnen Krümmungsmittelpunkt ersetzt und aus diesen drei Mittelpunkten Kreisbögen beschreibt, so kann man auf solche Weise eine aus drei Kreisbögen zusammengesetzte Curve construiren, welche annäherungsweise die richtige Form der Stützlinie darstellt.

Nach der Tabelle des vorigen Paragraphen entspricht dem mittleren Eckpunkte O der Werth $\varrho = R = 25$ und jedem der beiden Eckpunkte J entspricht der Werth $\varrho = r = 12{,}47$. Für das arithmetische Mittel dieser beiden Halbmesser ergiebt sich hiernach der Werth:

$$2)\quad \frac{R+r}{2} = \frac{25+12{,}47}{2} = 18{,}7.$$

Zu der Gruppe des mittleren Eckpunktes O wird man daher alle diejenigen Krümmungsmittelpunkte zu rechnen haben, deren zugehörige Krümmungshalbmesser grösser sind als 18,7; zu den anderen beiden alle diejenigen, deren zugehörige Krümmungshalbmesser kleiner sind als 18,7.

Nach der obigen Tabelle würden hiernach als zur Gruppe des mittleren Eckpunktes O gehörig zu betrachten sein die fünf Krümmungshalbmesser:

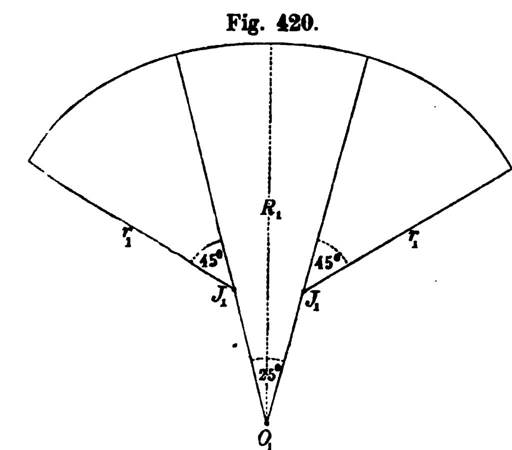
$$\varrho = 19{,}8, \quad \varrho = 23{,}2, \quad \varrho = 25, \quad \varrho = 23{,}2, \quad \varrho = 19{,}8.$$

Indem man von diesen fünf Werthen das arithmetische Mittel berechnet, erhält man für den Halbmesser des mittleren Kreisbogens den Werth:

$$3)\quad R_1 = \frac{19{,}8+23{,}2+25+23{,}2+19{,}8}{5} = 22{,}2.$$

Da jenen fünf Werthen von ϱ eine Winkelsumme von $5 \,.\, 5 = 25$ Graden entspricht, so wird man dem mittleren Kreisbogen einen Centriwinkel von 25 Graden zu geben haben (Fig. 420).

Fig. 420.



Zu der Gruppe jedes von den beiden Eckpunkten J gehören nach der obigen Tabelle die neun Werthe:

16,7, 14,6, 13,4,
12,5, 12,5, 12,8,
13,8, 15,5, 18,4.

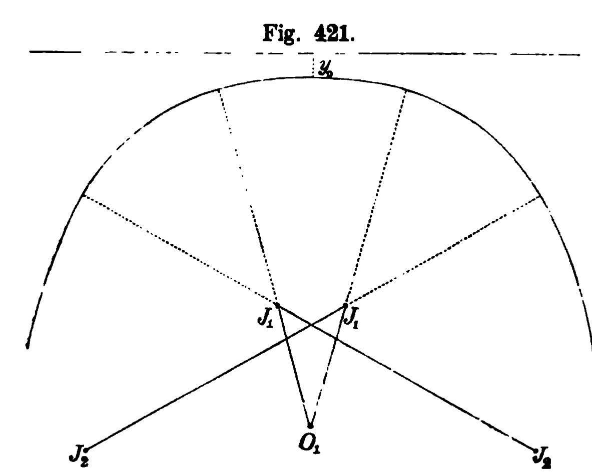
Jeden von den beiden anderen Kreisbögen wird man demnach zu beschreiben haben mit dem Halbmesser:

$$4)\quad r_1 = \frac{16{,}7+14{,}6+\ldots+15{,}5+18{,}4}{9} = 14{,}4,$$

und da den obigen neun Werthen von ϱ eine Winkelsumme von $9 . 5 = 45$ Graden entspricht, so wird man jedem dieser beiden Kreisbögen einen Centriwinkel von 45 Graden zu geben haben.

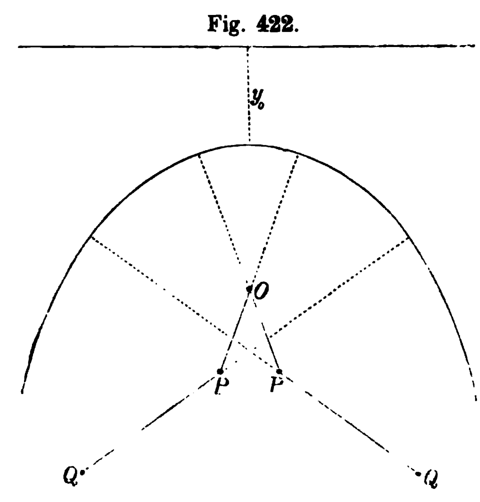
Wenn die Construction der Stützlinie noch weiter fortgeführt werden soll, so hat man an jeder Seite noch einen zweiten Kreisbogen hinzuzufügen und erhält dann einen aus fünf Kreisbögen zusammengesetzten Korbbogen. Die Halbmesser der beiden hinzuzufügenden Kreisbögen findet man auf dieselbe Weise wie oben, indem man das arithmetische Mittel von denjenigen Krümmungshalbmessern berechnet, welche der zugehörigen Gruppe von Krümmungsmittelpunkten entsprechen.

Fig. 421.



Den Fehler, welchen man begeht, indem man auf solche Weise die Stützlinie ersetzt durch eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie, kann man sich veranschaulichen, indem man die aus krummlinigen Stücken zusammengesetzte Evolute der wirklichen Stützlinie vergleicht mit der aus geradlinigen Stücken zusammengesetzten gebrochenen Linie $J_2 J_1 O_1 J_1 J_2$, welche in Fig. 421 die Stelle der Evolute vertritt.

Fig. 422.



Auf analoge Weise kann man auch in solchen Fällen, wo A kleiner ist als drei, und die Evolute demgemäss nur einen Eckpunkt hat (Fig. 418),

indem man eine aus geradlinigen Stücken zusammengesetzte gebrochene Linie $QPOPQ$, welche der richtigen Evolute möglichst nahe sich anschliesst, an die Stelle derselben treten lässt, die Stützlinie durch eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie ersetzen (Fig. 422).

§ 124.

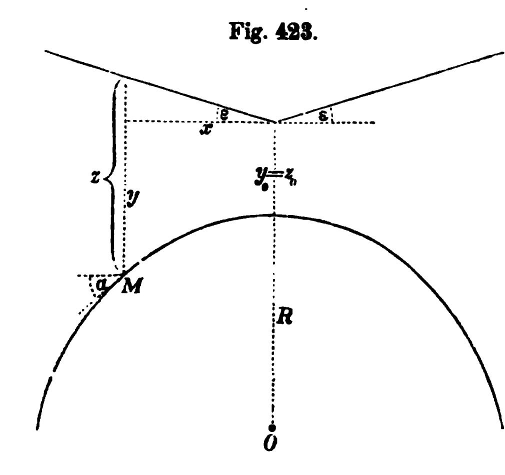
Stützlinie für eine von der Mitte nach aussen geradlinig ansteigende Belastungslinie.

Nach der in § 119 eingeführten Bezeichnungsweise ist für den in Fig. 423 dargestellten Fall:

$$1)\quad z = y + x \operatorname{tg} \varepsilon$$

zu setzen, und wenn abkürzungsweise die Grösse $\operatorname{tg} \varepsilon$ mit k bezeichnet wird, so ergeben sich für diesen Fall zunächst die folgenden Gleichungen:

Fig. 423.



$$2)\quad z = y + kx,$$

$$3)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} + k = \operatorname{tg} \alpha + k,$$

$$4)\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

welche letztere nach Substitution des in der Gleichung 4) des § 119 für $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefundenen Ausdruckes die folgende Form annimmt:

$$5)\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{z}{H}.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die Gleichung 2) des § 121, und auf dieselbe Weise wie dort gelangt man durch Integration derselben zu der Gleichung:

$$6)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{z^2}{H} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $z = z_0 = y_0$, und nach Gleichung 3) zugleich $\frac{dz}{dx} = k$. Die Constante ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$7)\quad k^2 = \frac{y_0^2}{H} + \text{Const.}$$

und man erhält durch Subtraction dieser letzteren von der vorhergehenden die Gleichung:

$$8)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - k^2 = \frac{z^2 - y_0^2}{H}, \quad \text{oder:}$$

$$9)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{z^2 - (y_0^2 - Hk^2)}{H}.$$

Wenn man hierin abkürzungsweise die Constante $y_0^2 - Hk^2$ gleich c^2 setzt, so kann man der letzteren Gleichung auch die folgende Form geben:

$$10)\quad \frac{dx}{\sqrt{H}} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Diese Gleichung hat wiederum dieselbe Form wie die in § 121 gefundene Gleichung 11), und man gelangt auf dieselbe Weise wie dort durch Integration derselben zu den folgenden Gleichungen:

$$11)\quad \frac{x}{\sqrt{H}} = \lg\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right) + \text{Const.},$$

$$12)\quad 0 = \lg\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - c^2}\right) + \text{Const.},$$

$$13)\quad \frac{x}{\sqrt{H}} = \lg\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{y_0 + \sqrt{y_0^2 - c^2}}\right),$$

$$14)\quad z = \left(\frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 - c^2}}{2}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + \frac{c^2 . e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}}{2\left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - c^2}\right)}.$$

Wenn man nunmehr für die Grössen $z = y + kx$ und $c^2 = y_0^2 - Hk^2$ ihre Werthe substituirt und zugleich wieder $H = Ry_0$ setzt, so kann man den letzten beiden Gleichungen auch die folgenden Formen geben:

$$15)\quad x = \sqrt{Ry_0} . \lg\left\{\frac{y + kx + \sqrt{(y + kx)^2 - (y_0^2 - Ry_0 k^2)}}{y_0 + k\sqrt{Ry_0}}\right\},$$

$$16)\quad y = -kx + \frac{1}{2}\left\{\left(y_0 + k\sqrt{Ry_0}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{Ry_0}}} + \left(y_0 - k\sqrt{Ry_0}\right) e^{-\frac{x}{\sqrt{Ry_0}}}\right\}.$$

Um den Krümmungshalbmesser ϱ als Function des Winkels α darzustellen, hat man zunächst in Gleichung 8) für die Grösse $\frac{dz}{dx}$ den in Gleichung 3) angegebenen Werth zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

$$17)\quad (\operatorname{tg}\alpha + k)^2 - k^2 = \frac{z^2 - y_0^2}{H}, \quad \text{oder:}$$

$$18)\quad z = \sqrt{y_0^2 + H(\operatorname{tg}\alpha^2 + 2k\operatorname{tg}\alpha)}.$$

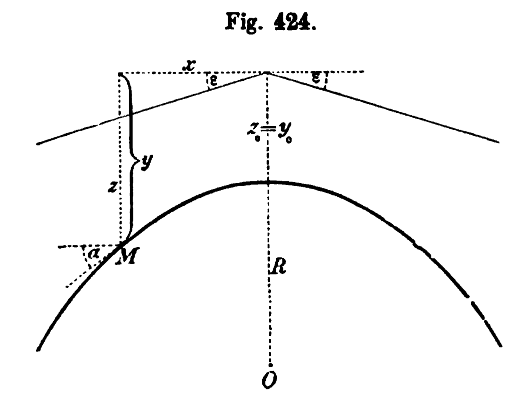
Nach Substitution des letzteren Ausdruckes nimmt die allgemeine Gleichung 8) des § 119 die folgende Form an:

$$19)\quad \varrho = \frac{H}{\cos\alpha^3 \sqrt{y_0^2 + H(\operatorname{tg}\alpha^2 + 2k\operatorname{tg}\alpha)}}, \quad \text{oder:}$$

$$20)\quad \varrho = \frac{R}{\cos\alpha^3 \sqrt{1 + A(\operatorname{tg}\alpha^2 + 2k\operatorname{tg}\alpha)}}.$$

Die hier gefundenen Gleichungen gelten sowohl für negative wie für positive Werthe der Constanten k. Sie gelten daher z. B. auch für den in Fig. 424 dargestellten Fall, bei welchem die beiden Zweige der Belastungslinie nach **unten** hin von der Horizontalen abweichen. Für diesen Fall würde $k = -\operatorname{tg}\varepsilon$ zu setzen sein. Wenn man endlich $k = 0$ setzt, so erhält man wieder die in § 121 für **horizontale** Belastungslinie gefundenen Gleichungen.

Fig. 424.



§ 125.

Halb-Ellipse als Stützlinie.

Die Gleichung der Ellipse hat nach der in Fig. 425 gewählten Bezeichnungsweise die Form:

$$1)\quad \frac{x^2}{l^2} + \frac{u^2}{f^2} = 1, \quad \text{oder:} \quad u = \frac{f}{l}\sqrt{l^2 - x^2}.$$

Wenn man hierin für die Ordinate u den aus der Figur zu entnehmenden Ausdruck:

$$2)\quad u = z_0 + f - y$$

einsetzt, so erhält man eine Gleichung, welche für y aufgelöst die Form annimmt:

$$3)\quad y = z_0 + f - \frac{f}{l}\sqrt{l^2 - x^2}.$$

Indem man diese Gleichung zweimal nach einander differenziirt, gelangt man alsdann zu den folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{fx}{l} \cdot (l^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

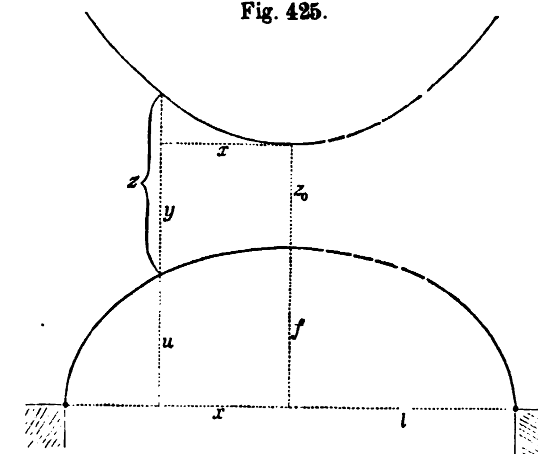
$$5)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = fl\,(l^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Den letzteren Ausdruck hat man nunmehr in der allgemeinen Gleichung 4) des § 119 zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

$$6)\quad \frac{z}{H} = fl\,(l^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Diese Gleichung nimmt nach Substitution der zusammengehörigen Werthe $x = 0$ und $z = z_0$ die Form an:

Fig. 425.



$$7)\quad \frac{z_0}{H} = \frac{f}{l^2},$$

und wenn man die vorhergehende Gleichung durch diese letztere dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$8)\quad \frac{z}{z_0} = \left(\frac{l}{\sqrt{l^2 - x^2}}\right)^3.$$

Der in § 120 für die einer kreisbogenförmigen Stützlinie entsprechende Belastungslinie gefundenen Gleichung 1) kann man auch die folgende Form geben:

$$9)\quad \frac{z}{z_0} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^3 = \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^3,$$

und man erkennt bei Vergleichung dieser letzteren mit der vorhergehenden Gleichung, dass die Werthe des Quotienten $\frac{z}{z_0}$ in beiden Fällen genau übereinstimmen, sobald der Halbmesser der Kreislinie gleich der horizontalen Halb-Achse der Ellipse ist.

Wenn man für die Grösse $\sqrt{l^2 - x^2}$ den aus der Gleichung 1) zu entnehmenden Werth in Gleichung 7) einsetzt, so nimmt letztere die Form an:

$$10)\quad \frac{z}{z_0} = \frac{f^3}{u^3},$$

und zeigt in dieser Form, dass die Belastungshöhen umgekehrt wie die dritten Potenzen der zugehörigen Ordinaten der Ellipse sich verhalten. Für $x = l$ wird $u = 0$ und $z = \infty$.

§ 126.

Gemeine Kettenlinie.

Wenn das Gewicht der hängenden Kette eine gleichförmig über die Bogenlänge derselben vertheilte Belastung bildet, und mit q das überall gleich grosse Gewicht pro Längeneinheit des Bogens bezeichnet wird, so ist nach der in Fig. 426 und Fig. 427 gewählten Bezeichnung $V = qs$ zu setzen; man erhält also nach Fig. 427 für diesen Fall die Gleichung:

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{H} = \frac{qs}{H}.$$

Da am Scheitelpunkte der Kette das Gewicht pro Längeneinheit der Horizontalprojection identisch ist mit dem Gewichte pro Längeneinheit des Bogens, so ist die in den früheren Paragraphen mit z_0 bezeichnete Grösse für diesen Fall gleich q zu setzen. Nach § 119 (Gleichung 10) hat also die Horizontalspannung der Kette die Grösse:

Fig. 426.

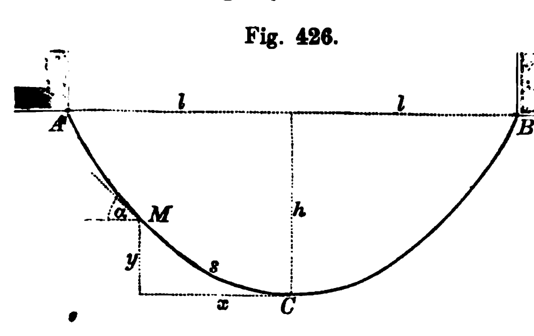
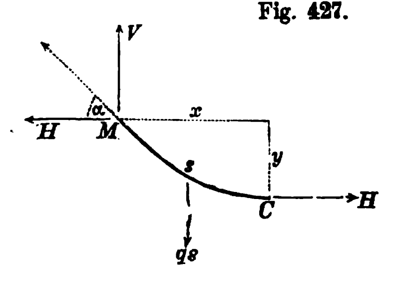


Fig. 427.



$$2)\quad H = qR,$$

und wenn man in der vorhergehenden Gleichung diesen Werth für H substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$3)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{s}{R}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, hat man derselben zunächst die folgende Form zu geben:

$$4)\quad R^2 dy^2 = s^2 dx^2$$

und alsdann die Grösse $s^2 dy^2$ auf beiden Seiten zu derselben zu addiren. Da $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ist, so ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$5) \quad (s^2 + R^2)\, dy^2 = s^2 ds^2, \quad \text{oder:}$$

$$6) \quad dy = \frac{s\, ds}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

Wenn man diese Gleichung integrirt und dabei berücksichtigt, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ und $s = 0$ wird, so erhält man die Gleichung:

$$7) \quad y + R = \sqrt{s^2 + R^2}, \quad \text{oder:}$$

$$8) \quad y^2 + 2Ry = s^2,$$

welcher man nach Substitution des aus Gleichung 3) für s zu entnehmenden Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$9) \quad y^2 + 2Ry = R^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \text{oder:}$$

$$10) \quad dx = \frac{R\, dy}{\sqrt{y^2 + 2Ry}}.$$

Indem man diese Gleichung abermals integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen 0 und x, auf der rechten zwischen den Grenzen 0 und y — erhält man endlich die Gleichung:

$$11) \quad x = R \lg \left\{ \frac{R + y}{R} + \sqrt{\left(\frac{R + y}{R}\right)^2 - 1} \right\}, \quad \text{oder:}$$

$$12) \quad y = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{x}{R}} - 2 + e^{-\frac{x}{R}}\right).$$

Anstatt die obigen Gleichungen — wie hier geschehen — direct abzuleiten, hätte man dazu auch die Gleichungen des § 121 benutzen können, insofern — wie am Schlusse jenes Paragraphen gezeigt wurde — die Stützlinie für horizontale Belastungslinie in eine gemeine Kettenlinie übergeht, sobald für den Modulus A der Werth „Eins" angenommen wird.

§ 127.

Grenzen der Spannweite.

Die Spannung der Kette hat (nach Fig. 427) an der Stelle M die Grösse:

$$1) \quad \frac{H}{\cos\alpha} = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}.$$

Wenn also mit F der Querschnitt der Kette, und mit $\mathfrak{S}$ die Spannung pro Flächeneinheit des Querschnitts an dieser Stelle bezeichnet wird, so ist:

$$2)\quad \mathfrak{S} F = H \sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha^2}.$$

Hierin kann man für die Grössen H und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ resp. die in den Gleichungen 2) und 3) des vorigen Paragraphen gefundenen Werthe einsetzen; man erhält dann die Gleichung:

$$3)\quad \mathfrak{S} F = q R \sqrt{1 + \frac{s^2}{R^2}}.$$

Wenn ferner mit γ das Gewicht des Kettenmaterials pro Cubikeinheit bezeichnet wird, so ist für das Gewicht der Kette pro Längeneinheit der Werth:

$$4)\quad q = \gamma . F . 1$$

einzusetzen, und nach Substitution desselben kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$5)\quad \mathfrak{S} = \gamma \sqrt{s^2 + R^2}.$$

Wenn man hierin für $\sqrt{s^2 + R^2}$ den in Gleichung 7) des vorigen Paragraphen gefundenen Werth einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$6)\quad \mathfrak{S} = \gamma (R + y).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Spannung $\mathfrak{S}$ mit wachsendem y zunimmt, und dass dieselbe ihren grössten Werth $\mathfrak{S} = S$ für $y = h$ annimmt. Wenn man also mit S die practisch zulässige Spannung des Materials, und abkürzungsweise mit m den Quotienten $\frac{S}{\gamma}$ bezeichnet, so kann man die obige Gleichung in der Form:

$$7)\quad R + h = \frac{S}{\gamma} = m$$

benutzen, um die grösste zulässige Pfeilhöhe h daraus zu berechnen.

Da dem Werthe $y = h$ der Werth $x = l$ entspricht, so ist nach Gleichung 11) des vorigen Paragraphen:

$$8)\quad l = R \lg \left\{ \frac{R + h}{R} + \sqrt{\left(\frac{R + h}{R}\right)^2 - 1} \right\}$$

zu setzen, und wenn man hierin für $R + h$ den obigen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$9)\quad l = R \lg \left\{ \frac{m}{R} + \sqrt{\left(\frac{m}{R}\right)^2 - 1} \right\}.$$

Hierin ist die Grösse m als eine von der Beschaffenheit des Kettenmaterials abhängige gegebene Constante zu betrachten. Die obige Gleichung zeigt also, dass für eine bestimmte gegebene Kette die erreichbare halbe Spannweite l (als Function von R) lediglich von der Wahl des Krümmungshalbmessers im Scheitelpunkte abhängt.

Um denjenigen Werth von R zu finden, für welchen die Grösse l ein Maximum wird, hat man den Differenzialquotienten von l, nach R genommen, gleich Null zu setzen. Wenn man zu diesem Zwecke zunächst abkürzungsweise die Grösse:

$$10)\quad \lg\left\{\frac{m}{R}+\sqrt{\left(\frac{m}{R}\right)^2-1}\right\}=\mu$$

setzt, so ergiebt sich für den Differenzialquotienten von μ, nach R genommen, der Ausdruck:

$$11)\quad \frac{d\mu}{dR}=-\frac{m}{R\sqrt{m^2-R^2}},$$

und die oben für l gefundene Gleichung nimmt bei Anwendung dieser Bezeichnungsweise die einfachere Form an:

$$12)\quad l=R\mu.$$

Indem man nunmehr den Differenzialquotienten, von l nach R genommen, gleich Null setzt, erhält man die Gleichung:

$$13)\quad 0=R\cdot\frac{d\mu}{dR}+\mu,$$

welche nach Substitution des oben für die Grösse $\frac{d\mu}{dR}$ gefundenen Werthes die folgende Form annimmt:

$$14)\quad 0=-\frac{m}{\sqrt{m^2-R^2}}+\mu,\ \text{oder:}\ \frac{m}{R}=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}.$$

Wenn man diesen letzteren Ausdruck für den Quotienten $\frac{m}{R}$ in Gleichung 10) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$15)\quad \lg\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}\right)=\mu,\ \text{oder:}$$

$$16)\quad \lg\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)=2\mu,$$

und findet durch Probiren, dass dieser letzteren Bedingungsgleichung Genüge geleistet wird durch den Werth:

$$17)\quad \mu=1{,}20.$$

Für den vortheilhaftesten Krümmungshalbmesser des Scheitelpunktes erhält man nunmehr aus Gleichung 14), indem man dieselbe für R auflöst und nachher darin $\mu = 1,2$ setzt, den Werth:

$$18) \quad R = \frac{m}{\mu}\sqrt{\mu^2 - 1} = 0,552\,77 \,.\, m.$$

Das bei Wahl dieses Krümmungshalbmessers erreichbare Maximum der Spannweite hat nach Gleichung 12) die Grösse:

$$19) \quad 2\,l = 2\,R\,\mu = 1,326\,65 \,.\, m,$$

und für die entsprechende Pfeilhöhe der Kette ergiebt sich aus Gleichung 7) der Werth:

$$20) \quad h = m - R = 0,447\,23 \,.\, m.$$

Die Constante $m = \frac{S}{\gamma}$ bedeutet diejenige Länge, welche eine vertical herabhängende prismatische Stange höchstens haben darf, wenn die am oberen Ende der Stange durch das Gewicht derselben hervorgebrachte Spannung die practisch zulässige Grenze nicht überschreiten soll. Das Gewicht eines Cubikmeters Schmiedeisen hat im Mittel die Grösse $\gamma = 7700$ Kil., und da die practisch zulässige Spannung für Schmiedeisen 6 bis 8 Kil. pro Quadratmillimeter beträgt, so kann $S = 7\,700\,000$ Kil. (als practisch zulässige Spannung pro Quadratmeter) gesetzt werden. Hiernach hat jene Constante für Schmiedeisen den Werth:

$$m = \frac{S}{\gamma} = \frac{7\,700\,000}{7\,700} = 1000^{m},$$

und nach Substitution desselben erhält man aus den Gleichungen 18), 19), 20) resp. die Werthe:

$$R = 552^{m},77, \quad 2\,l = 1326^{m},65, \quad h = 447^{m},23.$$

Für Stahl kann die Constante $m = 4000^{m}$ gesetzt werden, insofern die practisch zulässige Spannung für Stahl ungefähr viermal so gross ist als für Schmiedeisen, während die Grösse γ für beide ungefähr denselben Werth hat. Hiernach ergeben sich für Stahl die Werthe:

$$R = 2211^{m},08, \quad 2\,l = 5306^{m},6, \quad h = 1788^{m},92.$$

§ 128.

Parabolische Kette.

Bei gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung nimmt die Kettenlinie — wie in § 40 bereits gezeigt wurde — die Form einer Parabel an (Fig. 428). Wenn die Spannung der Kette pro Flächeneinheit ihres Querschnitts in allen Querschnitten dieselbe Grösse haben soll, so muss vom Scheitelpunkte nach den Aufhängepunkten hin der Kettenquerschnitt allmählich zunehmen, und zwar nach demselben Gesetze wie die Kettenspannung

zunimmt (Fig. 429). Für das Verhältniss des grössten Querschnitts zum kleinsten ergiebt sich in diesem Falle nach § 40 (Gleichung 11) der Werth:

$$1)\quad \frac{F}{F_0} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

und für den Vertical-Querschnitt der Kette an den Aufhängepunkten erhält man nach den Gleichungen 12) und 14) des § 40 den Werth:

$$2)\quad U = \frac{F_0}{\cos\alpha^2} = F_0(1 + \operatorname{tg}\alpha^2), \quad \text{oder:}$$

$$3)\quad U = F_0\left(1 + \frac{4h^2}{l^2}\right).$$

Das Gewicht der Kette pro Längeneinheit der Horizontalprojection hat am Scheitelpunkte die Grösse $\gamma . F_0 . 1$ und an den Aufhängepunkten die Grösse $\gamma . U . 1$. Das eigene Gewicht der Kette würde demnach in diesem Falle eine ungleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilte Belastung bilden. Wenn jedoch zu dem eigenen Gewichte der Kette noch so Viel an fremder Belastung hinzugefügt wird, dass die Totalbelastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection nunmehr an allen Stellen die Grösse:

Fig. 428.

Fig. 429.

$$4)\quad \gamma U = p$$

erreicht, so wird hierdurch der Bedingung für die parabolische Form der Kettenlinie Genüge geleistet, und für den erforderlichen Querschnitt der Kette im Scheitelpunkte ergiebt sich nach § 40 (Gleichung 9) der Werth:

$$5)\quad F_0 = \frac{p l^2}{2hS}.$$

Die Gleichung 3) nimmt nach Substitution dieses Werthes die folgende Form an:

$$6)\quad U = \frac{p\,l^2}{2\,h\,S}\left(1 + \frac{4\,h^2}{l^2}\right),$$

und wenn man in Gleichung 4) diesen Ausdruck für U substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$7)\quad \frac{\gamma\,l^2}{2\,h\,S}\left(1 + \frac{4\,h^2}{l^2}\right) = 1, \text{ oder:}$$

$$8)\quad S = 2\gamma\,l\left(\frac{h}{l} + \frac{l}{4\,h}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass bei gegebener Spannweite die Spannung S noch abhängt von der Grösse des Verhältnisses:

$$9)\quad \frac{l}{h} = n.$$

Um denjenigen Werth von n zu finden, für welchen die Grösse S ein Minimum wird, hat man in der Gleichung:

$$10)\quad S = 2\gamma\,l\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{4}\right)$$

den Differenzialquotienten von S, nach n genommen, gleich Null zu setzen; man erhält dann die Gleichung:

$$11)\quad 0 = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4},$$

und wenn man den hieraus zu entnehmenden Werth $n = 2$ in Gleichung 10) substituirt, so ergiebt sich aus derselben für das erreichbare Maximum der Spannweite der Werth:

$$12)\quad 2\,l = \frac{S}{\gamma}.$$

Mit Beibehaltung der am Schlusse des vorigen Paragraphen angenommenen Zahlenwerthe würde man demnach unter den **hier** gemachten Voraussetzungen für **Schmiedeisen** den Werth: $2\,l = 1000^{\text{m}}$, und für **Stahl** den Werth: $2\,l = 4000^{\text{m}}$ erhalten.

§ 129.

Kettenbrücken-Linie.

Wenn die Kette ausser ihrem eigenen Gewichte noch eine gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilte fremde Belastung zu tragen hat, so ist nach Fig. 430 und Fig. 431 die Gleichgewichtsform der Kette zu berechnen aus der Differenzialgleichung:

$$1)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{p\,x + \int q\,ds}{H}.$$

Auch hier soll vorausgesetzt werden, dass der Querschnitt der Kette vom Scheitelpunkte nach den Aufhängepunkten hin allmählich zunimmt — und zwar nach demselben Gesetze wie die Kettenspannung — dass also die Spannung pro Flächeneinheit des Querschnittes in allen Querschnitten der Kette dieselbe Grösse hat. Da die Grösse q, als eigenes Gewicht der Kette pro Längeneinheit des Bogens, überall dem Querschnitte derselben proportional ist, so ändert sich die Grösse q vom Scheitelpunkte nach den Aufhängepunkten hin ebenfalls nach jenem Gesetze. Wenn also mit k der Werth bezeichnet wird, welchen die veränderliche Grösse q im Scheitelpunkte der Kette annimmt, so ergiebt sich aus Fig. 431 für q die Gleichung:

Fig. 430.

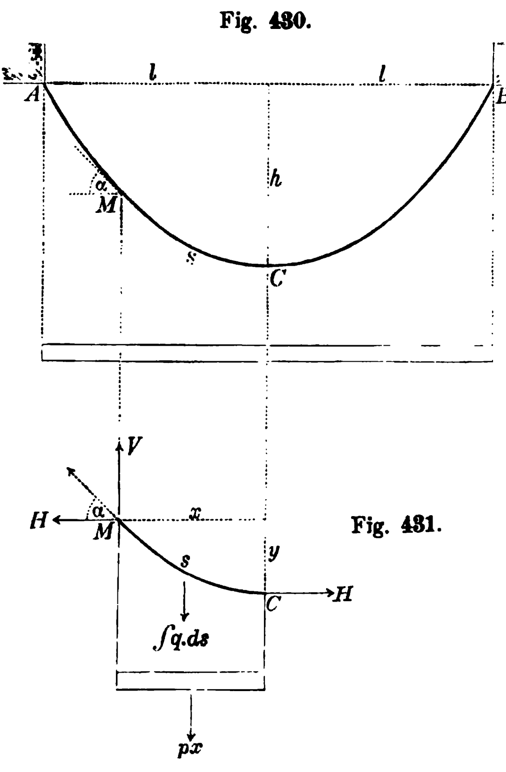


Fig. 431.

$$2)\quad \frac{q}{k} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{ds}{dx}.$$

Nach Substitution des hieraus für q zu entnehmenden Werthes kann man der Gleichung 1), indem man darin abkürzungsweise $\frac{dy}{dx} = u$ setzt, auch die folgende Form geben:

$$3)\quad H\frac{dy}{dx} = Hu = px + k\int\left(\frac{ds}{dx}\right)ds,$$

und wenn man dieselbe alsdann nach x differenziirt, so erhält man die Gleichung:

$$4)\quad H\frac{du}{dx} = p + k\frac{ds^2}{dx^2}.$$

Da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ und $dy = u\,dx$ ist, so kann man statt dessen auch setzen:

$$5)\quad H\frac{du}{dx} = p + k\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right), \quad \text{oder:}$$

$$6)\quad H\frac{du}{dx} = k\left(\frac{p+k}{k} + u^2\right),$$

und wenn man abkürzungsweise $\sqrt{\frac{p+k}{k}} = n$ setzt, so kann man dieser Gleichung auch die folgenden Formen geben:

$$7)\quad H\,du = k\,(n^2 + u^2)\,dx, \quad \text{oder:}$$

$$8)\quad \frac{d\left(\frac{u}{n}\right)}{1 + \left(\frac{u}{n}\right)^2} = \frac{nk}{H}\cdot dx.$$

Indem man nunmehr diese Gleichung integrirt — auf der rechten Seite zwischen den Grenzen 0 und x, auf der linken zwischen den Grenzen 0 und u — gelangt man zu den nachstehenden Gleichungen:

$$9)\quad \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{nkx}{H}, \quad \text{oder:}$$

$$10)\quad u = n\,\operatorname{tg}\left(\frac{nkx}{H}\right),$$

welcher letzteren man nach Substitution des Werthes $u = \frac{dy}{dx}$ auch die folgende Form geben kann:

$$11)\quad \frac{dy}{dx} = n\,\operatorname{tg}\left(\frac{nkx}{H}\right), \quad \text{oder:}$$

$$12)\quad dy = \frac{H}{k}\operatorname{tg}\left(\frac{nkx}{H}\right) d\left(\frac{nkx}{H}\right).$$

Diese Gleichung hat man abermals zu integriren — und zwar auf der rechten Seite zwischen den Grenzen 0 und x, auf der linken zwischen den Grenzen 0 und y —; man erhält dann die Gleichung:

$$13)\quad y = -\frac{H}{k}\lg\cos\left(\frac{nkx}{H}\right).$$

Nach § 119 (Gleichung 10) kann $H = R(p+k)$ gesetzt werden; folglich ist:

$$14)\quad \frac{H}{k} = R\left(\frac{p+k}{k}\right) = Rn^2$$

zu setzen, und nach Substitution des letzteren Werthes nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$15)\quad y = -Rn^2 \lg\cos\left(\frac{x}{Rn}\right).$$

Für $x = l$ wird $y = h$; die Pfeilhöhe der Kette hat also die Grösse:

$$16)\quad h = -Rn^2 \lg\cos\left(\frac{l}{Rn}\right).$$

§ 130.

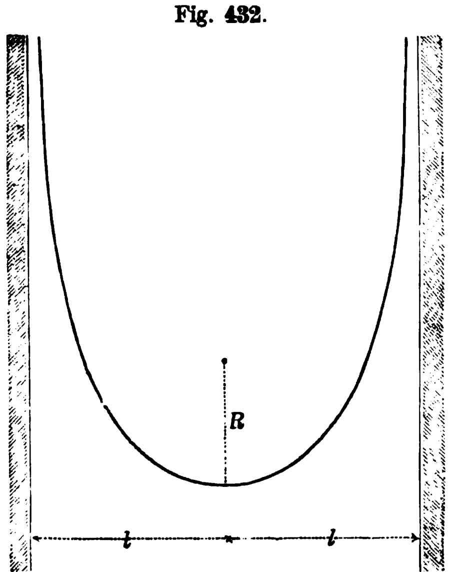
Grenzen der Spannweite für Kettenbrücken.

Die am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundene Gleichung zeigt, dass die Pfeilhöhe h unendlich gross wird, wenn $\frac{l}{Rn} = \frac{\pi}{2}$ wird. Mit wachsender Pfeilhöhe nähert sich also die Spannweite dem festen Grenzwerthe:

$$1)\quad 2l = \pi Rn,$$

welchen dieselbe erst bei unendlich grosser Pfeilhöhe wirklich erreichen würde. Die beiden Zweige der Curve nähern sich asymptotisch zwei festen verticalen Linien, deren Abstand von einander gleich $2l$ ist (Fig. 432). Wie die obige Gleichung zeigt, hängt die Grösse dieses Abstandes ab von der Grösse des gewählten Krümmungshalbmessers R, welcher seinerseits wiederum durch die Grösse der practisch zulässigen Spannung bedingt wird.

Fig. 432.



Wenn mit F_0 der Querschnitt der Kette im Scheitelpunkte und mit S die überall gleiche Spannung pro Flächeneinheit des Querschnittes bezeichnet wird, so ist:

$$2)\quad SF_0 = H = R(k + p),$$

und wenn mit γ das Gewicht des Ketten-Materials pro Cubikeinheit bezeichnet wird, so ist:

$$3)\quad k = \gamma \,.\, F_0 \,.\, 1, \quad \text{oder:} \quad F_0 = \frac{k}{\gamma}$$

zu setzen. Nach Substitution des letzteren Werthes kann man der Gleichung 2) auch die folgenden Formen geben:

$$4)\quad \frac{Sk}{\gamma} = R(k + p), \quad \text{oder:}$$

$$5)\quad \frac{S}{\gamma} = R\left(\frac{k + p}{k}\right) = Rn^2,$$

und wenn man den aus letzterer Gleichung für R zu entnehmenden Werth in Gleichung 1) substituirt, so erhält man für den oberen Grenzwerth der erreichbaren Spannweite die Gleichung:

$$6)\quad 2l = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{S}{\gamma}.$$

Je grösser das eigene Gewicht der Kette im Verhältniss zu der fremden Belastung ist, um so mehr nähert sich die Grösse:

$$7)\quad n = \sqrt{\frac{k + p}{k}}$$

dem Grenzwerthe „Eins“. Für das absolute Maximum der erreichbaren Spannweite ergiebt sich hiernach der Grenzwerth:

$$8)\quad 2l = \pi \,.\, \frac{S}{\gamma}.$$

In dieser Gleichung ist für S wiederum die Grösse der practisch zulässigen Spannung des Kettenmaterials zu substituiren. Mit Beibehaltung der am Schlusse des § 127 angenommenen Zahlenwerthe $\left(\frac{S}{\gamma} = 1000\right.$ für Schmiedeisen und $\left.\frac{S}{\gamma} = 4000\right.$ für Stahl$\left.\right)$ erhält man demnach resp. für Schmiedeisen und Stahl die Werthe:

$$2l = 3140^{m} \quad \text{und} \quad 2l = 12\,560^{m},$$

welche π-mal so gross sind als die am Schlusse des § 128 gefundenen Werthe.

Die wirklich erreichbare Spannweite hängt ab von der Grösse, welche für die Pfeilhöhe h entweder vorgeschrieben ist oder willkürlich angenommen wird. Für $n = 1$ wird (nach Gleichung 5) $R = \frac{S}{\gamma}$ und (nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung):

$$9)\quad h = -\frac{S}{\gamma} \lg \cos\left(\frac{\gamma l}{S}\right).$$

Diese Gleichung nimmt z. B. für Schmiedeisen, wenn darin $\frac{S}{\gamma} = 1000$ gesetzt wird, die folgende Form an:

$$10)\quad h = -1000 \lg \cos \left(\frac{l}{1000}\right), \quad \text{oder:}$$

$$11)\quad 2l = 2000 \operatorname{arc} \cos \left(e^{-\frac{h}{1000}}\right).$$

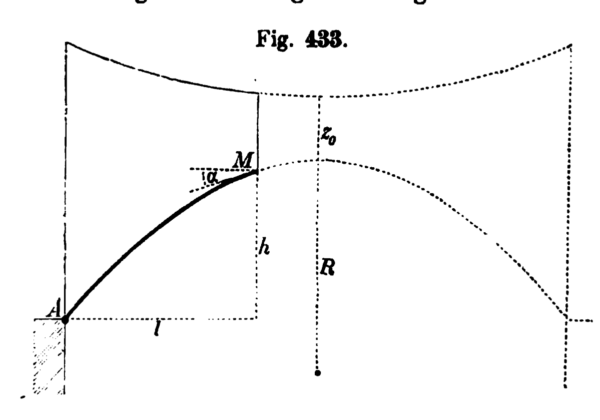
Wenn also für die Pfeilhöhe z. B. der Werth $h = 131^m,25$ vorgeschrieben, so würde für das Maximum der bei dieser Pfeilhöhe erreichbaren Spannweite der Werth $2l = 1000^m$ sich ergeben.

§ 131.

Stützlinien für unsymmetrische Belastungslinien.

Nach § 119 (Gleichung 10) haben die Horizontalspannungen der in Fig. 433 und Fig. 434 dargestellten beiden Stützlinien resp. die Grössen: $H = R z_0$ und $H' = R' z'_0$. Wenn diese beiden Horizontal-Spannungen einander gleich sein sollen, so muss die Bedingungs-Gleichung erfüllt sein:

Fig. 433.

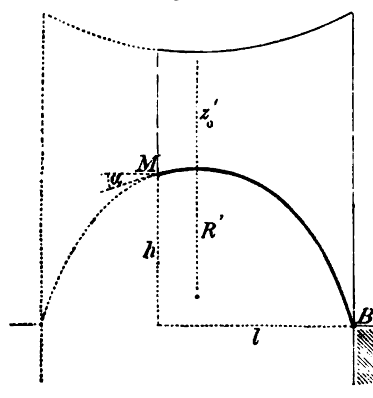


$$1)\quad R z_0 = R' z'_0,$$

$$\text{oder: } \frac{R}{R'} = \frac{z'_0}{z_0},$$

welche ausdrückt, dass die Krümmungshalbmesser an den Scheitelpunkten der beiden Stützlinien sich umgekehrt wie die Belastungshöhen an diesen beiden Stellen zu einander verhalten müssen.

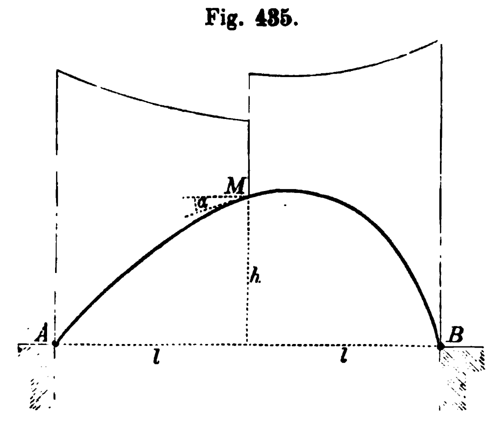
Fig. 434.



Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so werden an der Stelle M, wo die beiden Stützlinien gleiche Neigungswinkel mit der Horizontalen einschliessen, auch die beiden Totalspannungen ihrer Grösse und Richtung nach mit einander übereinstimmen. Man kann daher den Theil AM aus Fig. 433 mit dem Theile BM aus Fig. 434 zusammensetzen zu einer neuen

Stützlinie AMB, deren zugehörige Belastungslinie aus zwei unsymmetrischen Hälften zusammengesetzt ist (Fig. 435).

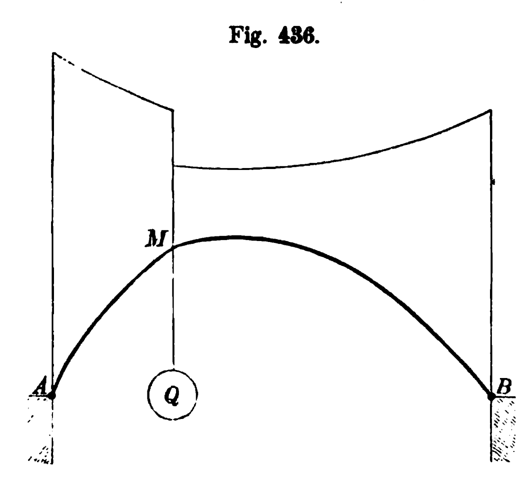
Fig. 435.



Auf analoge Weise würde man auch eine aus mehr als zwei Stücken zusammengesetzte Stützlinie nebst zugehöriger Belastungslinie construiren können, und wenn man dieses Verfahren z. B. auf die in § 123 behandelte, aus Kreisbögen zusammengesetzte Stützlinie anwendete, so würde man statt der horizontalen Belastungslinie eine aus krummlinigen Stücken zusammengesetzte Belastungslinie erhalten, deren Abweichung von der Horizontalen die Grösse des Fehlers veranschaulicht, welchen man begeht, indem man die der horizontalen Belastungslinie entsprechende wirkliche Stützlinie durch eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Curve ersetzt.

Wenn die Neigungswinkel, welche die beiden Stützlinien an der Stelle ihrer Zusammensetzung mit der Horizontalen bilden, ungleiche Grösse haben, so werden bei der Zusammensetzung nur die Horizontalspannungen — nicht aber die Verticalspannungen einander aufheben. In diesem Falle würde man also, um den Gleichgewichtszustand herzustellen, an der Vereinigungsstelle noch eine Verticalkraft:

Fig. 436.



2) $Q = V - V'$

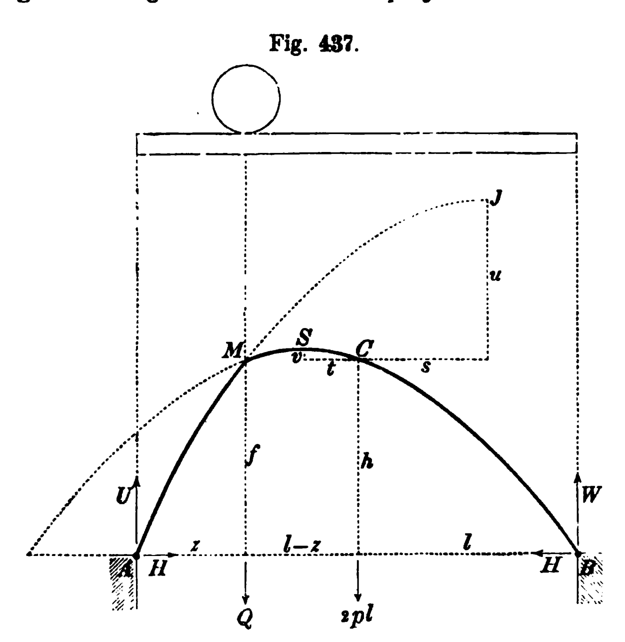
hinzufügen müssen, welche gleich der Differenz jener beiden Verticalspannungen ist. Diese Verticalkraft kann — falls dieselbe nach unten gerichtet ist — auch durch ein angehängtes Gewicht dargestellt werden (Fig. 436).

§ 132.

Zusammensetzung parabolischer Kettenlinien.

Bei der in Fig. 437 dargestellten Kette, welche ausser der gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilten Belastung $2pl$ noch das im Punkte M aufgehängte Gewicht Q zu tragen hat, ist jedes von den beiden Bogenstücken AM und BM als Theil einer parabolischen Kette zu betrachten: das Stück AM als Theil einer parabolischen Kette von der Pfeilhöhe $h+u$ und der Spannweite $2(l+s)$;

Fig. 437.



das Stück BM als Theil einer parabolischen Kette von der Pfeilhöhe $h+v$ und der Spannweite $2(l+t)$. Da sowohl die Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection, als auch die Horizontalspannung für beide Ketten dieselbe Grösse hat, so sind jene beiden Parabeln, welcher die beiden Bogenstücke AM und BM resp. als Theil angehören, ihrer Form nach identisch. Man kann sich daher die Kettenlinie AMB auch entstanden denken durch Zusammensetzung der aus Fig. 438 zu entnehmenden beiden Kettenstücke AM_1 und BM_2, wobei dann zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes an der Verbindungsstelle M eine Verticalkraft hinzuzufügen sein würde von der Grösse:

$$1)\quad Q = p\lambda = p(s+t).$$

Die horizontalen Coordinaten der beiden Scheitelpunkte J und S sind nach Fig. 437 zu berechnen aus den Gleichungen:

2) $p(l+s) = U = pl + Q\left(1 - \frac{z}{2l}\right)$,

3) $p(l+t) = W = pl + \frac{Qz}{2l}$,

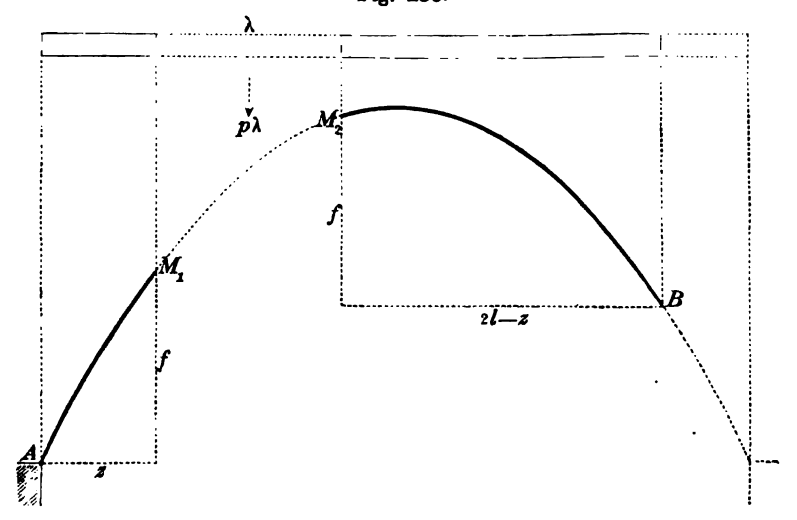
aus welchen für die beiden Grössen s und t resp. die Werthe sich ergeben:

4) $s = \frac{Q}{p}\left(1 - \frac{z}{2l}\right)$,

5) $t = \frac{Qz}{2pl}$.

Die verticalen Coordinaten jener beiden Scheitelpunkte kann man nunmehr berechnen aus der Parabelgleichung:

Fig. 488.



6) $\frac{v}{t^2} = \frac{v+h}{(t+l)^2} = \frac{u+h}{(s+l)^2} = C(\text{onst.})$,

aus welcher man nach Substitution der oben für s und t gefundenen Ausdrücke die Werthe erhält:

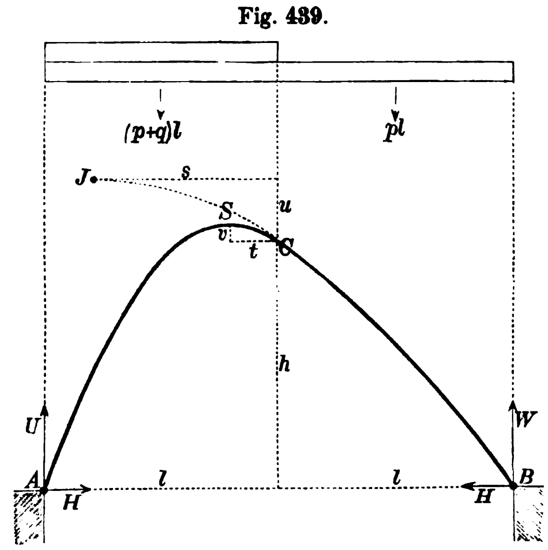
7) $C = \frac{ph}{Qz + pl^2}$,

8) $v = \frac{Q^2hz^2}{4pl^2(Qz + pl^2)}$,

9) $u = \frac{Qh\{8pl^2(l-z) + Q(2l-z)^2\}}{4pl^2(Qz + pl^2)}$.

Auf ähnliche Weise würde man bei der in Fig. **439** dargestellten, aus den beiden parabolischen Bögen AC und BC zusammengesetzten Kettenlinie die Lage des Scheitelpunktes für jede dieser beiden Parabeln bestimmen können. Für die horizontalen Coordinaten dieser Scheitelpunkte erhält man wie oben die Gleichungen:

Fig. **439**.



$$10)\quad (p+q)(l-t) = U = pl + \frac{3}{4}ql,$$

$$11)\quad p(l+s) = W = pl + \frac{1}{4}ql,$$

aus welchen für die beiden Grössen t und s resp. die Werthe sich ergeben:

$$12)\quad t = \frac{ql}{4(p+q}, \qquad 13)\quad s = \frac{ql}{4p}.$$

Die verticalen Coordinaten derselben kann man alsdann berechnen aus den beiden Parabelgleichungen:

$$14)\quad \frac{v}{v+h} = \frac{t^2}{(l-t)^2}, \quad \text{oder:} \quad v = \frac{ht^2}{l^2 - 2lt},$$

$$15)\quad \frac{u}{u+h} = \frac{s^2}{(l+s)^2}, \quad \text{oder:} \quad u = \frac{hs^2}{l^2 + 2ls},$$

welche nach Substitution der oben für t und s gefundenen Ausdrücke die folgenden Formen annehmen:

$$16)\quad v = \frac{hq^2}{8(p+q)(2p+q)},$$

$$17)\quad u = \frac{hq^2}{8p(2p+q)}.$$

Indem man von diesen Scheitelpunkten aus die beiden Parabeln construirt und nachher den Theil AC der einen mit dem Theile BC der anderen zusammensetzt, erhält man die gesuchte Stützlinie für den in Fig. **439** dargestellten Fall.

§ 133.

Stützlinie mit schiefwinkeligem Coordinaten-System.

Wenn man die Construction der in Fig. **440** dargestellten Stützlinie und ihrer zugehörigen Belastungslinie in der Weise abändert: dass man der Abscissen-Achse statt der horizontalen Lage eine um den Winkel ε von der Horizontalen abweichende Lage giebt, und von dieser neuen Abscissen-Achse aus die verticalen Ordinaten jener beiden Curven abträgt — in gleichen Abständen von der verticalen Mittellinie dieselben Ordinaten wie in Fig. **440** — so erhält man die in Fig. **441** dargestellten beiden Curven, von denen sich nachweisen lässt, dass dieselben ebenfalls eine Stützlinie und die zugehörige Belastungslinie darstellen.

Fig. **440**.

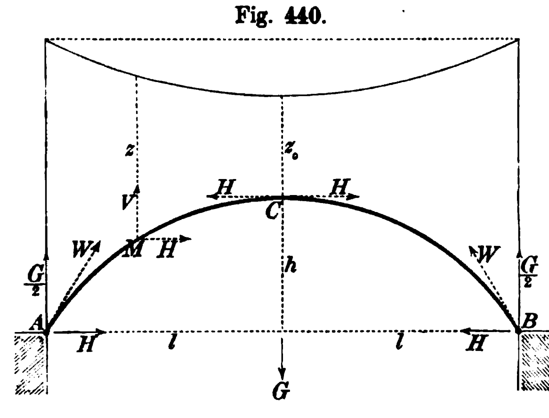
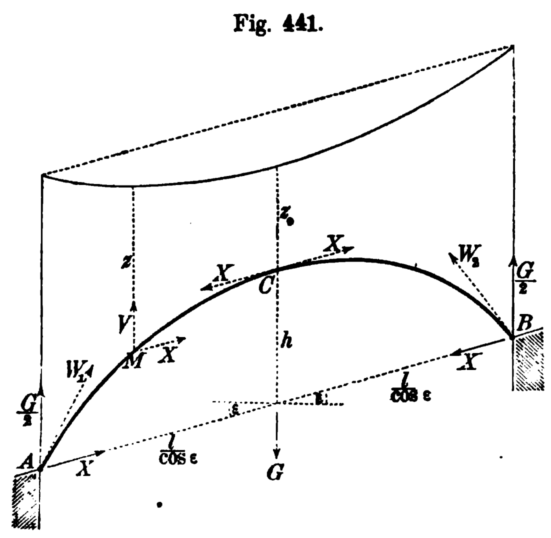


Fig. **441**.



Denkt man sich in jedem Punkte dieser Stützlinie die Spannung derselben zerlegt in eine verticale Seitenkraft V und eine der neuen Abscissen-Achse parallele Seitenkraft X, so erkennt man leicht, dass diese letztere in allen Punkten der Stützlinie dieselbe Grösse hat — ebenso wie in Fig. **440** die Horizontalspannung H —. Die verticale Seitenkraft hat (wie in Fig. **440**) an jedem der beiden

Endpunkte die Grösse $\frac{G}{2}$, im Scheitelpunkte C die Grösse Null, und ist überhaupt an jeder Stelle auf dieselbe Weise wie in Fig. **440** zu berechnen. Wenn man demnach für eine der beiden Hälften die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den betreffenden Stützpunkt aufstellt und das statische Moment der Belastungshälfte mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet, so erhält man aus Fig. **440** und Fig. **441** die Gleichungen:

Fig. 442.

Fig. 443.

$$1)\quad H.h = \mathfrak{M} = X.h \cos \varepsilon, \quad \text{oder:}$$

$$X = \frac{H}{\cos \varepsilon}.$$

Um die Spannung an der Stelle M in Fig. **440** zu bestimmen, hat man die beiden Kräfte V und H zu ihrer Mittelkraft R zusammenzusetzen. Für den Winkel α, welchen die Richtungslinie dieser Mittelkraft mit der Horizontalen einschliesst, ergiebt sich aus Fig. **442** die Gleichung:

$$2)\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}.$$

Auf analoge Weise findet man die Spannung an der Stelle M in Fig. **441**, indem man die Mittelkraft K construirt aus den beiden Kräften V und X, und erhält für den Winkel ω, welchen die Richtungslinie dieser Kraft K mit der Horizontalen einschliesst, nach Fig. **443** die Gleichung:

$$3)\quad \operatorname{tg} \omega = \frac{V + X \sin \varepsilon}{X \cos \varepsilon}, \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad \operatorname{tg} \omega = \frac{V + H \operatorname{tg} \varepsilon}{H},$$

welcher man nach Gleichung 2) auch die folgende Form geben kann:

$$5)\quad \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Um nachzuweisen, dass die krumme Linie $AMCB$ in Fig. **441** eine richtig construirte Stützlinie ist, genügt es den Beweis zu führen, dass an der beliebig gewählten Stelle M die Richtungslinie der Spannung mit der Tangenten-Richtung an dieser Stelle zusammen-

fällt. Für den Winkel φ, welchen diese Tangentenrichtung mit der Horizontalen einschliesst, erhält man aus Fig. **444** die Gleichung:

$$6)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy + dx \,.\, \operatorname{tg}\varepsilon}{dx}.$$

Hierin ist $\frac{dy}{dx}$ gleich $\operatorname{tg}\alpha$ zu setzen; denn für $\varepsilon = 0$, d. h. für den in Fig. **440** dargestellten Fall einer nach rechtwinkeligem Coordinaten-System construirten Stützlinie, muss φ gleich α werden. Hieraus folgt, dass:

Fig. **444**.

$$7)\quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon$$

ist, dass also der Winkel φ gleich dem Winkel ω ist, wie bewiesen werden sollte.

Das an den Figuren **440** und **441** erklärte Verfahren kann man demnach anwenden, um aus einer beliebigen gegebenen Stützlinie eine unendlich grosse Anzahl neuer Formen von Stützlinien abzuleiten.

§ 134.

Darstellung der elastischen Linie als Kettenlinie.*)

Nach § 119 kann man der allgemeinen Differenzialgleichung der Kettenlinie die folgende Form geben:

$$1)\quad H \,.\, \frac{d^2y}{dx^2} = z.$$

In dieser Gleichung bedeutet H die überall gleich grosse Horizontalspannung der Kette, und z die Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection an derjenigen Stelle, deren Coordinaten x und y sind.

Durch entsprechende Wahl der Aufhängungsweise und des Belastungsgesetzes oder des Gesetzes, nach welchem z mit x sich

*) Vergl. Mohr's „Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen" (Zeitschrift des hannoverschen Architecten- und Ingenieur-Vereins, Jahrg. 1868).

ändert, kann man bewirken, dass die Kettenlinie eine beliebige vorgeschriebene Form, so z. B. die der elastischen Linie, annimmt. Für die letztere wurde in § 4 die allgemeine Differenzialgleichung gefunden:

$$2)\quad E\mathfrak{T}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M},$$

in welcher E den Elasticitätsmodulus bedeutet, $\mathfrak{T}$ das Trägheitsmoment des Balken-Querschnittes und $\mathfrak{M}$ das Biegungsmoment an derjenigen Stelle, deren Coordinaten x und y sind.

Wenn man die obigen beiden Differenzial-Gleichungen mit einander vergleicht, so erkennt man sofort, dass die elastische Linie mit der Kettenlinie identisch wird, sobald $H = E\mathfrak{T}$ und $z = \mathfrak{M}$ ist. Hieraus ergiebt sich, dass man die Form der elastischen Linie auch durch eine hängende Kette würde darstellen können, indem man der Kette eine Belastung giebt, welche längs der Horizontal-Projection nach demselben Gesetze wie das Biegungsmoment des Balkens sich ändert, und indem man zugleich auf irgend eine Weise bewirkt, dass die Horizontalspannung der Kette die Grösse $H = E\mathfrak{T}$ annimmt, was z. B. bei constantem Balken-Querschnitte auf die in Fig. 445 angedeutete Weise durch Rollen und Gewichte bewerkstelligt werden kann.

Fig. 445.

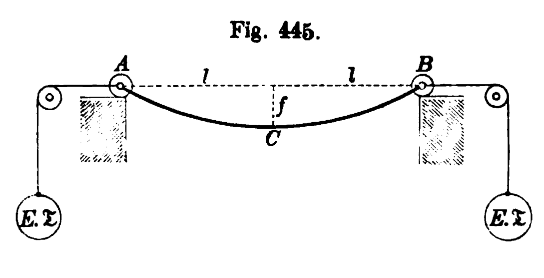
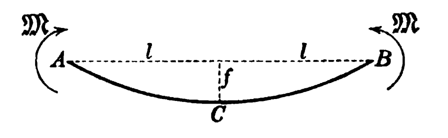


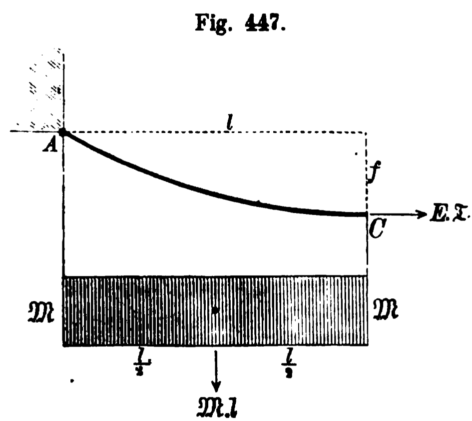
Fig. 446.



Bei dem in Fig. 446 dargestellten Balken, an dessen Ende zwei entgegengesetzte Kräftepaare vom Momente $\mathfrak{M}$ wirken, hat das Biegungsmoment an allen Stellen dieselbe Grösse $\mathfrak{M}$. Man würde also für diesen Fall der Kette eine gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilte Totalbelastung von der Grösse $2\mathfrak{M}l$ zu geben haben, und nach Fig. 447, indem man für die eine Hälfte die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Aufhänge-

punkt aufstellt, die Pfeilhöhe der Kettenlinie oder die Durchbiegung des Balkens berechnen können aus der Gleichung:

Fig. 447.



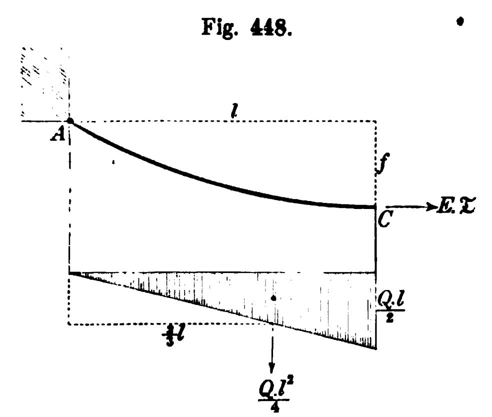
$$3)\quad E\mathfrak{T}.f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2}, \text{ oder:}$$

$$f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2E\mathfrak{T}},$$

welche dasselbe Resultat ergiebt, wie die in § 5 gefundene Gleichung 16).

Um bei einem an beiden Enden unterstützten Balken, welcher in der Mitte mit dem Gewichte Q belastet ist, die an dieser Stelle hervorgebrachte Durchbiegung zu berechnen, würde man die Belastung der Kette nach dem in Fig. 16 graphisch dargestellten Gesetze über die Horizontalprojection vertheilt anzunehmen haben, und erhält nach Fig. 448 auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Falle die Gleichung:

Fig. 448.



$$4)\quad E\mathfrak{T}.f = \frac{Ql^2}{4}\cdot\frac{2}{3}l,$$

$$\text{oder:}\quad f = \frac{Ql^3}{6E\mathfrak{T}}.$$

Wenn die Belastung $2pl$ des an seinen Endpunkten unterstützten Balkens gleichförmig über seine Länge vertheilt ist, so ändert sich das Biegungsmoment längs derselben nach dem in Fig. 18 graphisch dargestellten parabolischen Gesetze. Man erhält also für die in der Mitte hervorgebrachte Durchbiegung nach Fig. 449 die Gleichung:

$$5)\quad E\mathfrak{T}.f = \frac{pl^3}{3}\cdot\frac{5}{8}l, \quad \text{oder:}\quad f = \frac{5}{24}\cdot\frac{pl^4}{E\mathfrak{T}}.$$

Auch bei einem Balken von veränderlichem Querschnitte kann die elastische Linie als Kettenlinie dargestellt werden. Wenn man für diesen Fall der Gleichung 2) die folgende Form giebt:

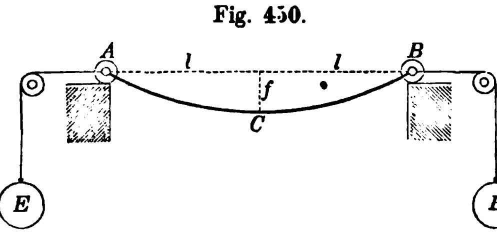
Fig. 449.

$$6)\quad E\,.\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}},$$

so erkennt man bei Vergleichung derselben mit der Gleichung 1): dass die Kettenlinie dieselbe Form annehmen wird wie die elastische Linie, sobald $H = E$ und $z = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}}$ ist.

Die erstere Bedingung kann auf die in Fig. 450 angedeutete Weise erfüllt werden. Was die letztere Bedingung betrifft, so würde z. B. in dem speciellen Falle, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}}$ einen constanten Werth hat — d. h. wenn das Trägheitsmoment des Querschnittes nach demselben Gesetze wie das Biegungsmoment sich ändert — der Kette eine gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilte Belastung von der Grösse:

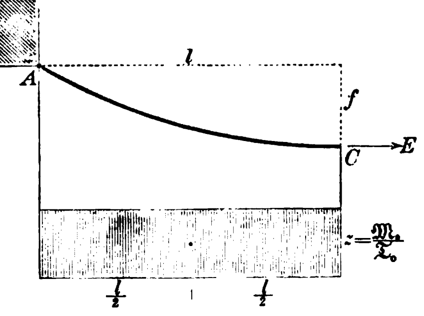
Fig. 450.



$$7)\quad z=\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}}=\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{T}_0}$$

pro Längeneinheit zu geben haben, und nach Fig. 451 (auf analoge Weise wie bei den vorigen Fällen) für die Pfeilhöhe der Kette die Gleichung erhalten:

Fig. 451.



$$8)\quad E\,.f=\frac{z\,l^2}{2},\quad \text{oder:}\quad f=\frac{\mathfrak{M}_0\,l^2}{2\,E\,\mathfrak{T}_0}.$$

Bei einem an beiden Enden unterstützten Balken, dessen Belastung $2pl$ gleichförmig über die Länge desselben vertheilt ist, hat das Biegungsmoment in der Mitte die Grösse:

$$9)\quad \mathfrak{M}_0 = \frac{pl^2}{2},$$

und nach Substitution dieses Werthes erhält man für die Durchbiegung in der Mitte die Gleichung:

$$10)\quad f = \frac{pl^4}{4E\mathfrak{T}_0},$$

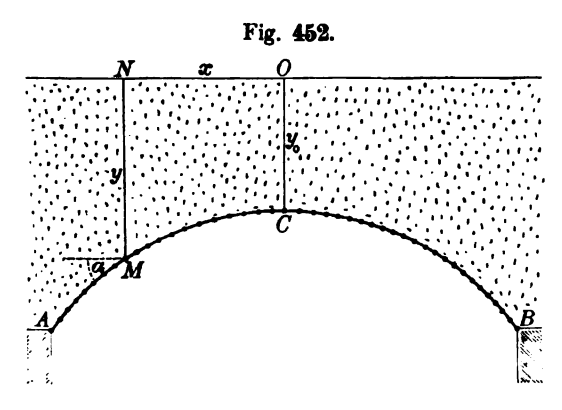
in welcher $\mathfrak{T}_0$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in der Mitte des Balkens bedeutet.

§ 135.

Stützlinie für Erd-Druck.

Wenn das Belastungsmaterial aus Erde oder Sand besteht, so werden auf die Kette nicht nur verticale, sondern auch horizontale Druckkräfte übertragen. Um für den in Fig. 452 dargestellten Belastungszustand die Gleichgewichtsform der (gewichtlos vorausgesetzten) Kette zu finden, hat man sich durch den Scheitelpunkt C und durch den beliebig gewählten Punkt M verticale Schnittflächen hindurchgelegt, und an dem herausgeschnittenen Körper $ONMC$, bestehend aus dem Kettenstücke MC und der darüber befindlichen Erdmasse $ONMC$, die zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes erforderlichen Kräfte hinzugefügt zu denken.

Fig. 452.



In § 102 wurde für den horizontalen Erd-Druck gegen eine verticale Rechteckfläche von der Länge Eins und der Höhe h die Gleichung gefunden:

$$1)\quad D = \frac{\gamma h^2}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ \mp \frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

in welcher das Minuszeichen auf den Fall des activen und das Pluszeichen auf den Fall des passiven Erd-Druckes sich bezieht. Wenn man hierin (wie bei den vorigen Fällen schon geschehen) wieder $\gamma = 1$ und zugleich abkürzungsweise:

$$2)\quad \operatorname{tg}\left(45^\circ \mp \frac{\varphi}{2}\right)^2 = m$$

setzt, so ergeben sich für die gegen die Seitenflächen NM und OC wirkenden horizontalen Erd-Drücke die in Fig. 453 angegebenen Ausdrücke, und man erhält, indem man für den Körper $ONMC$ die Gleichgewichtsbedingungen aufstellt, die Gleichungen:

Fig. 453.

$$3)\quad H = H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2),$$

$$4)\quad V = \int y\,dx.$$

Für den Neigungswinkel α, welchen die Tangentenrichtung der Kettenlinie an der Stelle M mit der Horizontalen einschliesst, erhält man ferner nach Fig. 453 die Gleichung:

$$5)\quad H \operatorname{tg}\alpha = V,$$

und wenn man hierin abkürzungsweise $\operatorname{tg}\alpha = u$ setzt, so nimmt dieselbe nach Substitution der oben für H und V angegebenen Werthe die Form an:

$$6)\quad \left\{H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2)\right\} u = \int y\,dx.$$

Indem man diese Gleichung nach u differenziirt, gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$7)\quad H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2) - muy\,\frac{dy}{du} = y.\frac{dx}{du}.$$

Die Bedeutung der Grösse u kann nach der oben gegebenen Definition ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$8)\quad u = \frac{dy}{dx}, \qquad 9)\quad \frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Hiernach kann man der vorhergehenden Gleichung, indem man darin $u\,dx$ statt dy setzt, auch die folgende Form geben:

$$10)\quad H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2) - m u^2 y \frac{dx}{du} = y \frac{dx}{du}, \quad \text{oder:}$$

$$11)\quad \frac{du}{dx} = \frac{y(1 + m u^2)}{H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2)} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Wenn man diese letztere Gleichung zunächst mit der Grösse $u\,dx = dy$ multiplicirt und nachher die Integration derselben ausführt (bei welcher zu berücksichtigen ist, dass für $x = 0$ auch $u = 0$ wird), so gelangt man successive zu den nachstehenden Gleichungen:

$$12)\quad u\,du = \frac{y\,dy\,(1 + m u^2)}{H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2)}, \quad \text{oder:}$$

$$13)\quad \frac{2 m u\,du}{1 + m u^2} = \frac{2 m y\,dy}{H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2)},$$

$$14)\quad \lg(1 + m u^2) = -2 \lg \left\{ H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2) \right\} + \text{Const.},$$

$$15)\quad 0 = -2 \lg H_0 + \text{Const.},$$

$$16)\quad \lg(1 + m u^2) = 2 \lg \left\{ \frac{H_0}{H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2)} \right\}.$$

Dieser letzteren Gleichung kann man, indem man wieder $\operatorname{tg}\alpha$ statt u setzt, auch die folgende Form geben:

$$17)\quad 1 + m \operatorname{tg}\alpha^2 = \left\{ \frac{H_0}{H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2)} \right\}^2, \quad \text{oder:}$$

$$18)\quad H_0 - \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + m \operatorname{tg}\alpha^2}},$$

und wen mann dieselbe alsdann für y auflöst, so erhält man die Gleichung:

$$19)\quad y = \sqrt{y_0^2 + \frac{2 H_0}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + m \operatorname{tg}\alpha^2}}\right)}.$$

Indem man ferner den in Gleichung 18) gefundenen Ausdruck für den Nenner in Gleichung 11) substituirt (und darin zugleich ebenfalls $\operatorname{tg}\alpha$ statt u setzt), findet man für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ den Werth:

$$20) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(1+m\operatorname{tg}\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{H_0}.$$

Nach § 119 (Gleichung 7) kann nunmehr der Krümmungshalbmesser der Stützlinie berechnet werden aus der Gleichung:

$$21) \quad \varrho = \frac{H_0}{\cos\alpha^3 y(1+m\operatorname{tg}\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

aus welcher (wie in § 119) für den Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte der Werth sich ergiebt:

$$22) \quad R = \frac{H_0}{y_0}.$$

Wenn man also (wie in § 119) das Verhältniss $\frac{R}{y_0}$ wieder mit A bezeichnet, so ist $H_0 = Ay_0^2$ zu setzen, und nach Gleichung 19) wird:

$$23) \quad y = y_0 \sqrt{1 + \frac{2A}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+m\operatorname{tg}\alpha^2)}}\right)}.$$

Nach Substitution dieser Werthe erhält man für den Krümmungshalbmesser die folgende Gleichung:

$$24) \quad \varrho = \frac{Ay_0}{\cos\alpha^3 \sqrt{(1+m\operatorname{tg}\alpha^2)^3 \left\{1 + \frac{2A}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+m\operatorname{tg}\alpha^2}}\right)\right\}}}.$$

Nach Gleichung 2) entspricht (für den Fall des activen Erddruckes) dem Werthe $\varphi = 36° 40'$ der Werth $m = \frac{1}{4}$, und nach Substitution desselben erhält man z. B. für $A = 0{,}1$ die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

α =	0°	30°	45°	60°	90°
$\frac{y}{y_0}$ =	1	1,015	1,041	1,093	1,342
$\frac{\varrho}{y_0}$ =	0,1	0,134	0,194	0,316	0,596.

Wenn man ein anderes Mal $A = 3$ $\left(\text{und wiederum } m = \frac{1}{4}\right)$ setzt, so ergeben sich die folgenden Werthe:

α =	0°	30°	45°	60°	90°
$\frac{y}{y_0}$ =	1	1,393	1,880	2,618	5
$\frac{\varrho}{y_0}$ =	3	2,940	3,23	3,96	4,8.

Jedoch ist hinsichtlich dieser letzteren Zahlenwerthe zu berücksichtigen, dass der Einfluss des Fehlers, welchen man begeht, indem man das eigene

Gewicht der Kette vernachlässigt, sich um so mehr bemerkbar machen wird, je grösser die Verhältnisszahl $A = \frac{R}{y_0}$ ist; dass also einigermassen genaue Resultate bei der obigen Berechnungsweise nur dann zu erwarten sind, wenn diese Verhältnisszahl einen sehr kleinen Werth hat.

Um die oben berechnete Stützlinie annäherungsweise aus Kreisbögen zu construiren, würde man wiederum das in § 123 erklärte Verfahren anzuwenden haben. Auf analoge Weise würde man aus den obigen Gleichungen, indem man darin $m = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)^2$ setzt, die Gleichgewichtsform der Kette für passiven Erddruck, und indem man $m = 1$ setzt, die Gleichgewichtsform der Kette für Wasserdruck berechnen können.

§ 136.

Hängende gewichtlose Kette mit Erdbelastung.

Wenn bei der mit Erde belasteten Kette die concave Seite statt der convexen nach oben gewendet ist, so treten Zug-Spannungen an die Stelle der Druck-Spannungen (Fig. 454 und Fig. 455). In Folge dessen hat man für diesen Fall in den Gleichungen des vorigen Paragraphen die Grösse $+H$ zu vertauschen mit der Grösse $-H$ (ebenso $+H_0$ mit $-H_0$). Die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen nimmt also für diesen Fall die folgende Form an:

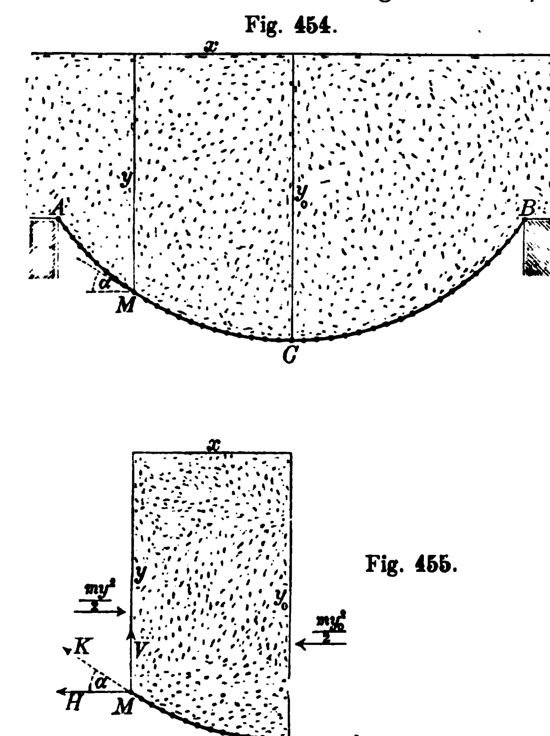


Fig. 454.

Fig. 455.

$$1)\quad H = H_0 + \frac{m}{2}(y^2 - y_0^2).$$

Ausserdem hat man die (im vorigen Paragraphen mit u bezeichnete) Grösse $\operatorname{tg}\alpha$ in diesem Falle

gleich $-\frac{dy}{dx}$ (statt gleich $+\frac{dy}{dx}$) zu setzen, und wenn man mit Berücksichtigung dieser Aenderungen die Rechnung des vorigen Paragraphen wiederholt, so erhält man statt der Gleichungen 23) und 24) resp. die folgenden Gleichungen:

$$2)\quad y = y_0 \sqrt{1 - \frac{2A}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + m \operatorname{tg} \alpha^2}}\right)},$$

$$3)\quad \varrho = \frac{A y_0}{\cos \alpha^2 \sqrt{(1 + m \operatorname{tg} \alpha^2)^3 \left\{1 - \frac{2A}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + m \operatorname{tg} \alpha^2}}\right)\right\}}},$$

während die Gleichungen 21) und 22) des vorigen Paragraphen auch für diesen Fall ihre Gültigkeit behalten.

Wenn man hierin (wie im vorigen Paragraphen) wieder $m = \frac{1}{4}$ setzt, so erhält man z. B. für $A = 0{,}1$ die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°
$\frac{y}{y_0} =$	1	0,984	0,957	0,897	0,447
$\frac{\varrho}{y_0} =$	0,1	0,139	0,212	0,385	1,790.

§ 137.

Stützlinie für Wasserdruck.

Für Wasserdruck ist der natürliche Böschungswinkel φ gleich Null zu setzen, und aus der Gleichung 2) des § 135 ergiebt sich für diesen Fall der Werth $m = 1$. Hiernach nehmen die Gleichungen 3), 21), 23), 24) des § 135 für den Fall des Wasserdruckes resp. die folgenden Formen an:

$$1)\quad H = H_0 - \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2),$$

$$2)\quad \varrho y = R y_0 = A y_0^2,$$

$$3)\quad y = y_0 \sqrt{1 + 2A(1 - \cos\alpha)},$$

$$4)\quad \varrho = \frac{A y_0}{\sqrt{1 + 2A(1 - \cos\alpha)}}.$$

Die Gleichung 2) zeigt, dass das Product aus dem Krümmungshalbmesser der Stützlinie an einer bestimmten Stelle in den

Abstand derselben vom Wasserspiegel in allen Punkten der Stützlinie dieselbe Grösse hat.

Nach Fig. 452 hat die in der Kette stattfindende Druck-Spannung an der Stelle M die Grösse:

$$5)\quad K = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{H_0 - \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2)}{\cos\alpha},$$

und wenn man hierin für $\cos\alpha$ den aus der Gleichung 3) zu entnehmenden Werth einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$6)\quad K = H_0 = Ay_0^2,$$

welche zeigt, dass diese Druck-Spannung ebenfalls in allen Punkten der Stützlinie dieselbe Grösse hat und jenem Producte ϱy gleich ist. Die von den festen Unterstützungspunkten der Kette geleisteten Gegendrücke haben also ebenfalls die Grösse:

$$7)\quad W = H_0 = Ry_0 = Ay_0^2.$$

Um den Krümmungshalbmesser der Evolute zu berechnen, hat man (wie in § 122 gezeigt wurde) den Differenzialquotienten von ϱ nach α zu bilden, und erhält nach Gleichung 4) den Ausdruck:

$$8)\quad \frac{d\varrho}{d\alpha} = -A^2 y_0 \sin\alpha \left\{1 + 2A(1 - \cos\alpha)\right\}^{-\frac{3}{2}},$$

welcher nach Substitution des für den letzteren Factor aus Gleichung 4) zu entnehmenden Werthes die folgende Form annimmt:

$$9)\quad \frac{d\varrho}{d\alpha} = -\frac{\varrho^3 \sin\alpha}{Ay_0^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Eckpunkte der Evolute den Werthen $\alpha = 0$, sowie den Werthen $\alpha = +180^\circ$ und $\alpha = -180^\circ$ entsprechen.

Aus den Gleichungen 3) und 4) erhält man z. B. für $A = 1$ und $y_0 = 1$ die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\alpha =$	0°	60°	90°	120°	180°
$y =$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
$\varrho =$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Um die zugehörigen Werthe der Abscisse x zu erhalten, würde man die Stützlinie aus Kreisbogen-Elementen zusammengesetzt sich

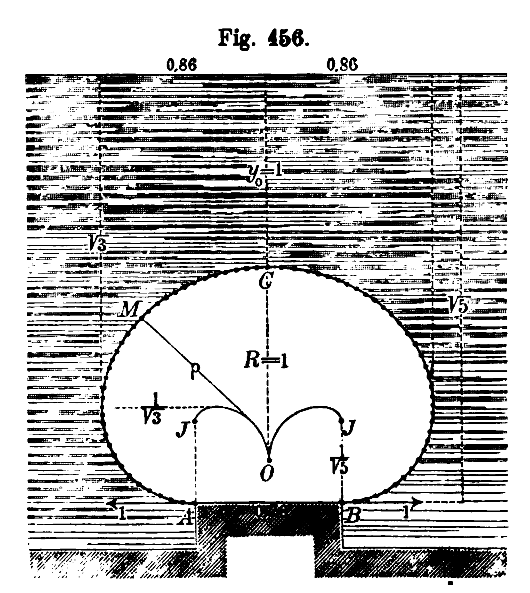
zu denken und die Horizontal-Projectionen dieser Kreisbögen zu summiren haben. Denn nach Fig. **452** ist $dx = \varrho\, d\alpha \,.\, \cos\alpha$ zu setzen, also:

$$10)\quad x = \int \varrho\, d\alpha \,.\, \cos\alpha = \int \varrho \,.\, d\,(\sin\alpha).$$

Wenn mit $R_1, R_2, R_3 \ldots$ die Halbmesser jener Kreisbogen-Elemente und mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Winkel bezeichnet werden, welche an den Endpunkten jener Kreisbogen die Tangentenrichtungen mit der Horizontalen einschliessen, so kann man die Grösse x annäherungsweise auch berechnen aus der Gleichung:

$$11)\quad x = R_1 \sin\alpha_1 + R_2 (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) + R_3 (\sin\alpha_3 - \sin\alpha_2) + \ldots,$$

Fig. **456**.



welche um so genauere Resultate liefern wird, je kleiner die jenen Kreisbogen-Elementen entsprechenden Winkel α_1, $(\alpha_2 - \alpha_1)$, $(\alpha_3 - \alpha_2) \ldots$ gewählt werden. (Vergleiche Fig. **420**.)

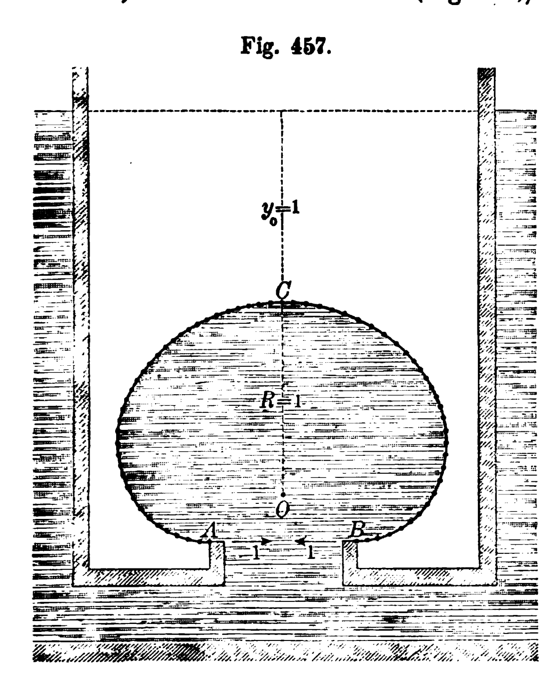
Als Halbmesser eines jeden solchen Kreisbogens kann man das arithmetische Mittel der beiden Werthe von ϱ wählen, welche den Endpunkten des Bogens entsprechen. Bei Anwendung dieser Berechnungsmethode erhält man für den oben angenommenen Fall die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\alpha =$	0°	60°	90°	120°	180°
$\frac{x}{y_0} =$	0	0,77	0,86	0,79	0,39.

Die Form der Kettenlinie und die Evolute derselben nebst ihren drei Eckpunkten J, O, J sind in Fig. **456** dargestellt.

Wenn das Wasser gegen die concave (anstatt gegen die convexe) Seite der Kette drückt (Fig. 457), so bleibt die Gleichgewichtsform der Kette dieselbe; die überall gleich grosse Spannung der Kette wird in diesem Falle eine Zug-Spannung von der Grösse $y_0^2 = 1$, während bei dem vorigen Falle die Spannung der Kette eine Druck - Spannung von derselben Grösse war. Da als Krafteinheit das Gewicht des Belastungsmaterials pro Cubikeinheit gewählt wurde, und 1 Cubikmeter Wasser 1000 Kil. wiegt, so wird demnach für den Fall, in welchem die Länge eines Meters die Längeneinheit bildet, die Spannung der Kette (sowie auch der Widerstand jedes der beiden Unterstützungspunkte) 1000 Kil. betragen.

Fig. 457.



§ 138.

Hängende gewichtlose Kette mit Wasser-Belastung.

Um die Gleichgewichtsform der hängenden Kette zu finden, hat man in den Gleichungen des § 136 ebenfalls überall $m = 1$ zu setzen; man erhält dann für diesen Fall die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad H = H_0 + \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2),$$

$$2)\quad \varrho y = R y_0,$$

$$3)\quad y = y_0 \sqrt{1 - 2A(1 - \cos\alpha)},$$

$$4)\quad \varrho = \frac{A y_0}{\sqrt{1 - 2A(1 - \cos\alpha)}}.$$

Ausserdem behalten die Gleichungen 6) und 11) des vorigen Paragraphen auch für diesen Fall ihre Gültigkeit. Die Spannung der Kette ist also eine überall gleich grosse Zug-Spannung von der Grösse Ay_0^2.

Fig. 458.

Wenn man $A = \frac{1}{5}$ und $y_0 = \sqrt{5}$ setzt, so erhält man aus den obigen Gleichungen die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\alpha =$	0°	60°	90°	120°	180°
$y =$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1
$\varrho =$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$x =$	0	0,40	0,47	0,38	—0,39,

aus welchen für die eine Hälfte der Kettenlinie dieselbe Form sich ergiebt, welche im vorigen Paragraphen für $A = 1$ und $y_0 = 1$ gefunden wurde (Fig. 457). Wenn man sich jedoch die Construction der Kettenlinie an jeder Seite nur bis zu dem Werthe $\alpha = 90°$ fortgesetzt denkt, so erhält man die in Fig. 458 dargestellte Form.

Fig. 459.

Wenn mit y_{90} und ϱ_{90} resp. die Werthe von y und ϱ bezeichnet werden, welche dem Werthe $\alpha = 90°$ entsprechen, so ist nach den Gleichungen 3) und 4):

$$5)\quad y_{90} = y_0 \sqrt{1 - 2A},$$

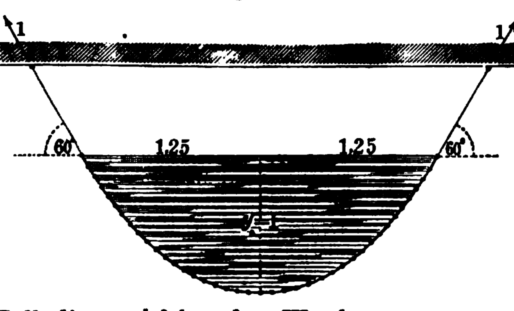
$$6)\quad \varrho_{90} = \frac{Ay_0}{\sqrt{1 - 2A}}.$$

Die vorletzte Gleichung zeigt, dass $A = \frac{1}{2}$ gesetzt werden muss, wenn y_{90} gleich Null sein soll, und die letztere zeigt, dass alsdann zugleich ϱ_{90} unendlich gross wird (Fig. 459). Für diesen Fall erhält man aus den oben gefundenen Gleichungen, indem man zugleich $y_0 = 1$ setzt, die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$\alpha = 0°$	$30°$	$60°$	$90°$
$y = 1$	0,93	0,707	0
$\varrho = 0,5$	0,537	0,707	∞
$x = 0$	0,255	0,47	0,6.

Auf analoge Weise ist der Fall zu behandeln, in welchem als Bedingung vorgeschrieben ist, dass die Grösse:

Fig. 460.



7) $y_{60} = y_0 \sqrt{1 - A}$

gleich Null werden soll (Fig. 460). Dieser Bedingung entspricht der Werth $A = 1$, und wenn zugleich wieder $y_0 = 1$ gesetzt wird, so ergeben sich für diesen Fall die nachfolgenden Werthe:

$\alpha = 0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$
$y = 1$	0,965	0,856	0,644	0
$\varrho = 1$	1,036	1,17	1,55	∞
$x = 0$	0,26	0,525	0,8	1,25.

Ebenso der Fall, in welchem als Bedingung vorgeschrieben ist, dass die Grösse:

Fig. 461.

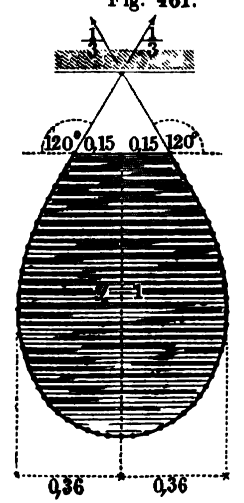
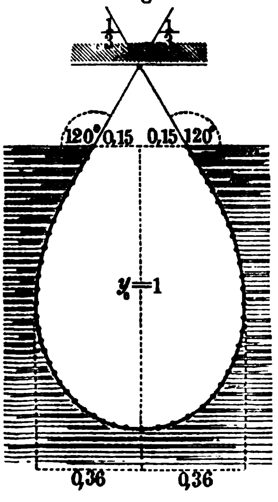


Fig. 462.



8) $y_{120} = y_0 \sqrt{1 - 3A}$

gleich Null sein soll (Fig. 461). Dieser Bedingung entspricht der Werth $A = \frac{1}{3}$ und wenn man zugleich wieder $y_0 = 1$ setzt, so erhält man die folgenden Werthe:

$\alpha =$	0°	30°	60°	99°	120°
$y =$	1	0,954	0,816	0,577	0
$\varrho =$	$\frac{1}{3}$	0,349	0,408	0,577	∞
$x =$	0	0,17	0,3	0,36	0,15.

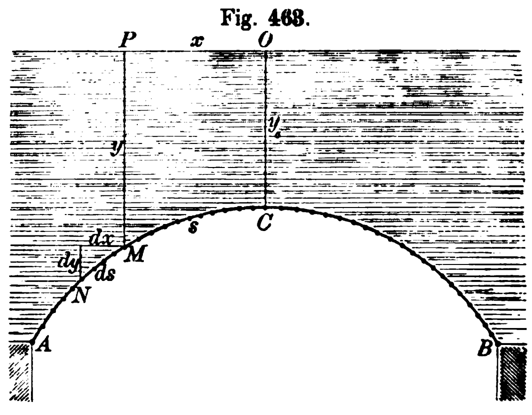
In allen diesen Fällen bleibt die Gleichgewichtsform dieselbe, wenn das Wasser gegen die convexe — anstatt gegen die concave — Seite der Kette drückt, in welchem Falle die Spannung der Kette wiederum eine Druckspannung wird (Fig. 462).

§ 139.

Kette mit Wasserdruck und mit eigenem Gewichte belastet.

Es wird vorausgesetzt, dass das eigene Gewicht der mit Wasserdruck belasteten Kette eine gleichförmig über die Bogenlänge derselben vertheilte Belastung bildet, von der Grösse q pro Längeneinheit (Fig. 463). Um die Gleichgewichtsform der Kette zu finden, hat man zunächst (auf dieselbe Weise wie in § 135) für den Theil $OPMC$ die algebraische Summe der Horizontalkräfte gleich Null zu setzen; man erhält dann nach Fig. 464 die Gleichung:

Fig. 463.



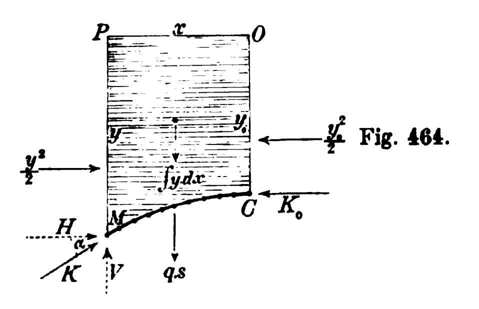


Fig. 464.

1) $H = K \cos \alpha = K_0 - \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2)$.

Für den Differenzialquotienten von H, nach y genommen, ergiebt sich aus dieser Gleichung der Werth:

2) $\frac{dH}{dy} = -y$.

Wenn man sich ferner bei dem in Fig. 465 dargestellten Bogen-Elemente MN eine jede der wirkenden Kräfte zerlegt denkt in zwei Seitenkräfte, von denen die eine tangential, die andere normal zu dem Bogen-Elemente gerichtet ist, so erhält man nach Fig. 466, indem man die algebraische Summe der tangential gerichteten Seitenkräfte gleich Null setzt, die Gleichung:

Fig. 465. Fig. 466.

$$3) \quad 0 = dK - q \, . \, ds \sin \alpha,$$

welcher man, da $ds \sin \alpha = dy$ ist, auch die folgende Form geben kann:

$$4) \quad dK = q\,dy.$$

Indem man diese Gleichung integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen K_0 und K, auf der rechten zwischen den Grenzen y_0 und y — erhält man für K die Gleichung:

$$5) \quad K = K_0 + q\,(y - y_0).$$

Nach Substitution dieses Werthes nimmt die Gleichung 1), für $\cos \alpha$ aufgelöst, die folgende Form an:

$$6) \quad \cos \alpha = \frac{H}{K} = \frac{K_0 - \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2)}{K_0 + q\,(y - y_0)}.$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um die Ordinate y als Function des Winkels α darzustellen; man erhält durch Auflösung derselben für y den Werth:

$$7) \quad y = -q \cos \alpha + \sqrt{(y_0 + q \cos \alpha)^2 + 2 K_0 (1 - \cos \alpha)}.$$

Wenn man (wie in § 135) die Grösse $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ wieder mit u bezeichnet, so ist $\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + u^2}$ zu setzen; folglich ist:

$$8) \quad 1 + u^2 = \frac{1}{\cos \alpha^2} = \left(\frac{K}{H}\right)^2.$$

Indem man diese Gleichung nach y differenziirt, gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$9) \quad \frac{u\,du}{dy} = \frac{K}{H^3}\left(H \frac{dK}{dy} - K \frac{dH}{dy}\right),$$

und wenn man hierin auf der linken Seite $u\,dx$ statt dy, auf der rechten Seite für die Differenzialquotienten die resp. aus den Gleichungen 2) und 4) zu entnehmenden Werthe substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$10)\quad \frac{du}{dx} = \frac{K}{H^3}(Hq + Ky) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Nach § 119 (Gleichung 7) kann nunmehr der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie berechnet werden aus der Gleichung:

$$11)\quad \frac{1}{\varrho} = \cos\alpha^3 . \frac{d^2y}{dx^2},$$

aus welcher man nach Substitution der in den Gleichungen 6) und 10) resp. für die Grössen $\cos\alpha$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefundenen Ausdrücke den folgenden Werth für ϱ erhält:

$$12)\quad \varrho = \frac{K^2}{Hq + Ky}.$$

Für $y = y_0$ wird $K = K_0$ und ebenso auch $H = K_0$. Der Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte hat also die Grösse:

$$13)\quad R = \frac{K_0}{q + y_0}.$$

Nach Substitution des aus dieser Gleichung für K_0 zu entnehmenden Werthes kann man den Gleichungen 1), 5), 11), 12), wenn das Verhältniss $\frac{q}{y_0} = n$ und zugleich wieder das Verhältniss $\frac{R}{y_0} = A$ gesetzt wird, resp. die folgenden Formen geben:

$$14)\quad H = y_0^2\left\{A(n+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)\right\},$$

$$15)\quad K = y_0^2\left\{A(n+1) + n\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)\right\},$$

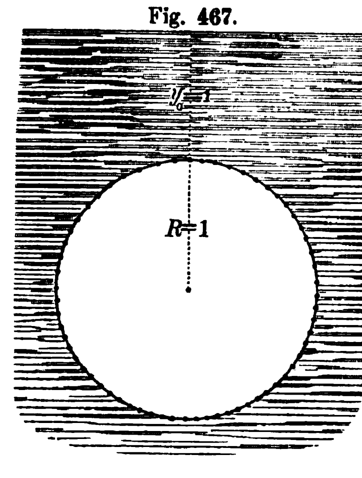
$$16)\quad y = y_0\left\{-n\cos\alpha + \sqrt{(1 + n\cos\alpha)^2 + 2A(n+1)(1-\cos\alpha)}\right\},$$

$$17)\quad \varrho = \frac{K^2}{Hny_0 + Ky}.$$

Aus Gleichung 16) kann man für jeden willkürlich gewählten Werth von α den zugehörigen Werth von y berechnen. Hiernach findet man aus den Gleichungen 14) und 15) die entsprechenden Werthe von H und K, worauf dann der zugehörige Krümmungshalbmesser aus Gleichung 17) berechnet werden kann.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich für $A = 1$ und $n = \frac{1}{2}$, wenn zugleich $y_0 = 1$ gesetzt wird, die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

Fig. 467.



$\alpha =$	0°	90°	180°
$y =$	1	2	3
$H =$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
$K =$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$\varrho =$	1	1	1.

Die Kette bildet also in diesem Falle eine geschlossene Kreislinie vom Halbmesser $R = 1$ und befindet sich (ohne der Widerstände fester Unterstützungspunkte zu bedürfen) im schwimmenden Gleichgewichtszustande (Fig. 467).

Für $n = 0$ erhält man aus den obigen Gleichungen wiederum dieselben Resultate, welche in § 137 für die gewichtlose Kette gefunden wurden.

§ 140.

Hängende Kette mit eigenem Gewichte und Wasser belastet.

Bei dem in Fig. 468 dargestellten Falle hat man (wie in § 138) die im vorigen Paragraphen mit u bezeichnete Grösse $\operatorname{tg} \alpha$ wieder gleich $-\frac{dy}{dx}$ zu setzen (ebenso $ds \cdot \sin \alpha = - dy$). Die Gleichungen 4) und 5) des vorigen Paragraphen nehmen also für diesen Fall die folgenden Formen an:

$$1)\quad dK = - q \cdot dy,$$

$$2)\quad K = K_0 - q\,(y - y_0).$$

Nach Fig. 469 erhält man ferner statt der Gleichungen 1) und 2) des vorigen Paragraphen für diesen Fall die Gleichungen:

$$3)\quad H = K_0 + \frac{1}{2}\,(y^2 - y_0^2),$$

$$4)\quad \frac{dH}{dy} = + y,$$

und wenn man mit Berücksichtigung dieser Aenderungen die Rechnung auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen fortsetzt, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

5) $y = y_0 \{ -n \cos\alpha + \sqrt{(1+n\cos\alpha)^2 - 2A(1+n)(1-\cos\alpha)} \}$,

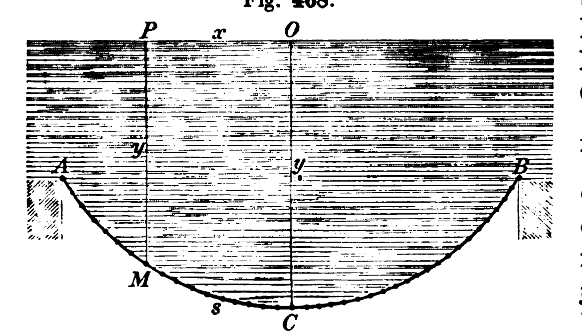
6) $H = y_0^2 \left\{ A(1+n) + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)\right\}$,

7) $K = y_0^2 \left\{ A(1+n) - n\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)\right\}$,

8) $\varrho = \frac{K^2}{Hny_0 + Ky}$.

Diese Gleichungen würde man benutzen können, um bei den verschiedenen in § 138 untersuchten Fällen die wegen des zu berücksichtigenden Eigengewichtes der Kette erforderlichen Correctionen auszuführen. Für $n = \frac{1}{2}$ erhält man aus Gleichung 5), indem man zugleich wieder $y_0 = 1$ setzt, den Werth:

Fig. 468.



9) $y_{90} = \sqrt{1 - 3A}$.

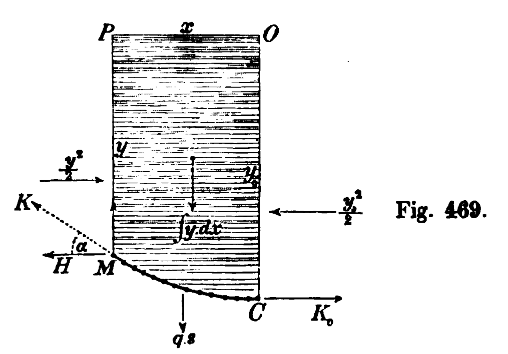


Fig. 469.

Diese Gleichung zeigt, dass $A = \frac{1}{3}$ zu setzen ist, wenn die Ordinate y_{90} gleich Null werden soll (dem in Fig. 459 dargestellten Falle entsprechend). Für diesen Fall ergeben sich aus den obigen Gleichungen die folgenden Werthe:

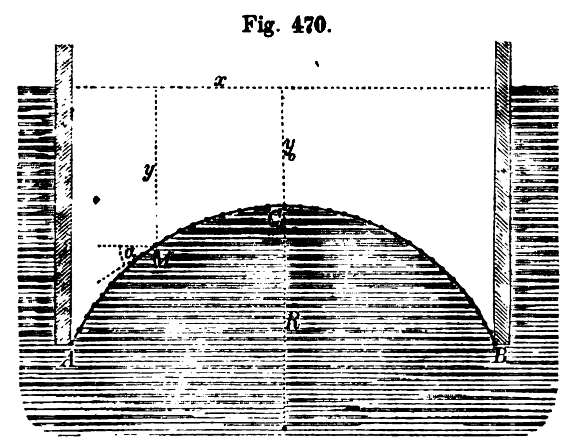
$\alpha =$	0°	30°	60°	90°
$y =$	1	0,952	0,781	0
$H =$	$\frac{1}{2}$	0,454	0,305	0
$K =$	$\frac{1}{2}$	0,524	0,610	1
$\varrho =$	$\frac{1}{3}$	0,335	0,590	∞.

§ 141.

Kette mit Wasserdruck von unten.

Denkt man sich in Fig. 463 an jedem Bogen-Elemente der Kette die Richtung des Wasserdruckes in die entgegengesetzte verwandelt, so gelangt man zu dem in Fig. 470 dargestellten Falle, bei welchem das Wasser von unten gegen die Kette drückt. Um die Gleichgewichtsform der Kette für diesen Fall zu finden, hat man demnach in den Gleichungen des § 139 überall diejenigen Glieder, welche die Wasserdrücke repräsentiren, mit „minus Eins“ zu multipliciren. Statt der Gleichungen 1) und 2) des § 139 erhält man alsdann die folgenden Gleichungen:

Fig. 470.



$$1)\quad H = K_0 + \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2),$$

$$2)\quad \frac{dH}{dy} = + y,$$

während die Gleichungen 4) und 5) des § 139 ihre Gültigkeit beibehalten.

Wenn man mit Berücksichtigung dieser Aenderung die Rechnung auf dieselbe Weise wie in § 139 fortsetzt, so erhält man für y und ϱ resp. die Gleichungen:

$$3)\quad y = q\cos\alpha \pm \sqrt{(y_0 - q\cos\alpha)^2 - 2K_0(1-\cos\alpha)},$$

$$4)\quad \varrho = \frac{K^2}{Hq - Ky}.$$

Aus der letzteren Gleichung ergiebt sich für den Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte der Werth:

$$5)\quad R = \frac{K_0}{q - y_0},$$

und mit Benutzung des aus dieser Gleichung für die Grösse K_0 zu entnehmenden Ausdruckes:

$$6)\quad K_0 = R(q - y_0) = Ay_0^2(n-1)$$

erhält man statt der Gleichungen 16), 14), 15), 17) des § 139 für den vorliegenden Fall resp. die folgenden Gleichungen:

$$7)\quad y = y_0\left\{n\cos\alpha \pm \sqrt{(1-n\cos\alpha)^2 - 2A(n-1)(1-\cos\alpha)}\right\},$$

$$8)\quad H = y_0^2\left\{A(n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)\right\},$$

$$9)\quad K = y_0^2\left\{A(n-1) + n\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)\right\},$$

$$10)\quad \varrho = \frac{K^2}{Hny_0 - Ky}.$$

Die Gleichung 6) zeigt, dass K_0 positiv ist, sobald n grösser ist als Eins, und die Gleichung 9) zeigt, dass in diesem Falle auch die Kraft K überall positiv ist. Die Spannung der Kette wird daher an allen Stellen eine Druck-Spannung sein, wenn q grösser ist als y_0, d. h. wenn das Gewicht der Kette pro Längeneinheit grösser ist als das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe y_0 und vom Querschnitte gleich der Flächeneinheit.

Für $A = 2$ und $n = 2$ nimmt die Gleichung 7), wenn darin wiederum $y_0 = 1$ gesetzt wird, die folgende Form an:

$$11)\quad y = 2\cos\alpha \pm \sqrt{(1 - 2\cos\alpha)^2 - 4(1-\cos\alpha)},$$

und wenn hierin der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null gesetzt wird, so ergiebt sich der Werth:

$$12)\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \text{oder:} \quad \alpha = 30^\circ.$$

Man erkennt aus Gleichung 11), dass y imaginär wird, wenn $\cos\alpha$ kleiner ist als $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, d. h. wenn α grösser ist als 30°. Hieraus folgt, dass bei dem hier angenommenen Falle die Tan-

gentenrichtung der Kettenlinie an keiner Stelle mit der Horizontalen einen Winkel einschliessen kann, welcher grösser ist als 30°.

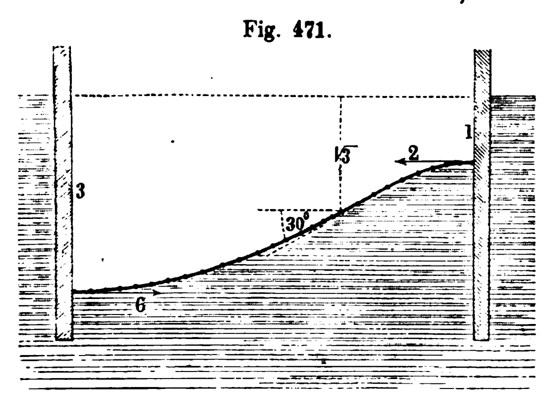


Fig. 471.

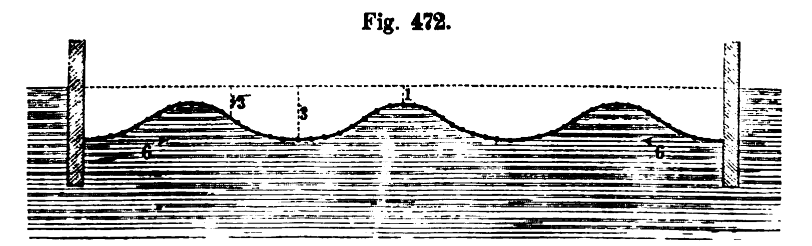
Zugleich ergiebt sich aus Gleichung 11), dass jedem kleineren Werthe des Winkels α immer zwei verschiedene Werthe von y entsprechen, während dem Werthe $\alpha = 30°$ selbst nur ein Werth von y entspricht, nämlich der Werth: $y = \sqrt{3}$.

Für den hier angenommenen Fall erhält man aus den oben gefundenen Gleichungen die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$y =$	1	1,0763	$\sqrt{3}$	2,787	3
$\alpha =$	0°	15°	30°	15°	0°
$H =$	2	2,079	3	5,362	6
$K =$	2	2,153	$2\sqrt{3}$	5,575	6
$\varrho =$	+2	+2,515	∞	−6,3	−6.

Die eine Hälfte der Kettenlinie (entsprechend den Ordinaten von $y = 1$ bis $y = 3$) nimmt hiernach die in Fig. 471 dargestellte Form an, bei welcher die Enden der Kette an feste verticale Wände mit Horizontaldruck sich anlehnen, und wenn man sich die Construction der Linie nach beiden Seiten hin weiter fortgesetzt denkt, so erhält man die in Fig. 472 dargestellte wellenförmige Linie,

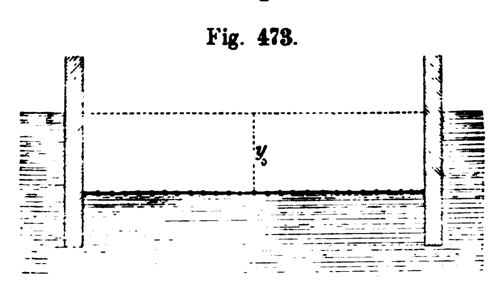
Fig. 472.



für deren Wellen eine um so kleinere Höhe sich ergeben wird, je mehr die Zahl n dem Grenzwerthe 1 sich nähert. Für $n = 1$

wird die Höhe der Wellen gleich Null, und die Wellenlinie geht in eine horizontale gerade Linie über (Fig. 473).

Fig. 473.



Wenn n kleiner ist als Eins, so wird die Druck-Spannung K negativ, d. h. die Druck-Spannung geht über in eine Zug-Spannung. Man kann daher für diesen Fall den Gleichungen 6)... 10), indem man $-K$ statt $+K$ setzt (ebenso $-K_0$ statt $+K_0$ und $-H$ statt $+H$), auch die folgenden Formen geben:

$$13)\quad K_0 = R(y_0 - q) = Ay_0^2(1-n),$$

$$14)\quad y = y_0\{n\cos\alpha + \sqrt{(1-n\cos\alpha)^2 + 2A(1-n)(1-\cos\alpha)}\},$$

$$15)\quad H = y_0^2\left\{A(1-n) - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)\right\},$$

$$16)\quad K = y_0^2\left\{A(1-n) - n\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)\right\},$$

$$17)\quad \varrho = \frac{K^2}{Ky - Hny_0},$$

in welchen die Grössen K und K_0 nunmehr Zug-Spannungen bedeuten.

Für $n = \frac{1}{2}$ und $A = 1$ erhält man aus diesen Gleichungen, indem man zugleich wieder $y_0 = 1$ setzt, die folgenden Werthe:

$\alpha =$	0°	90°	180°
$y =$	1	$\sqrt{2}$	1,562
$H =$	$\frac{1}{2}$	0	− 0,219
$K =$	$\frac{1}{2}$	0,293	0,219
$\varrho =$	1	0,207	0,106,

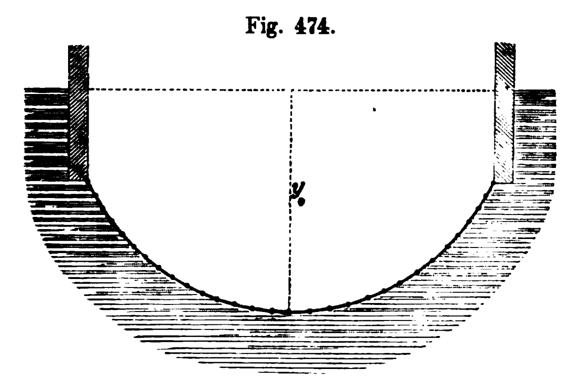
nach welchen für den in Fig. 457 dargestellten Fall die Kettenlinie zu construiren sein würde, wenn das eigene Gewicht der Kette mit berücksichtigt werden soll.

§ 142.

Hängende Kette mit Wasserdruck von unten.

Wenn man sich in Fig. 468 ebenfalls die Richtungen der Wasserdrücke gegen die Kette in die entgegengesetzten verwandelt denkt und demgemäss in den Rechnungen, welche zu den Gleichungen des § 140 führten, diejenigen Glieder, welche die Wasserdrücke repräsentiren, überall mit „minus Eins" multiplicirt, so erhält man für den in Fig. 474 dargestellten Fall die folgenden Gleichungen:

Fig. 474.



1) $y = y_0 \{n \cos\alpha \pm \sqrt{(1 - n\cos\alpha)^2 + 2A(n-1)(1-\cos\alpha)}\}$,

2) $H = y_0^2 \left\{A(n-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)\right\}$,

3) $K = y_0^2 \left\{A(n-1) - n\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)\right\}$,

4) $\varrho = \frac{K^2}{Hny_0 - Ky}$.

Die Gleichung 3) zeigt, dass die Zug-Spannung K überall positiv wird, sobald $n > 1$ oder $q > y_0$. Wenn man beispielsweise $n = 2$ und $A = 1$ setzt, so erhält man aus den obigen Gleichungen (indem man zugleich wieder $y_0 = 1$ setzt) die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$\alpha =$	0°	30°	60°
$y =$	1	0,835	0
$H =$	1	1,151	1,5
$K =$	1	1,329	3
$\varrho =$	1	1,482	3.

Die Kettenlinie nimmt demnach für diesen Fall (in ihrem unterhalb des Wasserspiegels befindlichen Theile) eine der in

Fig. 460 dargestellten Kettenlinie ähnliche Form an, insofern die Tangentenrichtung der Kettenlinie in der Höhe des Wasserspiegels hier ebenfalls einen Winkel von 60° mit der Horizontalen einschliesst. Oberhalb des Wasserspiegels geht die Kettenlinie über in eine gemeine Kettenlinie von der Horizontalspannung 1,5 (vergl. § 126).

Wenn man in Gleichung 1) das Pluszeichen vor dem Wurzelausdrucke gelten lässt, so führen die obigen Gleichungen für $n = 1$ wieder zu dem in Fig. 473 dargestellten Falle der geradlinigen horizontalen Kettenlinie. Wenn man dagegen das Minuszeichen gelten lässt, so erhält man für diesen Fall, indem man zugleich wieder $y_0 = 1$ setzt, die folgenden Gleichungen:

$$y = 2 \cos \alpha - 1, \qquad H = \frac{1 - y^2}{2},$$

$$\varrho = 2, \qquad K = 1 - y.$$

Der unterhalb des Wasserspiegels befindliche Theil der Kettenlinie nimmt also in diesem Falle die Form eines Kreisbogens an, dessen Halbmesser gleich 2 ist, und dessen Centriwinkel 120 Grad beträgt. Da $K = 0$ wird für $y = 1$, so würde in diesem Falle die Kette im Scheitelpunkte durchschnitten werden können, ohne dass dadurch der Gleichgewichtszustand gestört würde.

Wenn n kleiner ist als Eins, so wird die Zug-Spannung K negativ, d. h. die Zug-Spannung geht über in eine Druck-Spannung. Man kann daher für diesen Fall den obigen Gleichungen, indem man darin $-K$ statt $+K$ (ebenso $-H$ statt $+H$) setzt, auch die folgenden Formen geben:

$$5) \quad y = y_0 \{n \cos \alpha \pm \sqrt{(1 - n \cos \alpha)^2 - 2A(1 - n)(1 - \cos \alpha)}\},$$

$$6) \quad H = y_0^2 \left\{A(1 - n) + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)\right\},$$

$$7) \quad K = y_0^2 \left\{A(1 - n) + n\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)\right\},$$

$$8) \quad \varrho = \frac{K^2}{Ky - Hny_0},$$

in welchen die Grösse K nunmehr wieder eine Druck-Spannung bedeutet.

Für $n = \frac{2}{3}$ und $A = 2$ erhält man aus diesen Gleichungen, indem man zugleich $y_0 = 3$ setzt, die Werthe:

$y = 3$	2,787	$\sqrt{3}$	1,0763	1
$\alpha = 0°$	15°	30°	15°	0°
$H = 6$	5,362	3	2,079	2
$K = 6$	5,575	$2\sqrt{3}$	2,153	2
$\varrho = 6$	6,3	∞	— 2,515	— 2.

Diese Zahlenwerthe entsprechen derselben wellenförmigen Linie (Fig. 472), welche im vorigen Paragraphen bereits für den dort angenommenen Fall $A = 2$, $n = 2$ und $y_0 = 1$ gefunden wurde.

Für $n = \frac{1}{6}$ und $A = \frac{1}{3}$ ergeben sich aus den obigen Gleichungen, wenn darin zugleich $y_0 = 3$ gesetzt wird, die Werthe:

$\alpha =$	0°	90°	180°
$y =$	3	2	1
$H =$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
$K =$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$
$\varrho =$	1	1	1.

Man erhält also für diesen Fall wiederum eine geschlossene Kreislinie, und zwar dieselbe Kreislinie (Fig. 467), welche in § 139 für den dort angenommenen Fall $n = \frac{1}{2}$, $A = 1$ und $y_0 = 1$ gefunden wurde.

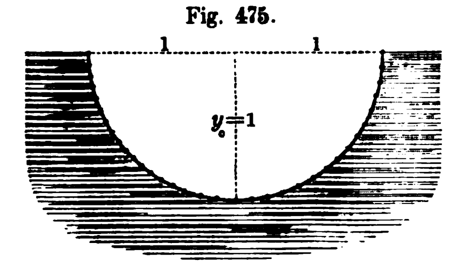
Wenn man $n = \frac{1}{2}$ und $A = 1$ setzt, so nehmen die obigen Gleichungen für $y_0 = 1$ die folgenden Formen an:

$$y = \cos\alpha, \qquad H = \frac{1}{2}\cos\alpha^2,$$

$$\varrho = 1, \qquad K = \frac{1}{2}\cos\alpha,$$

und zeigen, dass die Kettenlinie in diesem Falle eine Halbkreislinie bildet, deren Mittelpunkt in der Wasserspiegel-Ebene liegt (Fig. 475). Da ferner $K = 0$ wird für $\alpha = 90°$, so befindet sich diese halbkreisförmige Kette, ohne der Widerstände fester Unterstützungspunkte zu bedürfen, im schwimmenden Gleichgewichtszustande.

Fig. 475.



Die Gleichung 5) nimmt nach Substitution des Werthes $\alpha = 90^\circ$ die folgende Form an:

$$9)\quad y_{90} = \sqrt{1 - 2A(1-n)}.$$

Wenn als Bedingung vorgeschrieben ist, dass die Kettenlinie die Wasserspiegel-Ebene mit verticaler Tangentenrichtung schneiden soll, so ist $y_{90} = 0$ zu setzen, und man erhält die Bedingungsgleichung:

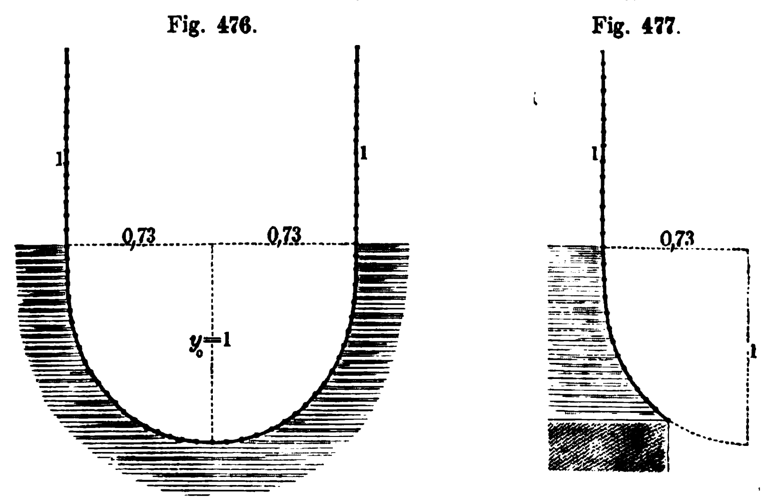
$$10)\quad A = \frac{1}{2(1-n)}.$$

Für $n = \frac{1}{4}$ würde hiernach $A = \frac{2}{3}$ zu setzen sein, und man erhält für diesen Fall aus den oben gefundenen Gleichungen, indem man zugleich wieder $y_0 = 1$ setzt, die folgenden Werthe:

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°
$y =$	1	0,909	0,797	0,6404	0
$H =$	$\frac{1}{2}$	0,4132	0,3177	0,205	0
$K =$	$\frac{1}{2}$	0,4773	0,4493	0,4101	$\frac{1}{4}$
$\varrho =$	$\frac{2}{3}$	0,690	0,724	0,796	∞.

Wenn man die Berechnung der Abscissen x nach der Gleichung 11) des § 137 ausführt, so findet man für x_{90} den Werth

Fig. 476. Fig. 477.



0,73. Da K_{90} gleich $\frac{1}{4}$, also gleich dem Gewichte eines Kettenstückes von der Länge Eins ist, so wird die Kette, ohne der

Widerstände fester Unterstützungspunkte zu bedürfen, im schwimmenden Gleichgewichtszustande sich befinden, wenn auf die in Fig. **476** dargestellte Weise an jedem Ende der Kette ein in verticaler Richtung über den Wasserspiegel emporragendes Stück von der Länge Eins hinzugefügt wird.

Da der Gleichgewichtszustand der Kette nicht gestört wird, wenn ein beliebiger Punkt derselben in einen festen Punkt verwandelt wird, so gelten die obigen Resultate auch für die in Fig. **477** dargestellte Kette, welche, an ihrem unteren Ende durch einen festen Punkt unterstützt, als ein Theil der vorigen zu betrachten ist.

Auf analoge Weise würde bei dem in Fig. **462** dargestellten Falle die wegen des zu berücksichtigenden Eigengewichtes der Kette erforderliche Correction auszuführen sein.

§ 143.

Kette von gleichem Widerstande mit Wasserdruck und eigenem Gewichte belastet.

Wenn der Querschnitt der Kette, und in Folge dessen auch das Gewicht pro Längeneinheit derselben, proportional der Kettenspannung sich ändert — wie es erforderlich sein würde, wenn die Spannung pro Flächeneinheit des Querschnittes überall dieselbe Grösse haben (die Kette also einen Körper von gleichem Widerstande bilden) soll — so ist (wie in § 129):

$$1)\quad \frac{q}{q_0} = \frac{K}{K_0}$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für q zu entnehmenden Werthes erhält man — statt der Gleichung 4) des § 139 — für diesen Fall die Gleichung:

$$2)\quad dK = \frac{q_0 K}{K_0} \cdot dy, \quad \text{oder:} \quad \frac{dK}{K} = \frac{q_0}{K_0} \cdot dy.$$

Indem man diese Gleichung integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen K_0 und K, auf der rechten zwischen den Grenzen y_0 und y — gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$3)\quad \lg\left(\frac{K}{K_0}\right) = \frac{q_0}{K_0}(y - y_0), \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad K = K_0 \,.\, e^{\frac{q_0}{K_0}(y - y_0)}.$$

Mit Benutzung des aus Gleichung 1) für q zu entnehmenden Werthes erhält man ferner (nach § 139, Gleichung 12) für den Krümmungshalbmesser die Gleichung:

$$5)\quad \varrho = \frac{K}{\frac{H}{K_0} q_0 + y},$$

aus welcher für den Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte der Werth sich ergiebt:

$$6)\quad R = \frac{K_0}{q_0 + y_0}.$$

Wenn man also wieder das Verhältniss $\frac{R}{y_0} = A$ und das Verhältniss $\frac{q_0}{y_0} = n$ setzt, so ist:

$$7)\quad K_0 = R\,(q_0 + y_0) = A y_0^2\,(n+1)$$

zu setzen, und für den in § 139 untersuchten Fall ergeben sich hiernach die folgenden Gleichungen:

$$8)\quad H = y_0^2 \left\{ A\,(n+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right)\right\},$$

$$9)\quad K = A y_0^2\,(n+1)\,.\,e^{\frac{n}{A(n+1)}\left(\frac{y}{y_0} - 1\right)},$$

$$10)\quad \cos\alpha = \frac{H}{K},$$

$$11)\quad \varrho = \frac{K}{\frac{Hn}{A\,(n+1)\,y_0} + y}.$$

Aus den ersteren beiden kann man für jeden willkürlich angenommenen Werth von y die zugehörigen Werthe von H und K berechnen, worauf dann aus der dritten der zugehörige Werth von α, und aus der vierten der zugehörige Werth von ϱ berechnet werden kann.

Wenn man $n = \frac{1}{2}$ und $A = 1$ setzt (wie bei dem in Fig. 467 dargestellten Falle), so nehmen die obigen Gleichungen für $y_0 = 1$ die folgenden Formen an:

$$12)\quad H = 2 - \frac{y^2}{2},$$

$$13)\quad K = \frac{3}{2}\,.\,e^{\frac{y-1}{3}},$$

$$14)\quad \cos\alpha = \left(\frac{4-y^2}{3}\right) . e^{\left(\frac{1-y}{3}\right)}$$

$$15)\quad \varrho = \frac{9 . e^{\left(\frac{y-1}{3}\right)}}{4-y^2+6y},$$

und es ergeben sich aus denselben die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Werthe:

$y =$	1	1,5	2	2,5	3
$H =$	1,5	0,875	0	— 1,125	— 2,5
$K =$	1,5	1,772	2,093	2,473	2,93
$\alpha =$	0°	60° 35′	90°	117° 5′	148° 35′
$\varrho =$	1	0,989	1,047	1,164	1,352.

Diesen Zahlenwerthen entspricht eine Linie, welche in ihrem oberen Theile (von $\alpha = 0°$ bis $\alpha = 90°$) eine nahezu halbkreisförmige Gestalt hat, während weiter nach unten hin der Krümmungshalbmesser allmählich sich vergrössert. Um denjenigen Werth von y zu finden, welchem der kleinste Krümmungshalbmesser entspricht, hat man in Gleichung 15) den Differenzialquotienten von ϱ, nach y genommen, gleich Null zu setzen. Man erhält dann eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$16)\quad 0 = y^2 - 12y + 14.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man den Werth $y = 1{,}3096$, welchem nach Gleichung 14) der Werth $\alpha = 46° 35'$, und nach Gleichung 15) der Werth $\varrho = 0{,}985$ entspricht.

Auf gleiche Weise erhält man für $n = 1$ und $A = 2$, indem man zugleich wieder $y_0 = 1$ setzt, die Gleichungen:

$$17)\quad H = \frac{9-y^2}{2},$$

$$18)\quad K = 4 . e^{\left(\frac{y-1}{4}\right)},$$

$$19)\quad \cos\alpha = \left(\frac{9-y^2}{8}\right) . e^{\left(\frac{1-y}{4}\right)},$$

$$20)\quad \varrho = \frac{32 . e^{\left(\frac{y-1}{4}\right)}}{9-y^2+8y},$$

aus welcher die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe sich ergeben:

$y =$	1	2	3	4	5
$H =$	4	2,5	0	— 3,5	— 8
$K =$	4	5,136	6,595	8,467	10,873
$\alpha =$	0°	60° 50′	90°	114° 25′	137° 25′
$\varrho =$	2	1,957	2,198	2,71	3,624

Derjenige Werth von y, für welchen der Krümmungshalbmesser ϱ ein Minimum wird, entspricht der Bedingungsgleichung:

$$21) \quad 0 = y^2 - 16 \cdot y + 23,$$

aus welcher man den Werth $y = 1,597$ erhält. Der zugehörige Winkel hat die Grösse $\alpha = 46° 20'$, und der zugehörige Krümmungshalbmesser die Grösse $\varrho = 1,93$. Den obigen Zahlenwerthen entspricht die in Fig. 478 dargestellte Kettenlinie.

Fig. 478.

Auf analoge Weise würde man für den im vorigen Paragraphen untersuchten Fall, wenn die Kette als Körper von gleichem Widerstande construirt ist, die Gleichungen erhalten:

$$22) \quad H = y_0^2 \left\{ A(1-n) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{y_0^2} - 1 \right) \right\},$$

$$23) \quad K = A(1-n)\, y_0^2 \cdot e^{\frac{n}{A(1-n)} \cdot \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right)},$$

$$24) \quad \cos \alpha = \frac{H}{K},$$

$$25) \quad \varrho = \frac{K}{y - \frac{Hn}{A(1-n)\, y_0}},$$

in welchen die Kraft K als Druck-Spannung zu deuten ist. Wenn man hierin $n = \frac{1}{2}$ und $A = 1$ setzt, wie bei dem in Fig. 475

dargestellten Falle, so nehmen diese Gleichungen für $y_0 = 1$ die folgenden Formen an:

$$26)\quad H = \frac{y^2}{2},$$

$$27)\quad K = \frac{1}{2} \cdot e^{(y-1)},$$

$$28)\quad \cos\alpha = y^2 \cdot e^{(1-y)}$$

$$29)\quad \varrho = \frac{e^{(y-1)}}{2y - y^2},$$

und es ergeben sich aus denselben die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$y =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$H =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	0
$K =$	0,5	0,389	0,303	0,236	0,184
$\alpha =$	0°	43° 40′	65° 40′	82° 25′	90°
$\varrho =$	1	0,831	0,809	1,08	∞.

Der kleinste Krümmungshalbmesser $\varrho = 0{,}798$ entspricht der Ordinate $y = 0{,}586$ und dem Winkel $\alpha = 58° 40'$. Da $K_{90} = 0{,}184$ ist und

$$30)\quad q_{90} = \frac{K_{90}}{K_0} \cdot q_0$$

ebenfalls gleich 0,184 ist, so würde die Kette, ohne der Widerstände fester Unterstützungspunkte zu bedürfen, im schwimmenden Gleichgewichtszustande sich befinden, wenn auf die in Fig. 476 angedeutete Weise an jedem Ende der Kette ein in verticaler Richtung über den Wasserspiegel emporragendes Stück von der Länge Eins und vom Gewichte $q_{90} = 0{,}184$ pro Längeneinheit hinzugefügt wird.

§ 144.

Berechnung der Gewölbstärke für einen nach der Kettenlinie construirten Gewölbbogen.

Ein Gewölbbogen von geringer Dicke und überall grossem Krümmungshalbmesser darf annäherungsweise als eine in ihrer labilen Gleichgewichtslage befindliche Kette betrachtet werden.

Für einen nur mit seinem eigenen Gewichte belasteten Gewölbbogen von überall gleich grossem Gewichte pro Längeneinheit würde also unter den genannten Umständen die in § 126 berechnete „gemeine Kettenlinie“ die Gleichgewichtsform darstellen, und wenn der Gewölbbogen, als Kette von gleichem Widerstande construirt, ausser seinem eigenen Gewichte noch eine gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilte Belastung zu tragen hätte, so würde die in § 129 berechnete „Kettenbrücken-Linie“ (in umgekehrter Lage gedacht) als Gleichgewichtsform desselben anzusehen sein. Ebenso dürfen die in den vorigen Paragraphen für Erd- und Wasser-Druck gefundenen Kettenlinien annäherungsweise als Gleichgewichtsformen eines unter gleichen Belastungsverhältnissen befindlichen Gewölbbogens betrachtet werden, sobald die Dicke desselben überall klein ist im Verhältniss zum Krümmungshalbmesser.

Um für einen solchen nach der Kettenlinie construirten Gewölbbogen die im Scheitelpunkte erforderliche Stärke zu berechnen, würde man die an dieser Stelle stattfindende Druck-Spannung pro Flächeneinheit gleich der practisch zulässigen Druck-Spannung zu setzen haben. Den totalen Horizontaldruck im Scheitelpunkte findet man nach § 119, indem man den Krümmungshalbmesser des Scheitelpunktes multiplicirt mit der Grösse, welche die Totalbelastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection an dieser Stelle hat. Da bei den Untersuchungen der vorigen Paragraphen als Krafteinheit überall das früher mit γ bezeichnete Gewicht des Belastungsmaterials pro Cubikeinheit angenommen wurde, so hat man die in den vorigen Paragraphen gefundenen Kraftgrössen sämmtlich noch mit γ zu multipliciren, wenn statt dessen das Gewicht eines Kilogramms als Krafteinheit gewählt werden soll. Hiernach ergiebt sich für den Horizontaldruck im Scheitelpunkte der Ausdruck:

$$1) \quad K_0 = R(q_0 + \gamma y_0),$$

in welchem R den Krümmungshalbmesser des Scheitelpunktes, y_0 die Höhe der Belastungsschicht und q_0 das eigene Gewicht des Gewölbbogens pro Längeneinheit an dieser Stelle bedeutet. Die obige Gleichung gilt sowohl für vertical wirkende Belastungen, als auch für Erd- und Wasser-Druck.

Wenn mit $\sigma\gamma$ das Gewicht des Gewölbbogenmaterials pro Kubikeinheit bezeichnet wird — wobei also σ das specifische Gewicht desselben bedeuten würde für den Fall, dass „Wasser“ das

Belastungsmaterial bildet — und mit c_0 die Gewölbstärke im Scheitelpunkte, so ist:

$$2)\quad q_0 = \sigma\gamma c_0$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Werthes nimmt die vorige Gleichung die Form an:

$$3)\quad K_0 = \gamma R(\sigma c_0 + y_0).$$

Wenn ferner mit S die practisch zulässige Druck-Spannung des Gewölbbogenmaterials pro Flächeneinheit bezeichnet wird, so ist zugleich:

$$4)\quad K_0 = S \,.\, c_0$$

zu setzen, und man erhält durch Gleichsetzung der beiden für K_0 gefundenen Ausdrücke die Gleichung:

$$5)\quad S c_0 = \gamma R(\sigma c_0 + y_0).$$

Indem man diese letztere Gleichung für c_0 auflöst, findet man für die erforderliche Gewölbstärke im Scheitelpunkte den Werth:

$$6)\quad c_0 = \frac{\gamma R y_0}{S - \sigma\gamma R}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $c_0 = \infty$ wird, wenn $\sigma\gamma R = S$ ist. Für den Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte ergiebt sich hieraus der obere Grenzwerth:

$$7)\quad R_{(max)} = \frac{S}{\sigma\gamma},$$

welchen der wirkliche Werth von R nicht erreichen darf, wenn die practisch zulässige Druck-Spannung nicht überschritten werden soll. So würde z. B. für ein Material, bei welchem die practisch zulässige Druck-Spannung pro Quadratmeter 450 000 Kil. und das Gewicht pro Cubikmeter 2500 Kil. beträgt, der Werth $R_{(max)} = 180$ Meter sich ergeben. (Für Eisen hat dieser obere Grenzwerth — wie in § 127 bereits gefunden wurde — die Grösse von 1000 Metern.)

Wenn für den wirklichen Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte der Werth $R = 60^m$ vorgeschrieben ist, so erhält man z. B. für $y_0 = 4^m$ und $\gamma = 1600$ Kil., indem man zugleich wieder $S = 450000$ Kil. und $\sigma\gamma = 2500$ Kil. setzt, für die erforderliche Stärke des Gewölbbogens im Scheitelpunkte den Werth: $c_0 = 1^m{,}28$.

§ 145.

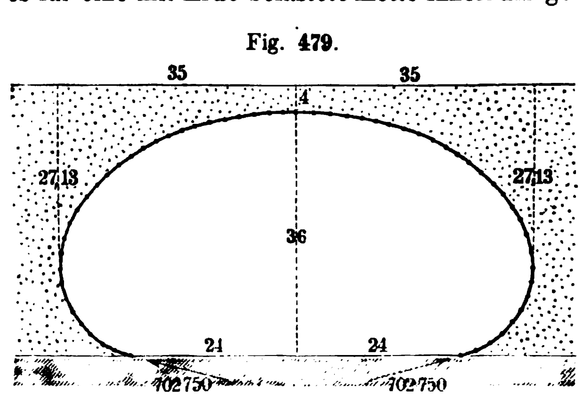
Gewölbbogen mit Sandbelastung.

Die erforderliche Stärke des Gewölbbogens im Scheitelpunkte hängt (bei gegebener Materialbeschaffenheit) ausschliesslich ab von

dem Krümmungshalbmesser des Scheitelpunktes und von der Belastung pro Längeneinheit an dieser Stelle. Sie ist dagegen vollkommen unabhängig von der Art der Belastung und von dem Gesetze der Lastvertheilung. Die im vorigen Paragraphen für c_0 gefundene Gleichung gilt sowohl für Erd- und Wasser-Druck als für vertical wirkende Belastungen; sowohl für gleichförmig als für ungleichförmig über die Horizontalprojection vertheilte Belastungen. Was dagegen die Krümmungsform des Gewölbbogens in den seitwärts vom Scheitelpunkte gelegenen Theilen betrifft, und das Gesetz, nach welchem die Stärke des Bogens vom Scheitelpunkte aus nach beiden Seiten hin allmählich zunehmen muss, wenn die Druck-Spannung pro Flächeneinheit des Querschnittes überall gleich gross sein soll — so werden dieselben bedingt durch die Art der Belastung und das Gesetz der Lastvertheilung.

Nach § 117 ist bei einer cohäsionslosen Erdmasse, welche continuirlichen Erschütterungen ausgesetzt ist, der Erd-Druck zu berechnen aus den für hydrostatischen Druck geltenden Gleichungen, in welche die für activen und passiven Erd-Druck geltenden Gleichungen übergehen, wenn darin $\varphi = 0$ oder $m = 1$ gesetzt wird. Der active und der passive Erd-Druck bilden die äussersten Grenzen, bis zu welchen der wirkliche Erd-Druck von dem hydrostatischen Drucke nach beiden Seiten hin abweichen kann. Diese beiden Grenzen fallen zusammen, wenn durch irgend eine Ursache die Wirkung der Reibung aufgehoben wird. Hieraus folgt, dass es für eine mit Erde belastete Kette innerhalb gewisser Grenzen unendlich viele verschiedene Gleichgewichtsformen giebt. Die dem activen und passiven Erd-Drucke entsprechenden Kettenlinien bilden die äussersten Grenzen, bis zu welchen die Form der Kette von der dem hydrostatischen Drucke entsprechenden Kettenlinie abweichen kann, ohne dass der Gleichgewichtszustand gestört wird. Wenn es sich

Fig. 479.



darum handelt, diejenige Gleichgewichtsform auszuwählen, welche zugleich die grösste Stabilität besitzt, so hat man demnach die für $m = 1$ in § 143 gefundenen, dem hydrostatischen Drucke entsprechenden Gleichungen anzuwenden.

Für die in § 143 mit n bezeichnete Grösse ergiebt sich aus der Gleichung 2) des vorigen Paragraphen der Werth:

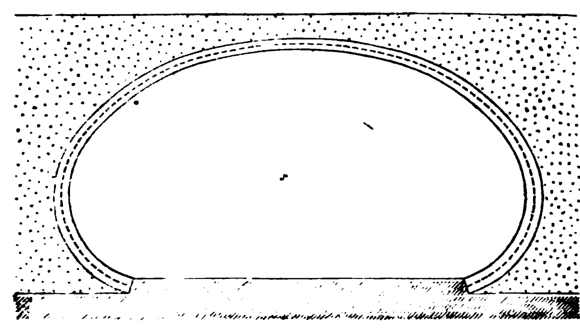
$$1) \quad n = \frac{q_0}{\gamma y_0} = \frac{\sigma \gamma c_0}{\gamma y_0} = \frac{\sigma c_0}{y_0}.$$

Wenn man hierin mit Beibehaltung der im vorigen Paragraphen angenommenen Zahlenwerthe: $\sigma = \frac{25}{16}$ und $y_0 = 4^m$ setzt, so erhält man für $c_0 = 1^m{,}28$ den Werth:

$$2) \quad n = \frac{1{,}25 \,.\, 1{,}6}{4} = \frac{1}{2}.$$

Da ferner der Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkte gleich 60 Meter angenommen wurde, so hat die in § 143 mit A bezeichnete Grösse den Werth:

Fig. 480.



$$3) \quad A = \frac{R}{y_0} = \frac{60}{4} = 15.$$

Nach Substitution dieser Werthe nehmen die Gleichungen 8), 9), 10), 11) des § 143, wenn zugleich statt der Grösse $\gamma = 1600$ Kil. das Gewicht von 1 Kil. als Krafteinheit angenommen wird, die folgenden Formen an:

$$4) \quad H = 25600 \left\{23 - \frac{y^2}{32}\right\},$$

$$5) \quad K = 576000 \,.\, e^{\left(\frac{y-4}{180}\right)},$$

$$6) \quad \cos \alpha = \frac{H}{K},$$

$$7) \quad \varrho = \frac{K}{\frac{H}{180} + 1600 \,.\, y}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die in nachstehender Tabelle zusammengestellen Zahlenwerthe:

$y =$	4	8	12	16	20	24	27,13	40
$H =$	576 000	537 600	473 600	384 000	268 800	128 000	0	— 691 200
$K =$	576 000	588 940	602 150	615 680	629 450	643 680	654 900	702 750
$\alpha =$	0°	24°5′	38°10′	51°25′	64°45′	78°30′	90°	169°35′
$\varrho =$	60m	37m,306	27m,58	22m,2	18m,79	16m,458	15m,088	11m,68.

Fig. 481.

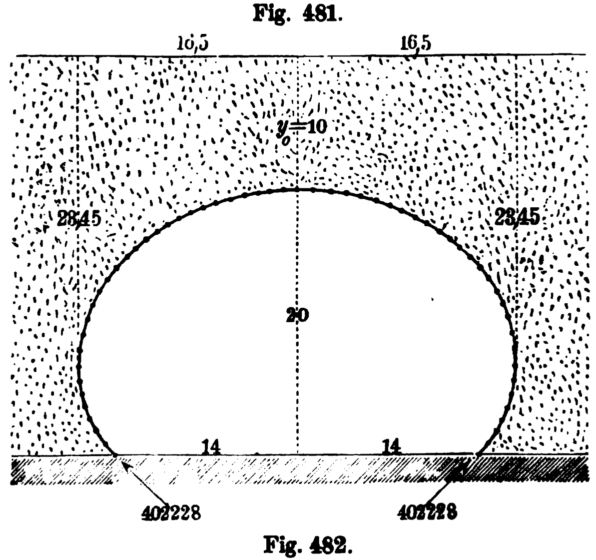
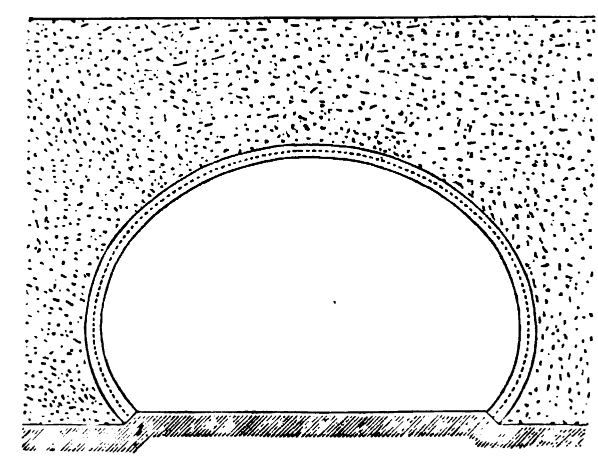


Fig. 482.



Diesen Zahlenwerthen entspricht die in Fig. 479 dargestellte Kettenlinie. Streng genommen würde zwar diese Linie nur bei unendlich kleiner Stärke des Gewölbbogens als Gleichgewichtsform desselben anzusehen sein. Annäherungsweise darf man indessen annehmen, dass auch der wirkliche Gewölbbogen im Gleichgewichtszustande sich befinden wird, wenn man der Mittellinie desselben diese Form giebt (Fig. 480).

Nach der obigen Tabelle wächst die Druckspannung im Gewölbbogen vom Scheitelpunkte nach den unteren Endpunkten hin von $K_0 = 576\,000$ bis $K = 702\,750$.

Hiernach ergiebt sich für die am unteren Ende erforderliche Stärke des Bogens der Werth:

$$8)\quad c = c_0 \cdot \frac{K}{K_0} = 1{,}28 \cdot \frac{702\,750}{576\,000} = 1^{\text{m}},56.$$

Wenn man ein anderes Mal $y_0 = 10^{\text{m}}$ und $R = 20^{\text{m}}$ setzt, so erhält man nach der Gleichung 6) des vorigen Paragraphen den Werth:

$$9)\quad c_0 = \frac{1600 \,.\, 20 \,.\, 10}{450\,000 - 2500 \,.\, 20} = 0^{\text{m}},8.$$

Für diesen Fall ist also $n = \frac{1}{8}$ und $A = 2$ zu setzen; die Gleichungen des § 143 nehmen alsdann die folgenden Formen an:

$$10)\quad H = 160\,000 \left\{\frac{11}{4} - \frac{y^2}{200}\right\},$$

$$11)\quad K = 360\,000 \,.\, e^{\left(\frac{y-10}{180}\right)}$$

$$12)\quad \cos\alpha = \frac{H}{K},$$

$$13)\quad \varrho = \frac{K}{\frac{H}{180} + 1600 \,.\, y}$$

und man erhält aus denselben die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$y =$	10	15	20	23,45	30
$H =$	360 000	260 000	120 000	0	— 280 000
$K =$	360 000	370 130	380 560	387 910	402 228
$\alpha =$	0°	45° 25′	71° 35′	90°	134° 5′
$\varrho =$	20^{m}	$14^{\text{m}},55$	$11^{\text{m}},65$	$10^{\text{m}},34$	$8^{\text{m}},66.$

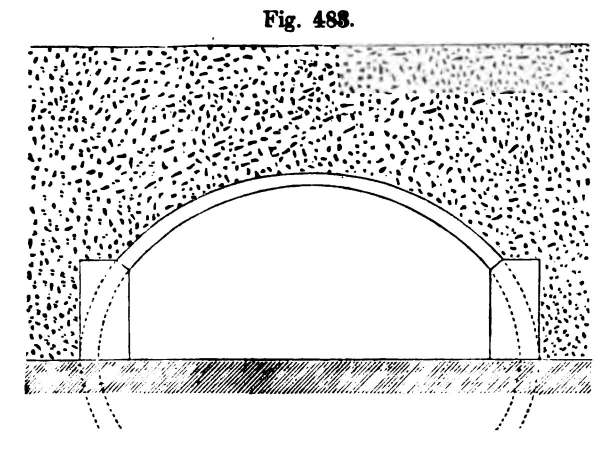
Diesen Zahlenwerthen entspricht die in Fig. 481 dargestellte Kettenlinie und die in Fig. 482 dargestellte Form des Gewölbbogens. Für die am unteren Ende desselben erforderliche Stärke ergiebt sich der Werth:

$$14)\quad c = c_0 \cdot \frac{K}{K_0} = 0{,}8 \cdot \frac{402\,228}{360\,000} = 0^{\text{m}},894.$$

Der Gleichgewichtszustand dieses Gewölbbogens würde nicht gestört werden, wenn der untere Theil desselben bis zu beliebiger

Höhe hinauf in eine feste Wand eingeschlossen würde, oder wenn derselbe eine grössere Stärke erhielte als diejenige, welche die Rechnung ergab. Hieraus folgt, dass der Gewölbbogen auch dann noch im Gleichgewichtszustande sich befinden wird, wenn auf die in Fig. 483 angedeutete Weise der untere Theil an jeder Seite ersetzt wird durch ein Widerlager, welches den berechneten Bogentheil vollständig einschliesst.

Fig. 483.



§ 146.

Gewölbbogen mit gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung.

Die Gleichgewichtsform eines als Körper von gleichem Widerstande construirten Gewölbbogens, welcher ausser seinem eigenen Gewichte eine gleichförmig über die Horizontalprojection vertheilte Belastung zu tragen hat, ist nach § 129 zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad y = -R\left(\frac{k+p}{k}\right) \lg \cos\left(\frac{x}{R}\sqrt{\frac{k}{k+p}}\right).$$

Nach der in den vorigen Paragraphen angewendeten Bezeichnungsweise ist hierin:

$$2)\quad k = q_0 = \sigma\gamma c_0$$

zu setzen, und da die Belastung pro Längeneinheit der Horizontalprojection überall dieselbe Grösse haben soll wie im Scheitelpunkte, so ist:

$$3)\quad p = \gamma y_0.$$

Wenn man hierin, wie bei dem ersten Zahlenbeispiele des vorigen Paragraphen, die Werthe: $R = 60^m$, $y_0 = 4^m$, $\gamma = 1600$ Kil., $\sigma\gamma = 2500$ Kil., $c_0 = 1^m,28$ substituirt, welchen die Werthe

$k = 3200$ Kil. und $p = 6400$ Kil. entsprechen, so erhält man für diesen Fall die Gleichung:

$$4)\quad y = -180 \,.\, \lg \cos\left(\frac{x}{60 \,.\, \sqrt{3}}\right),$$

aus welcher die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe sich ergeben:

$\frac{x}{60 \,.\, \sqrt{3}} = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1,5708
$x = 0$	10,39	20,78	31,18	41,57	51,96	163,2
$y = 0$	0,91	3,62	8,23	14,8	23,5	∞.

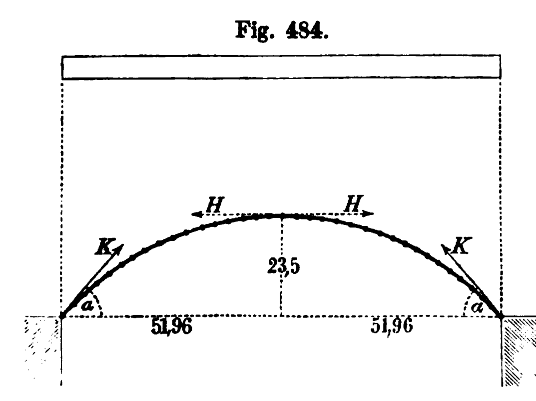
Diesen Zahlenwerthen entspricht die in Fig. 484 dargestellte Kettenlinie. Nach § 129 hat die Horizontalspannung der Kette die Grösse:

$$5)\quad H = R(k+p) = 60\,(3200 + 6400) = 576\,000 \text{ Kil.},$$

und der Neigungswinkel der Kettenlinie gegen die Horizontale ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$6)\quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{k+p}{k}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{R}\sqrt{\frac{k}{k+p}}\right) = \sqrt{3} \,.\, \operatorname{tg}\left(\frac{x}{60 \,.\, \sqrt{3}}\right).$$

Fig. 484.



Aus der letzteren Gleichung ergiebt sich für $\frac{x}{60 \,.\, \sqrt{3}} = 0{,}5$ der Werth: $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}9464$. Die Druckspannung der Kette wächst also vom Scheitelpunkte nach den Unterstützungspunkten hin von der Grösse $H = 576\,000$ Kil. bis zu der Grösse:

$$7)\quad K = H \,.\, \sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha^2} = 1{,}377 \,.\, 576\,000 = 793\,200 \text{ Kil.}$$

Dieser Druckzunahme entspricht eine Zunahme der Gewölbstärke von der Grösse $c_0 = 1^m{,}28$ bis zu der Grösse:

$$8)\quad c = 1{,}28 \,.\, \frac{793\,200}{576\,000} = 1^m{,}763.$$

Wenn man ein anderes Mal in Gleichung 1) die bei dem zweiten Zahlenbeispiele des vorigen Paragraphen angenommenen Werthe: $R = 20^m$, $y_0 = 10^m$, $\gamma = 1600$ Kil., $\sigma\gamma = 2500$ Kil., $c_0 = 0^m,8$ substituirt, welchen die Werthe $k = 2000$ Kil., $p = 16000$ Kil., $H = 360000$ Kil. entsprechen, so erhält man für diesen Fall die Gleichung:

$$9)\quad y = -180 \,.\, \lg\cos\left(\frac{x}{60}\right),$$

aus welcher die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe sich ergeben:

$x = 0$	6	12	18	24	30	94,25
$y = 0$	0,91	3,62	8,23	14,8	23,5	∞.

Auf dieselbe Weise wie oben findet man, dass den Coordinaten $x = 30^m$ und $y = 23^m,5$ die Werthe $\operatorname{tg}\alpha = 1,64$ und $K = 691300$ Kil. entsprechen. Bei einer Spannweite von 60 Metern würde demnach für die Stärke des Gewölbbogens am Widerlager der Werth: $c = 1^m,536$ sich ergeben.

§ 147.

Stützlinien im Gewölbbogen.

Die Rechnungsresultate, zu welchen man bei Anwendung der in den vorigen beiden Paragraphen erklärten Methode gelangt, sind (wie in § 144 bereits bemerkt wurde) nur in solchen Fällen als brauchbar zu betrachten, in welchen für das Verhältniss der berechneten Gewölbstärke zu dem Krümmungshalbmesser überall ein sehr kleiner Werth sich ergiebt, da es andernfalls nicht mehr zulässig sein würde, den Gewölbbogen als eine vollkommen biegsame Kette, und die Mittellinie des Bogens ohne Weiteres als Stützlinie desselben zu behandeln. Bei grösserer Stärke des Gewölbbogens würde überdies die gemachte Voraussetzung meistens nicht mehr zutreffen, nach welcher die Belastung unmittelbar auf die Mittellinie des Bogens wirken sollte, da es in Wirklichkeit die äussere Begrenzungsfläche des Gewölbbogens zu sein pflegt, welche in unmittelbarer Berührung mit dem Belastungsmateriale sich befindet.

Um bei beliebig gewählter Form und Stärke des belasteten Gewölbbogens die Stützlinie desselben zu construiren, hat man wiederum das Verfahren anzuwenden, welches bereits in § 118

für den dort angenommenen Fall vertical gerichteter Schnittfugen erklärt wurde.

Denkt man sich in der Scheitelfuge und den beiden Widerlagerfugen einstweilen Stifte eingeschoben, durch welche bewirkt wird, dass die drei Punkte A, B, C Stützpunkte (oder Punkte der zu construirenden Stützlinie) werden, so erkennt man, dass hiermit zugleich Grösse und Lage des in der Scheitelfuge wirkenden Horizontaldruckes H bestimmt sind, welchen man berechnen kann, indem man die statischen Momente der beiden Kräfte H und Q in Bezug auf den Drehpunkt A (oder in Bezug auf den Drehpunkt B) einander gleichsetzt (Fig. 485). Nachdem auf solche Weise der Horizontaldruck H gefunden ist, kann man auf dieselbe Weise wie in § 118 den Punkt M bestimmen, in welchem eine beliebig gewählte andere Fuge von der Stützlinie getroffen wird, indem man auf die in Fig. 486 angedeutete Weise von den beiden Kräften H und P die Mittelkraft R construirt und den Durchschnittspunkt aufsucht, in welchem jene Fuge von der Richtungslinie dieser Kraft R geschnitten wird. Jedoch ist hierbei zu berücksichtigen, dass die Curve, welche man bei Anwendung dieses Constructionsverfahrens erhält, nur dann als wirkliche Stützlinie gelten kann, wenn jede

Fig. 485.

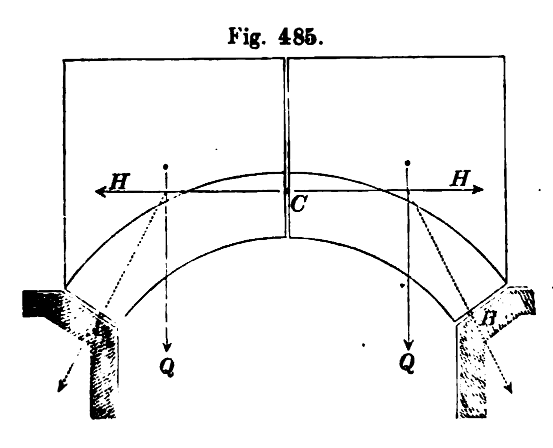
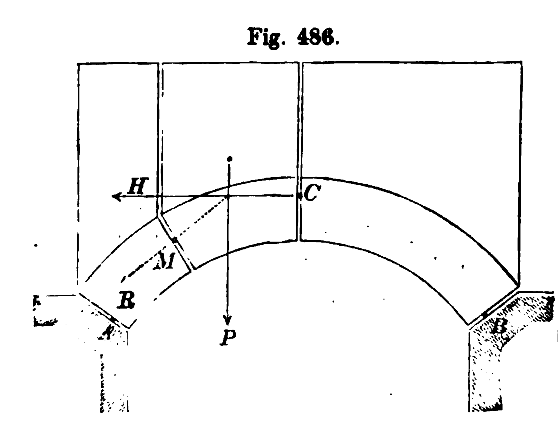


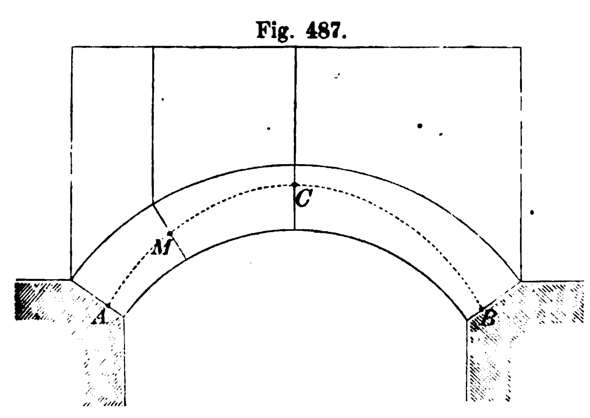
Fig. 486.



Fuge von derselben innerhalb der durch ihre beiden Endpunkte begrenzten Strecke geschnitten wird (Fig. 487).

Man überzeugt sich auf solche Weise, dass durch die drei willkürlich gewählten Punkte A, B, C die ganze Stützlinie ihrer Lage und Form nach festgelegt ist, zugleich auch: dass im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Stützlinien in einem und demselben Gewölbbogen construirt werden können, und dass jeder von diesen Stützlinien eine bestimmte Grösse und Lage des in der Scheitelfuge wirkenden Horizontaldruckes H entspricht, sowie umgekehrt jedem bestimmten Horizontaldrucke H eine bestimmte Form und Lage der Stützlinie entspricht. Die Grösse des Horizontaldruckes H und die Pfeilhöhe der demselben entsprechenden Stützlinie bedingen einander wechselseitig in solcher Weise dass der grössten Pfeilhöhe der kleinste Horizontaldruck und der kleinsten Pfeilhöhe der grösste Horizontaldruck entspricht. Bei Betrachtung der Fig. 487 erkennt man, dass der Spielraum für die in dem Gewölbbogen construirbaren Stützlinien um so mehr zusammenschrumpfen wird, je kleiner die Gewölbstärke gewählt wird. Um das Minimum der erforderlichen Gewölbstärke zu finden, hat man zu untersuchen: wie klein dieselbe höchstens werden darf, wenn überhaupt noch die Möglichkeit vorhanden sein soll, mindestens eine Stützlinie in dem Gewölbbogen zu construiren, welche nirgendwo die äussere oder die innere Begrenzungslinie der Gewölbbogenfläche überschreitet.

Fig. 487.



§ 148.

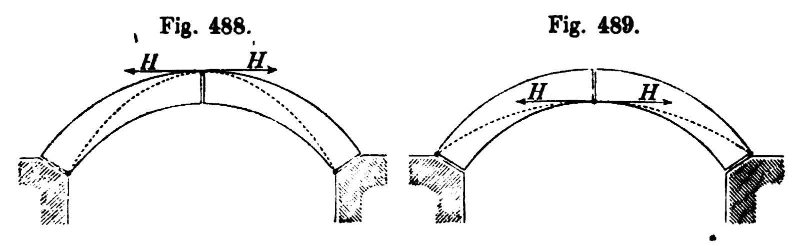
Gleichgewicht des Gewölbbogens in Bezug auf Drehung.

Die Frage: unter welchen Umständen es möglich ist, eine ganz in das Innere des Gewölbbogens fallende Stützlinie in demselben zu construiren, ist gleichbedeutend mit der Frage: unter

welchen Umständen es möglich ist, für den in der Scheitelfuge wirkenden Horizontaldruck eine solche Grösse und Lage nachzuweisen, bei welchen dieser Horizontaldruck in Bezug auf jede beliebige Fuge ausreicht, um eine Drehung des zwischen dieser Fuge und der Scheitelfuge befindlichen Gewölbstückes nach innen zu verhindern, und zugleich auch klein genug ist, um nicht eine Drehung desselben Stückes nach aussen hin hervorzubringen.

Bei überflüssiger Stärke des Gewölbbogens kann dieser Bedingung auf unendlich viele verschiedene Arten Genüge geleistet werden, da unendlich viele verschiedene Stützlinien im Innern desselben möglich sind, und jeder von diesen Stützlinien eine besondere Grösse und Lage jenes in der Scheitelfuge wirkenden Horizontaldruckes entspricht. Im Allgemeinen wird daher von einer bestimmten Grösse und Lage dieses Horizontaldruckes überhaupt nicht die Rede sein können, sondern immer nur von gewissen Grenzen, in Bezug auf welche behauptet werden darf, dass der wirkliche Horizontaldruck zwischen denselben liegen muss.

Bei sehr grossser Stärke des Gewölbbogens würde man diese beiden Grenzwerthe auf die in Fig. 488 und Fig. 489 angedeutete

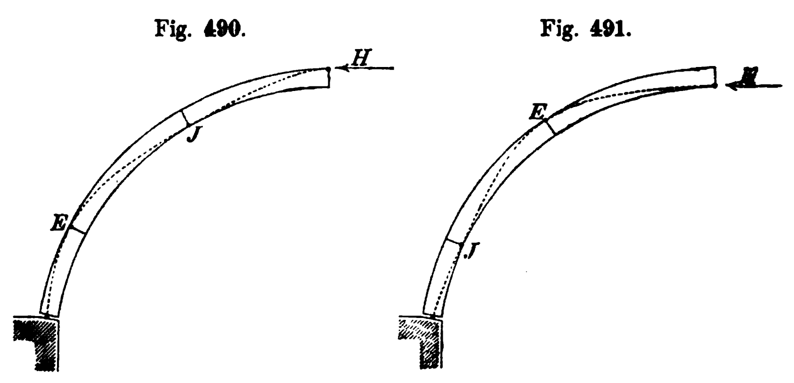


Weise ermitteln können, indem man das eine Mal die grösstmögliche, das andere Mal die kleinstmögliche Pfeilhöhe für die Stützlinie annimmt, und für jede dieser beiden Stützlinien den zugehörigen Horizontaldruck berechnet. Der wirkliche Horizontaldruck in der Scheitelfuge würde jeden dieser beiden Grenzwerthe in der That erreichen können, wenn die Stärke des Gewölbbogens so gross ist, dass jede von diesen beiden Stützlinien ganz in das Innere des Bogens hineinfällt.

Denkt man sich — von diesem Falle ausgehend — die Gewölbstärke allmählich kleiner werdend und diese Verkleinerung bis zu dem Punkte fortgesetzt, wo gerade nur noch eine einzige Stützlinie in dem Gewölbbogen möglich ist, so überzeugt man sich leicht, dass im Allgemeinen diese der Grenze der Stabilität ent-

sprechende Stützlinie — je nach dem Gesetze der Lastvertheilung und der Form des Bogens — entweder auf die in Fig. **490** oder auf die in Fig. **491** dargestellte Weise die innere und die äussere

Fig. **490**. Fig. **491**.



Begrenzungslinie berühren wird. In beiden Fällen giebt es für den in der Scheitelfuge wirkenden Horizontaldruck nur eine einzige Grösse und Lage, welche den Gleichgewichtsbedingungen entspricht. Die geringste Verkleinerung dieses Horizontaldruckes würde eine Drehung des zwischen der Fuge J und der Scheitelfuge befindlichen Stückes nach innen — die geringste Vergrösserung dagegen eine Drehung des zwischen der Fuge E und der Scheitelfuge befindlichen Stückes nach aussen hin zur Folge haben. Wenn in Fig. **490** die Fuge E, oder in Fig. **491** die Fuge J, zufällig mit der Widerlagerfuge zusammenfällt, so wird der Gleichgewichtszustand auch dann noch möglich sein, wenn die betreffenden Stützlinien — anstatt die Begrenzungslinien der Gewölbbogenfläche in diesen Fugen zu berühren — dieselben schneiden.

Um die Frage zu entscheiden: ob auf die in Fig. **490** oder auf die in Fig. **491** dargestellte Weise jener Grenzfall des Gleichgewichtes eintreten wird, hat man zunächst auf die in Fig. **488** angedeutete Weise die Stützlinie des kleinsten Horizontaldruckes zu construiren und alsdann zu untersuchen, ob bei allmählich abnehmender Gewölbstärke die auf solche Weise zu construirende Stützlinie zuerst die innere oder zuerst die äussere Begrenzungslinie überschreiten wird. In der Regel — wie z. B. namentlich bei dem Kreisbogen-Gewölbe mit horizontaler Belastungslinie — wird der erstere Fall eintreten, und in diesem Falle wird auf die in Fig. **490** dargestellte Art bei fernerem Abnehmen der Gewölbstärke die Grenze der Stabilität erreicht werden. Für diesen

Fall hat man also bei der Berechnung der mindestens erforderlichen Gewölbstärke den oberen Endpunkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt des Horizontaldruckes anzunehmen.

Fände es sich dagegen, dass der andere Fall eintritt — dass nämlich bei allmählichem Abnehmen der Gewölbstärke zuerst ein Ueberschreiten der äusseren Begrenzungslinie stattfindet — so würde der Grenzfall des Gleichgewichtes auf die in Fig. 491 dargestellte Weise erreicht werden, und in diesem Falle würde man bei der Berechnung der Gewölbstärke den unteren Endpunkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt des Horizontaldruckes zu wählen haben.

Die Berechnung der Grenzstärke selbst hat man in beiden Fällen auf die Weise auszuführen, dass man untersucht: welche Grösse H_1 der Horizontaldruck mindestens haben muss, um in Bezug auf jede beliebige Fuge eine Drehung nach innen zu verhindern, und welche Grösse H_2 derselbe höchstens haben darf, um nicht in Bezug auf eine beliebige Fuge eine Drehung nach aussen hervorzubringen. Indem man diese beiden Grenzwerthe H_1 und H_2 alsdann einander gleichsetzt, erhält man die Gleichung, aus welcher die gesuchte Gewölbstärke berechnet werden kann.

Den unteren Grenzwerth H_1 findet man, indem man zunächst für eine beliebige Fuge denjenigen Horizontaldruck berechnet, welcher das zwischen derselben und der Scheitelfuge befindliche Stück in Bezug auf Drehung nach innen gerade im Gleichgewichte halten würde, und nachher untersucht, für welche Fuge dieser Horizontaldruck ein Maximum wird. Den oberen Grenzwerth H_2 findet man, indem man gleichfalls zunächst für eine beliebige Fuge denjenigen Horizontaldruck berechnet, welcher das zwischen derselben und der Scheitelfuge befindliche Stück in Bezug auf Drehung nach aussen hin gerade im Gleichgewichte halten würde, und nachher diejenige Fuge aufsucht, für welche der auf solche Weise zu berechnende Horizontaldruck ein Minimum wird.

§ 149.

Gleichgewicht des Gewölbbogens in Bezug auf Gleiten.

Die im vorigen Paragraphen mit H_1 und H_2 bezeichneten Grenzwerthe sind jedoch nur dann als wirklich erreichbare Grenzwerthe des in der Scheitelfuge wirkenden Horizontaldruckes zu betrachten, wenn der Winkel, welchen die bei Annahme jener

Horizontaldrücke sich ergebende Druckrichtung R (Fig. 486) mit der Normalen zu der betreffenden Fugenrichtung einschliesst, bei keiner Fuge grösser ist als der Reibungswinkel φ. Da diese Bedingung nicht unter allen Umständen erfüllt sein wird, so erleidet der Spielraum für die Veränderlichkeit des wirklichen Horizontaldruckes eine weitere Einschränkung durch die Gesetze der Reibung; insofern aus den Bedingungen des Gleichgewichtes in Bezug auf Gleiten noch zwei andere Grenzwerthe H_3 und H_4 abgeleitet werden können, von welchen ebenfalls behauptet werden darf, dass der wirkliche Horizontaldruck stets zwischen denselben liegen muss.

Den unteren Grenzwerth H_3 findet man nach Fig. 492, indem man zunächst in Bezug auf eine beliebige unter dem Winkel α

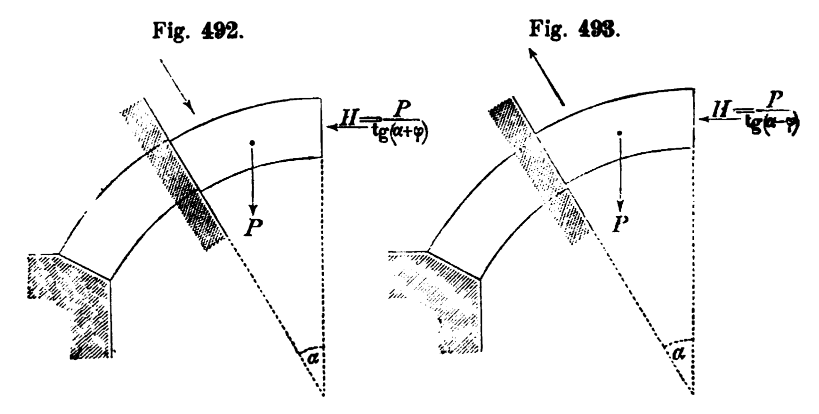


Fig. 492. Fig. 493.

gegen die Verticale geneigte Fuge untersucht, wie gross die Horizontalkraft H mindestens sein muss, um das Gleiten des Gewichtes P nach innen zu verhindern, und nachher untersucht, für welche von allen Fugen der auf solche Weise zu bestimmende Horizontaldruck $H = \frac{P}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$ ein Maximum wird.

Den oberen Grenzwerth H_4 findet man nach Fig. 493, indem man zunächst gleichfalls in Bezug auf eine beliebige Fuge untersucht, wie gross die Horizontralkraft H höchstens werden darf, ohne ein Gleiten des Gewichtes P nach aussen hervorzubringen, und nachher untersucht, für welche von allen Fugen der auf solche Weise zu bestimmende Horizontaldruck $H = \frac{P}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}$ ein Minimum wird.

Bei einem im Gleichgewichtszustande befindlichen Gewölbbogen kann der wirkliche Horizontaldruck jedenfalls nicht kleiner

sein als der grössere von den beiden Grenzwerthen H_1 und H_3 — zugleich auch nicht grösser als der kleinere von den beiden Grenzwerthen H_2 und H_4. Das Minimum der wirklich erforderlichen Gewölbstärke findet man demnach, indem man den grösseren von den beiden unteren Grenzwerthen H_1 und H_3 dem kleineren von den beiden oberen Grenzwerthen H_2 und H_4 gleichsetzt.

§ 150.

Unbelastetes Halbkreis-Gewölbe.

Berechnung des Grenzwerthes H_1.

Um zunächst in Bezug auf eine beliebige Fuge diejenige Grösse zu berechnen, welche der in der Scheitelfuge wirkende Horizontaldruck mindestens haben muss, um eine Drehung des zwischen jenen beiden Fugen befindlichen Gewölbstückes nach innen zu verhindern, hat man die statischen Momente der beiden Kräfte H und P in Bezug auf den Drehpunkt J einander gleichzusetzen, und erhält nach Fig. 494 die Gleichung:

Fig. 494.

$$1)\quad H(R - r\cos\alpha) = P \,.\, x.$$

Wenn die rechtwinkelig zur Bildfläche gerichtete Dimension des Gewölbbogens als Längen-Einheit und zugleich das Gewicht des Gewölbbogen-Materials pro Cubikeinheit als Kraft-Einheit gewählt wird, so ist das Gewicht P gleich dem Flächeninhalte des Ringsectors zu setzen, also:

$$2)\quad P = \frac{(R^2 - r^2)\,\alpha}{2}.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte*) hat der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Mittelpunkte die Grösse:

$$3)\quad \overline{OS} = \frac{2}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}.$$

*) Vergl. „Technische Mechanik" (5. Aufl.), Gleichung 160).

Der Hebelarm der Kraft P kann nunmehr nach Fig. 494 berechnet werden aus der Gleichung:

$$x = r \sin \alpha - \overline{OS} . \sin \frac{1}{2} \alpha, \quad \text{oder:}$$

$$4) \quad x = r \sin \alpha - \frac{2}{3} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \right) \frac{\left(\sin \frac{1}{2} \alpha \right)^2}{\frac{1}{2} \alpha}.$$

Hierin kann $\frac{1 - \cos \alpha}{2}$ statt $\left(\sin \frac{1}{2} \alpha \right)^2$ gesetzt werden, und nach Substitution der obigen Werthe nimmt die Gleichung 1) alsdann die folgende Form an:

$$5) \quad H(R - r \cos \alpha) = \left(\frac{R^2 - r^2}{2} \right) r \alpha \sin \alpha - \left(\frac{R^3 - r^3}{3} \right) (1 - \cos \alpha).$$

Wenn man diese Gleichung für H auflöst und zugleich abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{R}{r}$ gleich n setzt, so erhält man die Gleichung:

$$6) \quad H = \left\{ \frac{\frac{1}{2} (n^2 - 1) \alpha \sin \alpha - \frac{1}{3} (n^3 - 1)(1 - \cos \alpha)}{n - \cos \alpha} \right\} r^2.$$

Um den in § 148 mit H_1 bezeichneten Grenzwerth zu berechnen, hat man hierin für α denjenigen Winkel α_1 zu substituiren, für welchen H ein Maximum wird. Man findet diesen Winkel, indem man den Differenzialquotienten von H, nach α genommen, gleich Null setzt. Da der obige Ausdruck die Form eines Bruches hat:

$$7) \quad H = \frac{Z}{N},$$

dessen Zähler und Nenner Functionen von α sind, so führt das Null-Setzen des Differenzialquotienten zu der Gleichung:

$$0 = N . dZ - Z . dN, \quad \text{oder:}$$

$$8) \quad \frac{Z}{N} = \frac{dZ}{dN} = H_1.$$

Wenn man hierin für Z und N die aus Gleichung 6) zu entnehmenden Ausdrücke einsetzt, so erhält man für den Grenzwerth H_1 und den Bruchwinkel α_1 resp. die folgenden Gleichungen:

$$9) \quad H_1 = \left\{ \left(\frac{n^2 - 1}{2} \right) \left(\frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} + 1 \right) - \left(\frac{n^3 - 1}{3} \right) \right\} r^2,$$

$$10) \quad \frac{\alpha_1 (1 - n \cos \alpha_1)}{\sin \alpha_1} + \cos \alpha_1 = n - \frac{2}{3} \left(\frac{n^3 - 1}{n + 1} \right).$$

Für $\alpha_1 = 0$ wird $n = 1 + \sqrt{3} = 2{,}732$ und $H_1 = 0$. Hieraus folgt, dass in einem Gewölbbogen, bei welchem $R \geq 2{,}732 \cdot r$ ist, es überhaupt keines in der Scheitelfuge wirkenden Horizontaldruckes bedarf, um eine Drehung nach innen zu verhindern.

Berechnung des Grenzwerthes H_2.

Nach Fig. 495 erhält man als Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf Drehung nach aussen die Gleichung:

$$11)\quad HR(1 - \cos\alpha) = Pz.$$

Der Hebelarm $z = R\sin\alpha - \overline{OS}.\sin\frac{1}{2}\alpha$ hat nach Gleichung 3) die Grösse:

$$12)\quad z = R\sin\alpha - \frac{2}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\right)\frac{\left(\sin\frac{1}{2}\alpha\right)^2}{\frac{1}{2}\alpha},$$

und wenn man ausserdem für P den in Gleichung 2) gefundenen Ausdruck substituirt, so nimmt die obige Gleichung, für H aufgelöst, die folgende Form an:

$$13)\quad H = \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right)\left(\frac{\alpha\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\right) - \left(\frac{R^3 - r^3}{3R}\right).$$

Um den Grenzwerth H_2 zu finden, hat man denjenigen Werth von α aufzusuchen, für welchen die Grösse H ihren kleinsten Werth annimmt. Da der Werth des Quotienten:

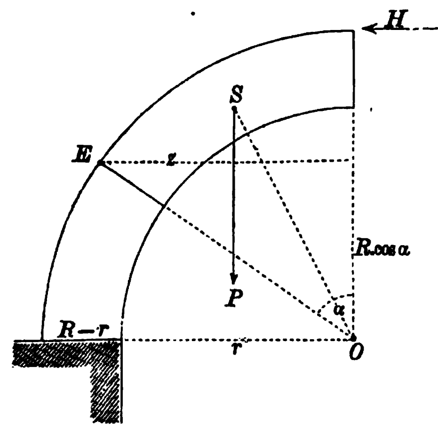


Fig. 495.

$$14)\quad \frac{\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$$

gleich Eins wird für $\alpha = 0$ und bis auf die Grösse $\frac{\pi}{4}$ stetig abnimmt, wenn der Winkel α von Null bis $\frac{\pi}{2}$ zunimmt, so ist für den obigen Quotienten der Werth $\frac{\pi}{4}$ zu substituiren, und man erhält für den Grenzwerth H_2, indem man zugleich wieder $\frac{R}{r} = n$ setzt, die folgende Gleichung:

$$15)\quad H_2 = \left\{\frac{\pi}{4}(n^2 - 1) - \left(\frac{n^3 - 1}{3n}\right)\right\}r^2.$$

Berechnung des Grenzwerthes H_3.

Nach Gleichung 2) und Fig. 492 ergiebt sich für diejenige Grösse, welche der Horizontaldruck H mindestens haben muss, um das Gleiten nach innen zu verhindern, die Gleichung:

$$16)\quad H = \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right) \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Um den Grenzwerth H_3 zu finden, hat man denjenigen Werth von α aufzusuchen, für welchen die Grösse $\frac{\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$ ein Maximum wird. Indem man den Differenzialquotienten dieses Bruches gleich Null setzt, erhält man — auf dieselbe Weise wie oben in Bezug auf Gleichung 7) gezeigt wurde — die folgende Gleichung:

$$17)\quad \frac{\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \cos(\alpha + \varphi)^2, \quad \text{oder:}$$

$$18)\quad \sin(2\alpha + 2\varphi) = 2\alpha.$$

Wenn man hierin — dem Reibungscoefficienten für Mauerwerk entsprechend — den Werth $\varphi = 30°$ substituirt, so findet man, dass $\alpha = 26° 25'$ zu setzen ist, und nach Substitution dieser Werthe erhält man für H_3 die Gleichung:

$$19)\quad H_3 = 0{,}153\,(n^2 - 1)\,r^2.$$

Berechnung des Grenzwerthes H_4.

Durch Vertauschung von $+\varphi$ mit $-\varphi$ erhält man aus Gleichung 16) für diejenige Grösse, welche der Horizontaldruck H höchstens erreichen darf, ohne ein Gleiten nach aussen hervorzubringen, den Werth:

$$20)\quad H = \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right) \frac{\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}.$$

Um den Grenzwerth H_4 zu finden, hat man denjenigen Winkel aufzusuchen, für welchen dieser Ausdruck seinen kleinsten Werth annimmt. Für $\alpha = \varphi$ ergiebt sich aus obiger Gleichung der Werth $H = \infty$, und mit wachsender Grösse des Winkels α nimmt der zugehörige Werth von H stetig ab. Folglich ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, und es ergiebt sich für H_4 die Gleichung:

$$21)\quad H_4 = \frac{\pi}{4}\,(R^2 - r^2)\operatorname{tg}\varphi.$$

Wenn man hierin wieder $\varphi = 30°$ und $\frac{R}{r} = n$ setzt, so erhält man für H_4 den Werth:

$$22)\quad H_4 = 0{,}453\,.\,(n^2 - 1)\,r^2.$$

§ 151.

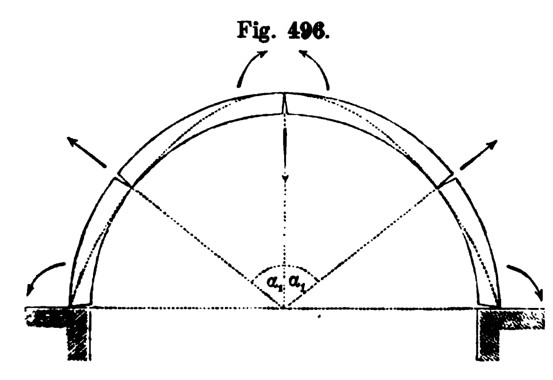
Berechnung der erforderlichen Gewölbstärke.

Aus den im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

n	$\frac{H_1}{r^2}$	α_1	$\frac{H_2}{r^2}$	$\frac{H_3}{r^2}$	$\frac{H_4}{r^2}$
2,732	0	0	2,82	0,989	2,93
2	0,130	57° 17′	1,19	0,459	1,36
1,5	0,173	64° 9′	0,454	0,191	0,57
1,25	0,128	61° 15′	0,1876	0,086	0,255
1,2	0,1114	59° 41′	0,1433	0,067	0,188
1,114	0,0748	54° 10′	0,0748	0,037	0,109
1,1	0,0675	53° 15′	0,0646	0,032	0,095

Der Gleichgewichtszustand des Gewölbbogens ist nur dann möglich: wenn der grössere von den beiden unteren Grenzwerthen H_1 und H_3 nicht grösser ist als der kleinere von den beiden oberen Grenzwerthen H_2 und H_4. Die obige Tabelle zeigt, dass diese Bedingung erfüllt ist, so lange n nicht kleiner ist als 1,114, dass sie dagegen aufhört erfüllt zu sein, sobald n kleiner wird als 1,114. Das Minimum der erforderlichen Gewölbstärke entspricht daher dem Werthe $n = 1,114$ oder:

Fig. 496.



$$1)\quad R - r = \frac{2r}{17,544},$$

für welchen der grössere von den beiden unteren Grenzwerthen, nämlich H_1, und der kleinere von den beiden oberen Grenzwerthen, nämlich H_2, einander gleich werden.

Bei dieser Stärke des Gewölbbogens würde derselbe an der

Grenze des Gleichgewichtszustandes sich befinden, insofern bei der geringsten ferneren Verminderung der Gewölbstärke auf die in Fig. 496 durch die Pfeile angedeutete Weise der Einsturz erfolgen würde.

Dem obigen Werthe von n entspricht der Bruchwinkel $\alpha_1 = 54° 10'$. Beim Beginnen des Einsturzes werden die um diesen Winkel gegen die Verticale geneigten Bruchfugen anfangen, an der Aussen-Seite sich zu öffnen, während gleichzeitig die Scheitelfuge und die beiden Widerlagerfugen beginnen an der Innen-Seite sich zu öffnen.

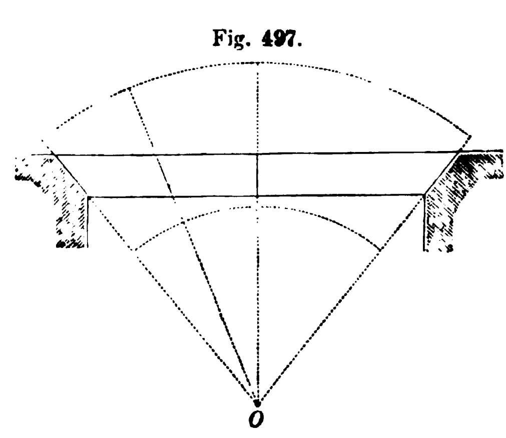
Die obige Tabelle zeigt zugleich, dass (bei der hier angenommenen Grösse des Reibungswinkels) von den beiden oberen Grenzwerthen stets nur der Grenzwerth H_2 als der kleinere von beiden in Betracht kommt. Dieselbe zeigt ferner, dass bei kleinen Werthen der Zahl n stets H_1, bei grossen Werthen der Zahl n dagegen stets H_3 den grösseren von den beiden unteren Grenzwerthen bildet. Für $n = 1{,}445$ werden diese beiden unteren Grenzwerthe einander gleich. Wenn also n grösser ist als 1,445, so ist der untere Grenzwerth für den wirklichen Horizontaldruck stets nach der Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf Gleiten zu bestimmen und hat die Grösse H_3.

§ 152.

Scheitrechtes Gewölbe.

Denkt man sich von dem Kreisbogen-Gewölbe durch horizontale Schnittflächen den oberen und den unteren Theil hinweggeschnitten, so erhält man das in Fig. 497 dargestellte scheitrechte Gewölbe.

Fig. 497.



Für diejenige Grösse, welche der in der Scheitelfuge wirkende Horizontaldruck mindestens haben muss, um in Bezug auf den Drehpunkt J eine Drehung nach innen zu verhindern, erhält man nach Fig. 498 die Gleichung:

$$1) \quad H \cdot c = P \cdot x,$$

wofür man auch setzen kann (indem man für das statische Moment des Gewichtes P die algebraische Summe der statischen Momente seiner beiden Theile substituirt):

$$2) \quad H \cdot c = \frac{c r^2 \operatorname{tg} \alpha^2}{2} - \frac{c^3 \operatorname{tg} \alpha^2}{6}.$$

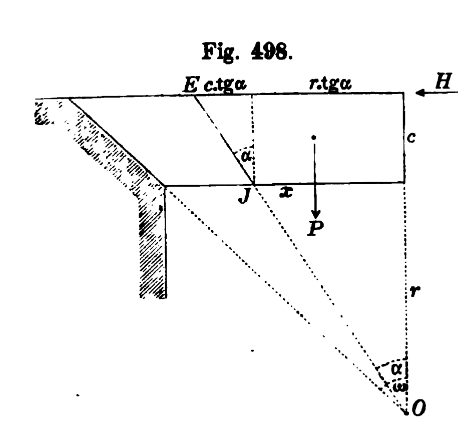


Fig. 498.

Wenn man das Verhältniss $\frac{r}{c}$ gleich n setzt, so erhält man durch Auflösung dieser Gleichung für H den Ausdruck:

$$3) \quad H = (3 n^2 - 1) c^2 . \frac{\operatorname{tg} \alpha^2}{6}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass H um so grösser wird, je grösser der Winkel α angenommen wird. Um den Grenzwerth H_1 zu finden, hat man demnach $\alpha = \omega$ zu setzen und erhält die Gleichung:

$$4) \quad H_1 = (3 n^2 - 1) c^2 . \frac{\operatorname{tg} \omega^2}{6}.$$

Da in Bezug auf den Punkt E der Hebelarm der Kraft H die Grösse Null hat, so würde die Kraft H selbst dann keine Drehung nach aussen hervorbringen können, wenn dieselbe bis ins Unendliche vergrössert würde. Folglich ist für diesen Fall der Grenzwerth:

$$5) \quad H_2 = \infty.$$

Nach Fig. 498 hat das Gewicht des zwischen der Fuge JE und der Scheitelfuge befindlichen Stückes die Grösse:

$$6) \quad P = c r \operatorname{tg} \alpha + \frac{c^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Nach Substitution dieses Ausdruckes erhält man aus Fig. 492 für diejenige Grösse, welche der Horizontaldruck H mindestens haben muss, um das Gleiten nach innen zu verhindern, die Gleichung:

$$7) \quad H = c \left(r + \frac{c}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}.$$

Indem man den Differenzialquotienten dieses Ausdruckes, nach α genommen, gleich Null setzt, findet man (auf dieselbe Weise wie im § 98 in Bezug auf den Winkel θ gezeigt wurde) für α den Werth:

$$8)\quad \alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2},$$

und nach Substitution desselben erhält man für den Grenzwerth H_3, indem man zugleich wieder $\frac{r}{c} = n$ setzt, die Gleichung:

$$9)\quad H_3 = \left(n + \frac{1}{2}\right) c^2 \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Wäre der Winkel ω kleiner als $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$, so würde statt dessen $\alpha = \omega$ zu setzen sein, und man erhielte für H_3 den Werth:

$$10)\quad H_3 = \left(n + \frac{1}{2}\right) c^2 . \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} (\omega + \varphi)}.$$

Um den Grenzwerth H_4 zu finden, hat man in den letzteren vier Gleichungen die Grösse $+\varphi$ mit der Grösse $-\varphi$ zu vertauschen, und erhält — je nachdem der Winkel ω grösser oder kleiner ist als $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$ — die Gleichungen:

$$11)\quad H_4 = \left(n + \frac{1}{2}\right) c^2 . \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

$$12)\quad H_4 = \left(n + \frac{1}{2}\right) c^2 . \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} (\omega - \varphi)}.$$

Bei Vergleichung der für H_3 und H_4 gefundenen Ausdrücke erkennt man sofort, dass unter allen Umständen H_3 kleiner ist als H_4. Da ferner der Grenzwerth H_2 unendlich gross ist, so kann der Grenzzustand des Gleichgewichtes nur auf die Weise eintreten, dass $H_1 = H_4$ wird. Wenn also — wie hier vorausgesetzt werden soll — der Winkel ω kleiner ist als $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$, so hat man, um die der Grenze des Gleichgewichtszustandes entsprechende Gewölbstärke c zu finden, die in den Gleichungen 4) und 12) gefundenen beiden Ausdrücke einander gleich zu setzen, und erhält daraus für n die Gleichung:

$$13)\quad (3n^2 - 1) c^2 . \frac{\operatorname{tg} \omega^2}{6} = \left(n + \frac{1}{2}\right) c^2 . \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} (\omega - \varphi)}, \qquad \text{oder:}$$

$$14)\quad \frac{3n^2 - 1}{6n + 3} = \frac{1}{\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} (\omega - \varphi)}.$$

Wenn man den auf der rechten Seite dieser letzteren Gleichung stehenden Ausdruck abkürzungsweise mit ε bezeichnet, so nimmt dieselbe für n aufgelöst die folgende Form an:

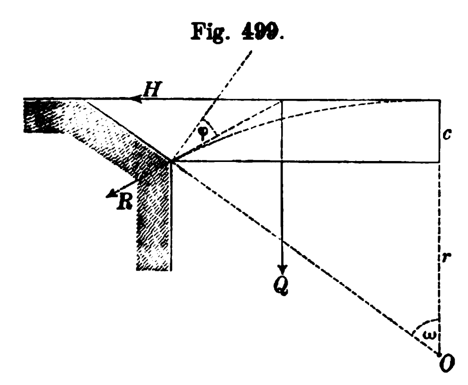
$$15)\quad n = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon + \frac{1}{3}}.$$

Für $\varphi = 30°$ ergeben sich aus dieser Gleichung die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\omega = 60°$	$50° 20'$	$42° 50'$	$37° 35'$	$31° 50'$	$30°$
$n = 2{,}5275$	5	10	20	100	∞.

Den auf solche Weise berechneten Werthen der Verhältnisszahl $n = \frac{r}{c}$ entspricht eine Gewölbstärke c, bei welcher das scheitrechte Gewölbe an der Grenze des Gleichgewichtszustandes sich befinden würde. Diesem Grenzzustande entspricht die in Fig. 499 dargestellte Lage der Stützlinie, wobei zugleich der Winkel, welchen die Mittelkraft R von den beiden Kräften H und Q mit der Normalen der Widerlagerfuge einschliesst, die Grösse des Reibungswinkels erreicht. Bei noch kleinerer Gewölbstärke würde der Einsturz auf die Weise erfolgen: dass die Scheitelfuge an der unteren Seite, und die Widerlagerfuge an der oberen Seite sich öffnet, wobei zugleich ein Gleiten längs der Widerlagerfuge nach aufwärts eintreten würde. Die obige Tabelle zeigt zugleich, dass ein solcher Einsturz überhaupt nicht mehr möglich sein würde, wenn der Winkel, den die Widerlagerfuge mit der Verticalen einschliesst, kleiner ist als der Reibungswinkel.

Fig. 499.



§ 153.

Ableitung einer practischen Formel für die Gewölbstärke.

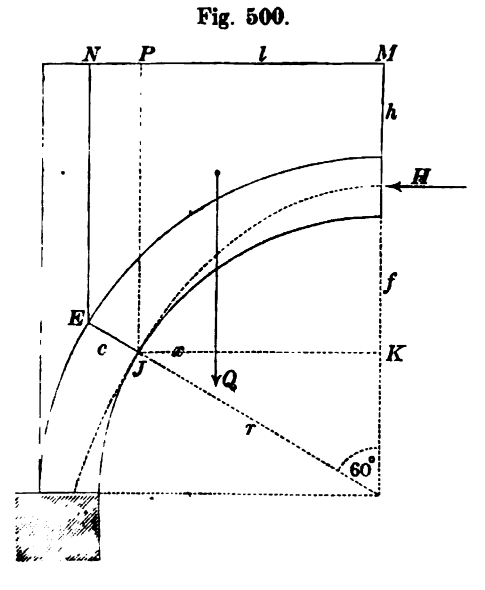
Die nach den Gleichungen der letzteren Paragraphen zu berechnenden Werthe der Gewölbstärke c dürfen nur als vorläufige Annäherungswerthe für die wirklich erforderliche Gewölbstärke betrachtet werden, insofern dieselben nur in dem Falle als wirklich

genügende Werthe der Gewölbstärke würden gelten können, wenn der Gewölbbogen aus einem absolut festen Materiale bestände.

Bei Betrachtung der in Fig. 496 und Fig. 499 dargestellten Stützlinie erkennt man sogleich, dass bei dem dort angenommenen Grenzzustande des Gleichgewichtes sowohl in der Scheitelfuge, als auch in der Bruchfuge resp. Widerlagerfuge, der Druck — anstatt auf eine Fläche sich zu vertheilen — auf eine Linie (oder Kante) sich concentriren würde, wobei für den Druck pro Flächeneinheit an diesen Stellen ein unendlich grosser Werth sich ergeben würde. Um eine practisch brauchbare Formel für die Gewölbstärke zu erhalten, hat man auf die Festigkeit des Materials Rücksicht zu nehmen und zu den oben gefundenen Gleichungen noch die Bedingung hinzuzufügen: dass die Druckspannung pro Flächeneinheit an keiner Stelle grösser sein darf als die practisch zulässige Druckspannung für das betreffende Material.

Die Tabelle des § 151 zeigt, dass im Halbkreisgewölbe der Bruchwinkel — bei solchen Gewölbstärken, wie sie in practisch ausgeführten Gewölbe-Constructionen vorzukommen pflegen — in der Regel nur wenig von 60° verschieden ist. Wenn man demgemäss annimmt, dass die Bruchfuge um einen Winkel von 60 Graden gegen die Verticale geneigt ist, so kann man einen Annäherungswerth für den in der Scheitelfuge wirkender Horizontaldruck nach Fig. 500 berechnen, indem man den Mittelpunkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt desselben betrachtet und das statische Moment der Kraft H in Bezug auf den Drehpunkt J gleich dem statischen Momente des Gewichtes Q setzt, aus der Gleichung:

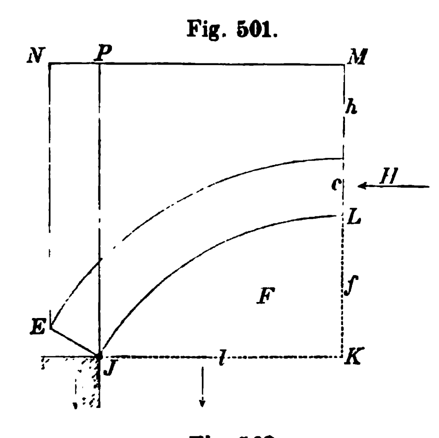
Fig. 500.



$$1)\quad H\left(f+\frac{c}{2}\right)=Q\,.\,x.$$

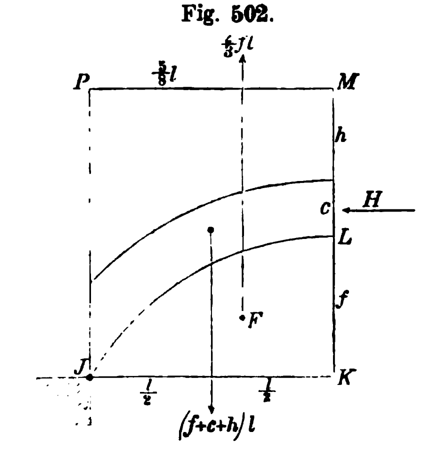
Dem auf solche Weise zu berechnenden Horizontaldrucke würde die in Fig. 500 angegebene Lage der Stützlinie entsprechen.

Fig. 501.



Indem man alsdann bei der Berechnung von Q das Gewicht des Stückes $JENP$ vernachlässigt, begeht man einen Fehler, welcher insofern als unschädlich betrachtet werden kann, als der Einfluss desselben darin bestehen wird, den Werth von H etwas zu vergrössern und für die Stützlinie eine solche Lagenveränderung herbeizuführen, bei welcher dieselbe mehr in das Innere des Bogens hineinrückt (Fig. 501).

Fig. 502.



Da ferner der Kreisbogen LJ annäherungsweise als Parabelbogen betrachtet werden darf, so kann die in Fig. 501 mit F bezeichnete Fläche LKJ gleich $\frac{2}{3} fl$, und der Abstand ihrer Schwerpunkts-Verticalen von dem Punkte J gleich $\frac{5}{8} l$ gesetzt werden.*) Hiernach erhält man aus Fig. 502, indem man die Fläche $LMPJ$ als Differenz zwischen der Rechteckfläche $KMPJ$ und der Parabelfläche KLJ behandelt, die Gleichung:

$$2)\quad H\left(f+\frac{c}{2}\right)=(f+c+h)\frac{l^2}{2}-\frac{5}{12}fl^2,$$

welche der Voraussetzung entspricht, dass das Belastungsmaterial dasselbe specifische Gewicht hat, wie das Gewölbbogenmaterial, dass ferner als Krafteinheit das Gewicht dieses Materials pro Cubikeinheit, und als Längeneinheit die rechtwinkelig zur Bildfläche gerichtete Dimension der Masse gewählt wird. Wenn statt

*) Analytische Mechanik, (2. Aufl.) § 73.

dessen angenommen wird, dass diese letztere Dimension 1 Meter beträgt, und dass das Gewicht des Materials pro Cubikmeter die Grösse γ hat, so ist auf der rechten Seite der obigen Gleichung noch der Factor „γ“ hinzuzufügen, und man erhält durch Auflösung derselben für H den Werth:

$$3)\quad H = \gamma l^2 \left\{ \frac{f + 6\,(c + h)}{12 f + 6\,c} \right\}.$$

Da der Flächeninhalt der Scheitelfugenfläche, auf welche der Horizontaldruck H gleichförmig sich vertheilt, die Grösse $c\,.\,1$ hat, so ist zugleich:

$$4)\quad H = S\,.\,c$$

zu setzen, wenn die practisch zulässige Druckspannung pro Quadratmeter dieser Fläche mit S bezeichnet wird.

Da erfahrungsgemäss feststeht, dass schwereres Baumaterial im Allgemeinen eine grössere Druckfestigkeit besitzt, als leichteres, so ist es — innerhalb der Grenzen, welche hier in Betracht kommen — zulässig, die Grösse S proportional der Grösse γ anzunehmen. Da ferner die von den mobilen Belastungen hervorgebrachten Erschütterungen, sowie auch die von denselben verursachten Schwankungen der Stützlinie, bei grösseren Gewölbe-Constructionen eine weniger nachtheilige Wirkung ausüben als bei kleineren, so darf man ausserdem die Grösse S annäherungsweise der Gewölbstärke c proportional setzen. Hiernach würde die Grösse S zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$5)\quad S = k\,.\,\gamma\,.\,c,$$

in welcher k einen numerischen Erfahrungscoefficienten bedeutet, welcher nach practisch ausgeführten, bewährten Gewölbeconstructionen festzustellen ist und erfahrungsgemäss gleich 25 gesetzt werden kann. Nach Gleichung 4) ist also:

$$6)\quad H = 25\,.\,\gamma\,.\,c^2$$

zu setzen, und wenn man diesen Werth für H in Gleichung 3) substituirt, so erhält man für die Gewölbstärke c die folgende Gleichung:

$$7)\quad c^2 = l^2 \left\{ \frac{f + 6\,(c + h)}{300\,.\,f + 150\,.\,c} \right\}.$$

Um die Grösse c aus dieser Gleichung zu berechnen, hat man zunächst abkürzungsweise den Ausdruck:

$$8)\quad 300\,.\,f + 150\,.\,c = C$$

zu setzen und nach Substitution desselben alsdann der obigen Gleichung die folgende Form zu geben:

$$9)\quad c^2 - 2c \cdot \frac{3l^2}{C} = \frac{l^2(f+6h)}{C}.$$

Indem man diese Gleichung als quadratische Gleichung behandelt, erhält man durch Auflösung derselben für c den Werth:

$$10)\quad c = \frac{3l^2}{C} + \sqrt{\left(\frac{3l^2}{C}\right)^2 + \frac{l^2(f+6h)}{C}}.$$

Mittelst der beiden Gleichungen 8) und 10) kann man nunmehr die Grösse c auf folgende Weise berechnen. Indem man zuerst das Glied $150 \cdot c$ in Gleichung 8) vernachlässigt und demgemäss $C = 300 \cdot f$ setzt, findet man aus Gleichung 10) zunächst einen Annäherungswerth für die Grösse c. Nach Substitution dieses Annäherungswerthes kann man aus Gleichung 8) den genaueren Werth von C berechnen, und mit Benutzung dieses letzteren findet man nachher aus Gleichung 10) den genaueren Werth von c, worauf — falls dies erforderlich scheint — die obige Correction noch ein Mal wiederholt werden kann.

Die in den obigen Gleichungen mit f und l bezeichneten Grössen sind nach Fig. 501 und Fig. 500 zu berechnen aus den Gleichungen:

$$11)\quad f = r(1 - \cos 60°) = 0{,}5 \cdot r,$$

$$12)\quad l = r \cdot \sin 60° = 0{,}866 \cdot r,$$

welche nicht nur für volle Halbkreis-Gewölbe gelten, sondern überhaupt für alle Kreisbogen-Gewölbe, deren halber Centri-Winkel α zwischen 90° und 60° beträgt. Wenn dagegen dieser Winkel α kleiner ist als 60°, so hat man für jene Grössen die unmittelbar gegebenen Werthe: $f = r\,(1 - \cos\alpha)$ und $l = r \sin\alpha$ zu substituiren.

Hiernach würde man aus den obigen Gleichungen für $r = 0$ den Werth $c = 0$ erhalten und überhaupt für sehr kleine Halbmesser einen Werth, welcher für die practische Ausführung als zu klein verworfen werden müsste. Es empfiehlt sich daher aus practischen Gründen: zu der berechneten (von r abhängigen) Grösse c noch das constante (von r unabhängige) Glied c_0 hinzuzufügen, und die definitiv zu wählende Gewölbstärke aus der Gleichung:

$$13)\quad \mathfrak{c} = c_0 + c$$

zu berechnen, in welcher $c_0 = 0^m,1$ gesetzt werden kann, als Minimum der practisch ausführbaren Gewölbstärke, oder derjenige Grenzwerth, welchen die Grösse c erreichen soll, wenn $r = 0$ wird.

Für die in Gleichung 10) mit h bezeichnete Grösse hat man diejenige Belastungshöhe einzusetzen, welche man erhält, indem man sich die mobile Belastung durch eine Belastungsschicht vom specifischen Gewichte des Gewölbmaterials repräsentirt denkt und die Höhe dieser Schicht zu der permanenten Belastungshöhe hinzu addirt.

Um z. B. für ein Halbkreisgewölbe, dessen innerer Halbmesser: $r = 2^m$ und dessen totale Belastungshöhe: $h = 1^m$ beträgt, die erforderliche Gewölbstärke zu berechnen, hat man nach Gleichung 11) und Gleichung 12) die Werthe: $f = 1^m$ und $l = 1^m,732$ zu substituiren. Man erhält dann nach Gleichung 8), indem man zunächst das Glied 150 . c vernachlässigt, für die Grösse C den Annäherungswerth $C = 300$. Mit Benutzung desselben findet man aus Gleichung 10) für die Grösse c den Annäherungswerth $c = 0,296$. Hiernach ergiebt sich aus Gleichung 8) der genauere Werth: $C = 344$, und nach Substitution desselben erhält man aus Gleichung 10) den genaueren Werth: $c = 0,275$. Für die wirklich zu wählende Gewölbstärke ergiebt sich nunmehr aus Gleichung 13) der Werth:

$$\mathrm{c} = 0,1 + 0,275 = 0^m,375.$$

Für $r = 10^m$ und $h = 1^m$ würde man auf gleiche Weise, indem man $f = 5^m$ und $l = 8^m,66$ setzt, zunächst die Annäherungswerthe: $C = 1500$ und $c = 0,892$ erhalten. Die Anwendung des oben erklärten Correctionsverfahrens führt alsdann zu den genaueren Werthen: $C = 1629$ und $c = 0,863$. Hiernach ergiebt sich für die wirklich zu wählende Gewölbstärke in diesem Falle der Werth:

$$\mathrm{c} = 0,1 + 0,863 = 0^m,963.$$

Wenn man ein anderes Mal $r = 2^m$ und $h = 10^m$ setzt, so erhält man auf dieselbe Weise den Werth: $\mathrm{c} = 0^m,795$.

Für einen Gewölbbogen, dessen halber Centriwinkel α nur 30 Grad beträgt, ist: $f = r(1 - \cos 30^0) = 0,134\ r$ und $l = r \,.\, \sin 30^0 = 0,5 \,.\, r$ zu setzen. Wenn also die Spannweite 10 Meter beträgt, so ist $r = 10^m$ zu setzen; folglich wird für diesen Fall: $f = 1^m,34$ und $l = 5^m$. Hiernach erhält man für $h = 1^m$ aus den obigen Gleichungen zunächst die Annäherungswerthe $C = 402$ und $c = 0,887$. Die Anwendung des oben erklärten Correctionsverfahrens führt alsdann zu den genaueren Werthen: $C = 517$ und $c = 0,760$. Für die wirklich erforderliche Gewölbstärke ergiebt sich hiernach der Werth: $\mathrm{c} = 0^m,860$.*)

*) Vergl.: v. Kaven, „Vorträge über Ingenieur-Wissenschaften". Erste Abtheilung: „Wegebau". (Zweite Auflage. Hannover. Carl Rümpler.) Das oben erklärte Verfahren ist dasjenige, welches v. Kaven bei Ableitung seiner (im zwölften Abschnitte des Anhanges aufgestellten) empirischen Formeln anwendete.



Die obigen Gleichungen würden auch bei Halbmessern von mehreren tausend Metern noch einen bestimmten endlichen Werth für die Gewölbstärke ergeben, obwohl nach § 130 ein Gewölbbogen von solchen Dimensionen die Grenzen der Ausführbarkeit weit überschreiten würde. Die obige Berechnungsmethode ist daher — wie überhaupt die Anwendung empirischer Formeln — nur bedingungsweise zu empfehlen, und man darf keineswegs erwarten, immer brauchbare Werthe mittelst derselben zu erhalten. Vielmehr wird man — insbesondere bei grösseren Spannweiten und Belastungshöhen — die mittelst jener Methode berechneten Werthe stets nur als vorläufige Annäherungswerthe betrachten dürfen, welche noch einer näheren Prüfung und einer Correction mittelst der früher entwickelten Theorien unterworfen werden müssen. Bei diesem Corretionsverfahren wird man dahin zu streben haben, für die Gewölbstärke wo möglich eine solche Grösse aufzufinden, bei welcher die Stützlinie ganz in das innere Drittel des Bogens hineingelegt werden kann, und bei welcher zugleich die practisch zulässige Druckspannung an keiner Stelle überschritten wird.

ACHTER ABSCHNITT

Hydraulik.

---

§ 154.

Definitionen.

Die flüssigen Körper können betrachtet werden als elastische Körper, in welchen die Widerstände gegen Zug-Kräfte, sowie die Widerstände gegen Abscheerungs-Kräfte gänzlich fehlen, und bei welchen zugleich der Reibungscoefficient der Ruhe die Grösse Null hat. Auf ein Flächenelement im Innern einer flüssigen Masse können daher von den anliegenden Theilchen derselben nur Druck-Kräfte übertragen werden, welche rechtwinkelig gegen das Flächenelement gerichtet sind.

Wenn man sich durch die flüssige Masse eine ebene Schnittfläche hindurchgelegt denkt und die Summe der von der einen oder von der andern Seite her gegen den beliebig gewählten Theil F dieser Fläche wirkenden Druckkräfte mit P bezeichnet, so wirkt auf jede Flächeneinheit dieser Fläche durchschnittlich der Druck $\frac{P}{F}$. Denkt man sich die Fläche F allmählich abnehmend und schliesslich zu einem Punkte zusammenschrumpfend, so erkennt man, dass der Quotient $\frac{P}{F}$ alsdann einem bestimmten Grenzwerthe:

$$1)\quad p = \lim. \left(\frac{P}{F}\right)$$

sich nähern wird. Dieser feste Grenzwerth p wird der Druck pro Flächeneinheit in jenem Punkte genannt. Die Grösse dieses Druckes ist unabhängig von der Richtung desselben, d. h. unabhängig von der Richtung der Normalen jener Druckfläche.*)

*) Vergl. § 137 und „Technische Mechanik“, Cap. XXVIII.

Wenn ferner mit M die in einem bestimmten Raumtheile J enthaltene Masse bezeichnet wird, so ist in jeder Cubikeinheit dieses Rauminhaltes durchschnittlich die Masse $\frac{M}{J}$ enthalten. Denkt man sich den Rauminhalt J allmählich abnehmend und endlich bis auf einen Punkt zusammenschrumpfend, so erkennt man, dass jener Quotient $\frac{M}{J}$ alsdann einem bestimmten Grenzwerthe:

$$2) \quad \mu = \lim. \left(\frac{M}{J}\right)$$

sich nähern wird. Dieser feste Grenzwerth μ wird die Masse pro Cubikeinheit oder die Dichtigkeit der Flüssigkeit in jenem Punkte genannt.

Ausser den inneren (Druck-)Kräften, welche die benachbarten Flüssigkeitstheilchen in ihren Grenzflächen auf einander gegenseitig übertragen, werden im Allgemeinen auch noch äussere Kräfte vorhanden sein, welche aus der Ferne her auf die Massentheilchen der Flüssigkeit einwirken. Von diesen äusseren Kräften wird vorausgesetzt, dass Richtung und Grösse derselben nur von den Orten der Massentheilchen abhängen und mit den Coordinaten dieser Orte stetig sich ändern. Die auf einen bestimmten Massentheil wirkenden äusseren Kräfte werden alsdann um so mehr als ein durch eine Mittelkraft darstellbares System von Parallelkräften betrachtet werden dürfen, je kleiner dieser Massentheil angenommen wird. Wenn mit K die Grösse dieser Mittelkraft für das Massentheilchen M bezeichnet wird, so ist $\frac{K}{M}$ die Kraft, welche durchschnittlich auf jede Masseneinheit dieser Masse M wirkt. Denkt man sich die Masse M allmählich abnehmend und den von derselben ausgefüllten Raum auf einen Punkt zusammenschrumpfend, so erkennt man, dass jener Quotient $\frac{K}{M}$ alsdann einem bestimmten Grenzwerthe:

$$3) \quad \varkappa = \lim. \left(\frac{K}{M}\right)$$

sich nähern wird. Dieser feste Grenzwerth $\varkappa$ wird die in jenem Punkte wirkende Kraft pro Masseneinheit genannt.

Die auf solche Weise definirten Grössen $p, \mu, \varkappa$ sind als stetige Functionen der Coordinaten zu betrachten. Wenn also mit u der Werth bezeichnet wird, welchen eine dieser Grössen in demjenigen Punkte hat, dessen Coordinaten x, y, z sind, und mit Δu der

Zuwachs, welchen die Grösse u erhält, wenn die Coordinate x um die Grösse Δx vergrössert wird, so kommt auf jede Längeneinheit der Strecke Δx durchschnittlich die Zunahme $\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Der partielle Differenzialquotient:

$$4) \quad \frac{du}{dx} = \lim. \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

bedeutet also die Zunahme der Grösse u pro Längeneinheit in der Richtung der X-Achse für jene Stelle. Um die unendlich kleine Aenderung zu erhalten, welche die Grösse u erleidet, wenn die Coordinate x um die unendlich kleine Grösse dx zunimmt, hat man demnach jenen Differenzialquotienten mit der Grösse dx zu multipliciren. Auf analoge Weise sind die Aenderungen der Grösse u in Bezug auf die Richtungen der anderen beiden Coordinaten-Achsen zu bestimmen.

§ 155.

Allgemeine Differenzialgleichung des hydrostatischen Druckes.

Wenn mit μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, mit p der Druck pro Flächeneinheit, mit $\varkappa$ die Kraft pro Masseneinheit bezeichnet wird in demjenigen Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, so können die auf ein daselbst befindliches Flüssigkeitstheilchen wirkenden Kräfte auf folgende Weise berechnet werden. Denkt man sich das von diesem Theilchen erfüllte Raumelement dJ von der Form eines Parallelepipedons, dessen Kanten dx, dy, dz sind, so erhält man für die in diesem Raumelemente enthaltene Masse dM den Ausdruck:

$$1) \quad dM = \mu \,.\, dJ = \mu \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

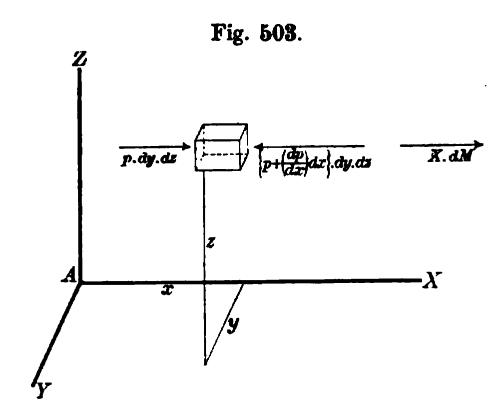
Auf dieses Massenelement wirkt von aussen her die Kraft: $\varkappa \,.\, dM$. Wenn also mit X, Y, Z die drei Seitenkräfte der Kraft $\varkappa$ bezeichnet werden, so ergiebt sich für die in der Richtung AX auf das Massenelement wirkende Seitenkraft der in Fig. 503 angegebene Werth: $X \,.\, dM$. Ausserdem wirken auf dieses Massenelement noch die rechtwinkelig gegen die Seitenflächen des Parallelepipedons gerichteten Flächendrücke, und zwar parallel zur Achse AX die Drücke gegen diejenigen beiden Seitenflächen, welche der Ebene AYZ parallel sind. Nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung ergeben sich für diese beiden Flächendrücke die in Fig. 503 angegebenen Werthe.

Indem man nunmehr die algebraische Summe sämmtlicher parallel zur Achse AX gerichteten Seitenkräfte gleich Null setzt, erhält man die Gleichung:

$$2)\quad 0 = X \,.\, dM - \left(\frac{dp}{dx}\right) . \, dx \,.\, dy \,.\, dz,$$

und wenn man hierin für dM den in Gleichung 1) angegebenen Werth substituirt, so erhält man für den partiellen Differenzialquotienten von p, nach x genommen, den folgenden Ausdruck:

Fig. 503.



$$3)\quad \frac{dp}{dx} = \mu \,.\, X.$$

Auf gleiche Weise findet man in Bezug auf die anderen beiden Coordinaten-Achsen die Gleichungen:

$$4)\quad \frac{dp}{dy} = \mu \,.\, Y,$$

$$5)\quad \frac{dp}{dz} = \mu \,.\, Z.$$

Nachdem auf solche Weise die Werthe der drei partiellen Differenzialquotienten gefunden sind, kann man das totale Differenzial von p berechnen aus der Gleichung:

$$6)\quad dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz,$$

welche nach Substitution der obigen drei Ausdrücke die folgende Form annimmt:

$$7)\quad dp = \mu \left\{ X dx + Y dy + Z dz \right\},$$

und in dieser Form die allgemeine Gleichgewichtsbedingung einer ruhenden flüssigen Masse oder das hydrostatische Grundgesetz darstellt.

Diese Gleichung kann man auf zweierlei Weise benutzen, um das Gesetz zu finden, nach welchem der Druck pro Flächeneinheit im Innern der flüssigen Masse sich ändert. Wenn man für die Grössen μ, X, Y, Z, welche nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung als Functionen der Coordinaten zu betrachten sind, die dem gegebenen Falle entsprechenden Ausdrücke in der obigen Gleichung substituirt, so erhält man durch Integration derselben eine Gleichung von der Form:

$$8)\quad p = F(x, y, z),$$

welche die Grösse p als Function der drei Coordinaten x, y, z darstellt und in dieser Form zur Berechnung des in jedem beliebigen gegebenen Punkte stattfindenden Druckes pro Flächeneinheit direct benutzt werden kann.

Wenn man ein anderes Mal in der obigen Gleichung die Grösse dp — als diejenige unendlich kleine Druck-Aenderung, welche den beliebig gewählten unendlich kleinen Coordinaten-Aenderungen dx, dy, dz entspricht — gleich Null setzt, so werden durch diese Bedingungsgleichung jene Coordinaten-Aenderungen in solcher Weise beschränkt, dass die Grössen dx, dy, dz nunmehr ausschliesslich solche Combinationen von Coordinaten-Aenderungen repräsentiren, mit welchen keine Aenderung des Druckes p verbunden ist. Die Gleichung:

$$9)\quad X dx + Y dy + Z dz = 0$$

ist demnach als Differenzialgleichung eines Flächenelementes zu betrachten, welches einer Fläche constanten Druckes (oder einer sogenannten Niveau-Fläche) angehört, und durch Integration derselben erhält man eine Gleichung von der Form:

$$10)\quad f(x, y, z) = \text{Const.},$$

welche die Gleichung der Fläche selbst darstellt. Jedem Werthe der Constanten entspricht eine besondere Niveau-Fläche. Dem Uebergange von einer Fläche zur andern entspricht eine Aenderung des Druckes. In den Punkten einer und derselben Niveau-Fläche aber hat der Druck überall gleiche Grösse. Zugleich ergiebt sich aus § 46 der „analytischen Mechanik“ (2. Aufl.), dass die oben mit $\varkappa$ bezeichnete Mittelkraft der drei Kräfte X, Y, Z in jedem Punkte der Fläche rechtwinkelig zu derselben gerichtet ist.

§ 156.

Einfluss der Schwerkraft auf den Druck tropfbar flüssiger Körper.

Bei allen flüssigen Körpern wächst die Dichtigkeit mit zunehmendem Drucke. Bei den sogenannten „tropfbaren Flüssigkeiten“, als deren Repräsentant das Wasser betrachtet werden kann, sind jedoch diese Dichtigkeitsänderungen so klein, dass unter gewöhnlichen Verhältnissen bei solchen Flüssigkeiten die Dichtigkeit μ als eine nach Raum und Zeit unveränderliche Grösse behandelt werden darf. Für den Fall, dass die von aussen her auf die Massentheilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte in den

Gewichten derselben bestehen, hat man die im vorigen Paragraphen mit $\varkappa$ bezeichnete Kraft pro Masseneinheit gleich g zu setzen, und wenn zugleich das Coordinaten-System so gelegt wird, dass die Achse AZ mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, so wird:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = g.$$

Nach Substitution dieser Werthe nimmt die im vorigen Paragraphen gefundene allgemeine Differenzialgleichung die folgende Form an:

$$1) \quad dp = \mu\, g\, dz.$$

Hierin bedeutet das Product μg das Gewicht einer Masse, deren Rauminhalt gleich der Cubikeinheit ist. Wenn also mit γ das Gewicht der Flüssigkeit pro Cubikeinheit bezeichnet wird, so ist $\mu g = \gamma$ zu setzen, und es wird:

$$2) \quad dp = \gamma \,.\, dz.$$

Indem man hierin $dp = 0$ setzt, erhält man für die Niveau-Flächen oder die Flächen constanten Druckes die Gleichung:

$$3) \quad dz = 0, \quad \text{oder:} \quad z = \text{Const.}$$

Die Niveau-Flächen sind also in diesem Falle horizontale Ebenen. Jedem bestimmten Werthe der Constanten entspricht eine bestimmte Horizontal-Ebene, in deren Punkten der Druck p eine bestimmte überall gleiche Grösse hat. Diejenige Horizontal-Ebene, in welcher der Druck p die Grösse Null hat, bildet die freie Oberfläche der Flüssigkeit. Wenn also der Anfangspunkt des Coordinaten-Systems in die freie Oberfläche gelegt wird, so ist $p = 0$ zu setzen für $z = 0$, und durch Integration der Gleichung 2) erhält man für den von der Schwere hervorgebrachten hydrostatischen Druck pro Flächeneinheit im Abstande z von der freien Oberfläche die folgende Gleichung:

$$4) \quad p = \gamma \,.\, z.$$

Der Druck gegen ein im Abstande z von der freien Oberfläche befindliches Flächenelement dF hat also die Grösse:

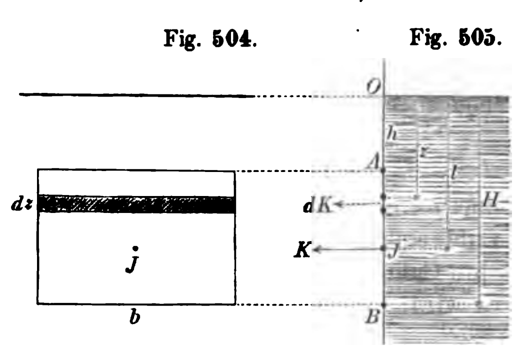
$$5) \quad p \,.\, dF = \gamma z\, dF.$$

Da der Gleichgewichtszustand der Flüssigkeit nicht gestört wird, wenn durch dieselbe eine feste Wandfläche hindurchgelegt wird, so erkennt man, dass die obige Gleichung auch dann noch gültig bleibt, wenn das Flächenelement der inneren Wandfläche eines die Flüssigkeit enthaltenden Gefässes angehört.

§ 157.

Druck des Wassers gegen ebene Flächen.

Um den Gesammtdruck des Wassers gegen eine verticale Rechteckfläche zu berechnen, hat man sich dieselbe auf die in Fig. 504 angedeutete Weise in horizontale Streifen von unendlich kleiner Höhe zerlegt zu denken, und die gegen die einzelnen Flächenstreifen wirkenden Drücke zusammen zu addiren (Fig. 505). Der Druck gegen den in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel befindlichen Streifen hat nach Gleichung 5) des vorigen Paragraphen die Grösse:



$$1)\quad dK = \gamma z \,.\, b\, dz.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man für den Druck gegen die ganze Fläche AB den Ausdruck:

$$2)\quad K = \gamma b \int_h^H z\, dz = \gamma b \left(\frac{H^2 - h^2}{2}\right).$$

Den Abstand des Angriffspunktes J von dem Wasserspiegel findet man — auf dieselbe Weise wie in § 102 der Angriffspunkt des Erddruckes bestimmt wurde — indem man das statische Moment der Kraft K in Bezug auf den Drehpunkt O gleich der Summe der statischen Momente der gegen die einzelnen Flächenstreifen wirkenden Drücke setzt, aus der Gleichung:

$$3)\quad Kl = \int \gamma z b\, dz \,.\, z, \quad \text{oder:}$$

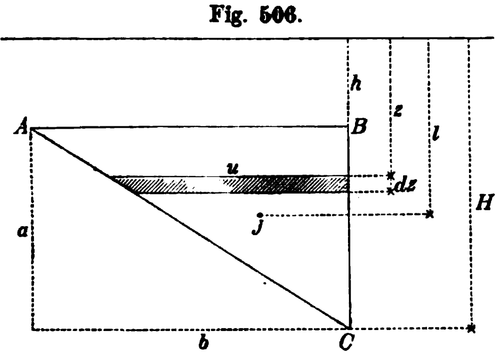
$$4)\quad Kl = \gamma b \int_h^H z^2\, dz = \gamma b \left(\frac{H^3 - h^3}{3}\right).$$

Wenn man hierin für K den oben gefunden Ausdruck einsetzt, so erhält man für den Hebelarm l den Werth:

$$5)\quad l = \frac{2}{3}\left(\frac{H^3 - h^3}{H^2 - h^2}\right).$$

Auf analoge Weise kann der Druck gegen die in Fig. 506 dargestellte Dreieckfläche ABC berechnet werden. Der Druck des Wassers gegen den im Abstande z vom Wasserspiegel befindlichen Flächenstreifen hat die Grösse:

Fig. 506.



$$6)\quad dK = \gamma z \,.\, u\,dz = \gamma z b \left(\frac{H-z}{H-h}\right) dz,$$

und durch Integration dieser Gleichung erhält man für den Druck gegen die ganze Dreieckfläche den Ausdruck:

$$7)\quad K = \frac{\gamma b}{H-h} \int_h^H (H-z)\,z\,dz, \quad \text{oder:}$$

$$8)\quad K = \frac{\gamma b}{H-h} \left\{ H\left(\frac{H^2-h^2}{2}\right) - \left(\frac{H^3-h^3}{3}\right)\right\},$$

welchem man nach Substitution des Werthes $H - h = a$ auch die folgende einfachere Form geben kann:

$$9)\quad K = \frac{\gamma b\,(a^2 + 3ah)}{6}.$$

Der Abstand des Angriffspunktes J vom Wasserspiegel ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$10)\quad Kl = \int_{z=h}^{z=H} dK \,.\, z = \frac{\gamma b}{H-h} \int_h^H (H-z)\,z^2\,dz, \quad \text{oder:}$$

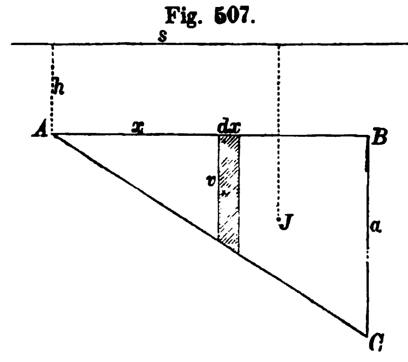
$$11)\quad Kl = \frac{\gamma b}{H-h} \left\{ \frac{H(H^3-h^3)}{3} - \left(\frac{H^4-h^4}{4}\right)\right\},$$

aus welcher man nach Substitution des oben für K gefundenen Ausdruckes, indem man zugleich wieder $H - h = a$ setzt, für l den folgenden Werth erhält:

$$12)\quad l = \frac{6h^2 + 4ah + a^2}{6h + 2a}.$$

Um die andere Coordinate des Angriffspunktes J zu finden, hat man sich die Dreieckfläche auf die in Fig. 507 angedeutete Weise in verticale unendlich schmale Flächenstreifen zerlegt zu denken. Der Druck gegen den im Abstande x von dem Eckpunkte A befindlichen Streifen hat nach Gleichung 2) des vorigen Paragraphen die Grösse:

Fig. 507.



$$13)\quad dK = \gamma\, dx \left\{\frac{(h+v)^2 - h^2}{2}\right\},$$

und indem man das statische Moment der Kraft K in Bezug auf die Verticale des Punktes A gleich der Summe der statischen Momente der gegen die einzelnen Flächenstreifen wirkenden Drücke setzt, erhält man die Gleichung:

$$14)\quad Ks = \int \gamma\, dx \left\{\frac{(h+v)^2 - h^2}{2}\right\} x,$$

welcher man nach Substitution des Werthes $v = \frac{a}{b} \cdot x$ auch die folgende Form geben kann:

$$15)\quad Ks = \frac{\gamma a}{2 b^2} \int_0^b (2bhx + ax^2)\, x\, dx, \quad \text{oder:}$$

$$16)\quad Ks = \gamma a b^2 \left(\frac{h}{3} + \frac{a}{8}\right).$$

Wenn man hierin für K den oben gefundenen Ausdruck einsetzt, so erhält man für s den Werth:

$$17)\quad s = \left(\frac{8h + 3a}{12h + 4a}\right) b.$$

Aus den Gleichungen 12) und 17) ergeben sich z. B. für $h = 0$ die Werthe: $l = \frac{a}{2}$ und $s = \frac{3}{4} b$.*)

§ 158.

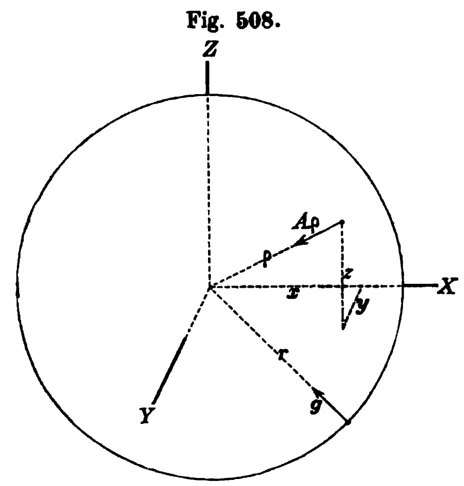
Druck im Innern einer tropfbar flüssigen Kugel.

Nach § 43 der „analytischen Mechanik“ (2. Aufl.) ändert sich die von einer homogenen Kugel auf einen materiellen Punkt aus-

*) Vergl. „Technische Mechanik“, (5. Aufl.) § 172.

geübte Anziehungskraft im Innern der Kugel proportional dem Abstande vom Mittelpunkte derselben. Wenn also mit A der Werth bezeichnet wird, welchen die in § 155 mit $\varkappa$ bezeichnete „Kraft pro Masseneinheit“ im Abstande „Eins“ vom Mittelpunkte annimmt, so ist für die im Abstande ϱ vom Mittelpunkte befindliche Stelle:

Fig. 508.



$$1)\quad \varkappa = A\varrho$$

zu setzen, und für die drei Seitenkräfte dieser Kraft ergeben sich aus Fig. 508 die Werthe:

$$2)\quad X = -A\varrho \cdot \frac{x}{\varrho} = -Ax,$$

$$3)\quad Y = -A\varrho \cdot \frac{y}{\varrho} = -Ay,$$

$$4)\quad Z = -A\varrho \cdot \frac{z}{\varrho} = -Az.$$

Nach Substitution derselben nimmt die allgemeine Differenzialgleichung des hydrostatischen Druckes die folgende Form an:

$$5)\quad dp = -\mu A\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = -\mu A\,\varrho\,d\varrho.$$

Wenn man hierin $dp = 0$ setzt, so erhält man die Gleichung: $d(\varrho^2) = 0$ oder $\varrho = \text{Const.}$, welche zeigt, dass die Flächen constanten Druckes in diesem Falle Kugelflächen sind. Der Gleichung $\varrho = r$ entspricht diejenige Kugelfläche, in welcher der Druck gleich Null ist, nämlich die freie Oberfläche der flüssigen Kugel.

Indem man die obige Gleichung integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen 0 und p, auf der rechten zwischen den zugehörigen Grenzen r und ϱ — gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$6)\quad \int_0^p dp = -\mu A \int_r^\varrho \varrho\,d\varrho, \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad p = \mu A \left(\frac{r^2 - \varrho^2}{2}\right).$$

Wenn mit g der Werth bezeichnet wird, welchen die Grösse $\varkappa$ an der Oberfläche der Kugel annimmt, so ist die Constante A zu berechnen aus der Gleichung:

$$8) \quad Ar = g,$$

und nach Substitution des hieraus für A zu entnehmenden Werthes kann man der vorhergehenden Gleichung die folgende Form geben:

$$9) \quad p = \frac{\mu g r}{2}\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right).$$

Hierin bedeutet das Product μg die Kraft, mit welcher die in der Cubikeinheit enthaltene Flüssigkeitsmasse an der Oberfläche der Kugel von letzterer angezogen wird, und wenn man diese Kraft mit γ bezeichnet, so wird:

$$10) \quad p = \frac{\gamma r}{2}\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right).$$

Für $\varrho = 0$ wird $p = \frac{\gamma r}{2}$. Der Druck pro Flächeneinheit im Mittelpunkte der Kugel beträgt also die Hälfte von demjenigen Drucke, welchen eine Flüssigkeits-Säule, deren Höhe gleich dem Halbmesser der Kugel ist, an ihrer Grundfläche ausüben würde, wenn das Gewicht pro Masseneinheit (oder die Fallbeschleunigung) längs der ganzen Höhe der Säule die constante Grösse g hätte.

Denkt man sich die flüssige Kugel in eine feste Kugel verwandelt, so erkennt man, dass die von derselben ausgeübte Anziehungskraft dabei keine Aenderung erleiden würde. Wenn also die Erde als eine homogene Kugel betrachtet werden dürfte, so würde man die obige Gleichung — indem man darin für γ das Gewicht eines Cubikmeters Wassers setzt — benutzen können, um bei einem mit Wasser gefüllten bis zum Erdmittelpunkte reichenden Schachte den hydrostatischen Druck in einer gegebenen Tiefe daraus zu berechnen.

§ 159.

Relatives Gleichgewicht einer rotirenden Wassermasse.

Eine Wassermasse, welche mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine verticale Drehachse gleichförmig sich dreht, befindet sich in relativem Ruhezustande in Bezug auf einen Raum, welcher die gleiche Drehbewegung ausführt. Um die Bedingungen des relativen Gleichgewichtes zu finden, hat man zu den wirklich vorhandenen Kräften noch die jener Drehbewegung entsprechenden Centrifugalkräfte hinzuzufügen und alsdann die Wassermasse als im absoluten Ruhezustande befindlich anzusehen. Die Centrifugalkraft eines im Abstande ϱ von der Drehachse befindlichen Massentheilchens dM hat die Grösse: $dM\,\varrho\omega^2$; folglich hat die Centrifugalkraft

pro Masseneinheit an dieser Stelle die Grösse $\varrho\,\omega^2$. Die wirklich vorhandene Kraft ist die Schwerkraft, welche pro Masseneinheit überall die Grösse g hat. Hiernach ergeben sich aus Fig. 509 und Fig. 510 für die drei Seitenkräfte der in § 155 mit $\varkappa$ bezeichneten Kraft die Werthe:

Fig. 509.

1) $X = \varrho\,\omega^2 \,.\, \cos\alpha = \omega^2 x,$

2) $Y = \varrho\,\omega^2 \,.\, \sin\alpha = \omega^2 y,$

3) $Z = -g,$

und nach Substitution derselben nimmt die allgemeine Differenzialgleichung des hydrostatischen Druckes die folgende Form an:

4) $dp = \mu\{\omega^2(xdx + ydy) - gdz\},$

oder:

5) $dp = \mu\,\{\omega^2 \,.\, \varrho\, d\varrho - g \,.\, dz\}.$

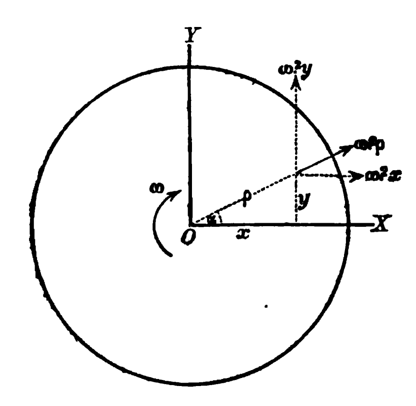


Fig. 510.

Durch Integration dieser Gleichung erhält man für den Druck an der im Abstande ϱ von der Drehachse und in der Höhe z über der Bodenfläche befindlichen Stelle die Gleichung:

6) $p = \mu\left\{\frac{\omega^2\varrho^2}{2} - gz\right\} + \text{Const.}$

Für $\varrho = 0$ und $z = h$ wird $p = 0$; also ist die Constante zu berechnen aus der Gleichung:

7) $0 = -\mu g h + \text{Const.}$

Wenn man diese letztere Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt, so erhält man die Gleichung:

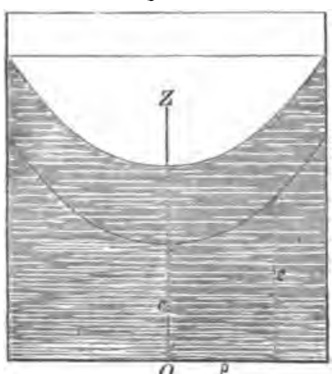
8) $p = \mu\left\{\frac{\omega^2\varrho^2}{2} + g\,(h - z)\right\},$

welcher man nach Substitution der Werthe $\omega\varrho = v$ und $\mu g = \gamma$ auch die folgende Form geben kann:

9) $p = \gamma\left(\frac{v^2}{2g} + h - z\right).$

In dieser Gleichung bedeutet v die Peripheriegeschwindigkeit des im Abstande ϱ von der Drehachse befindlichen Punktes, und $\frac{v^2}{2g}$ die derselben entsprechende Geschwindigkeitshöhe. Wenn die Drehbewegung nicht stattfände, so würde die dem Drucke p entsprechende Druckhöhe die Grösse $h - z$ haben. Die obige Gleichung zeigt also, dass durch den Einfluss der Drehbewegung diese Druckhöhe um jene Geschwindigkeitshöhe vergrössert wird.

Fig. 511.



Wenn man in Gleichung 5) die Grösse dp gleich Null setzt, so kann man derselben die Form geben:

$$10)\quad dz = \frac{\omega^2}{g} \cdot \varrho\, d\varrho,$$

und durch Integration derselben erhält man für die Fläche constanten Druckes die folgende Gleichung:

$$11)\quad z = \frac{v^2}{2g} + c,$$

in welcher die Constante c denjenigen Werth von z bezeichnet, welcher dem Werthe $v = 0$ entspricht, oder die Coordinate desjenigen Punktes, in welchem jene Fläche die Drehachse schneidet (Fig. 511). Die obige Gleichung zeigt, dass die Fläche constanten Druckes eine Paraboloid-Oberfläche bildet, welche man sich durch Umdrehung einer Parabel um ihre Achse entstanden denken kann. Die Höhendifferenz zwischen dem in der Drehachse liegenden Scheitelpunkte und einem ausserhalb der Drehachse befindlichen Punkte dieser Fläche ist stets gleich der Geschwindigkeitshöhe des letzteren. Wenn man in der obigen Gleichung für die Constante c den Werth h einsetzt, so erhält man die Gleichung der freien Oberfläche.

§ 160.

Druck der atmosphärischen Luft.

Während bei den tropfbar flüssigen Körpern die Dichtigkeit μ als eine nach Raum und Zeit unveränderliche Grösse betrachtet werden konnte, hat man bei den gasförmigen Flüssigkeiten — als deren Repräsentant die atmosphärische Luft gelten kann — die Grösse μ als eine Function des Druckes p zu behandeln. Nach

dem Mariotte'schen Gesetze ist im Innern einer ruhenden Gasmasse von constanter Temperatur der Druck überall proportional der Dichtigkeit derselben. Wenn also mit p' der Druck bezeichnet wird, welcher der Dichtigkeit μ' entspricht, so kann das Mariotte'sche Gesetz ausgedrückt werden durch die Gleichung:

$$1)\quad \frac{p}{p'} = \frac{\mu}{\mu'},$$

und nach Substitution des hieraus für die Grösse μ sich ergebenden Werthes nimmt die allgemeine Differenzialgleichung des hydrostatischen Druckes die folgende Form an:

$$2)\quad dp = \frac{\mu'}{p'}\, p\,(X dx + Y dy + Z dz).$$

Um den Einfluss der Schwerkraft auf den atmosphärischen Druck zu bestimmen und das Gesetz zu finden, nach welchem der Luftdruck mit der Höhe über der Erdoberfläche sich ändert, hat man in der obigen Gleichung — indem man sich die Z-Achse vertical aufwärts gerichtet denkt — die Werthe:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -g$$

zu substituiren, und erhält alsdann für die Druckzunahme dp, welche der Höhenzunahme dz entspricht, die Gleichung:

$$3)\quad dp = -\frac{p}{p'} \cdot \mu' g \,.\, dz.$$

Hierin bedeutet das Product $\mu' g = \gamma'$ das Gewicht eines Cubikmeters Luft bei der dem Drucke p' entsprechenden Dichtigkeit. Nach Substitution dieses Werthes kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$4)\quad dz = -\frac{p'}{\gamma'} \cdot \frac{dp}{p},$$

und wenn man dieselbe nunmehr integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen z_1 und z_2, auf der rechten zwischen den zugehörigen Grenzen p_1 und p_2 — so erhält man die Gleichung:

$$5)\quad \int_{z_1}^{z_2} dz = -\frac{p'}{\gamma'} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}, \quad \text{oder:}$$

$$6)\quad z_2 - z_1 = \frac{p'}{\gamma'} \cdot \lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Bei mittlerem Barometerstande hat in der Höhe des Meeresspiegels der atmosphärische Druck pro Quadratmeter die Grösse:

7) $p' = 10\,336$ Kil.,

und bei der Temperatur Null Grad (Celsius) hat das Gewicht eines Cubikmeters Luft von der diesem Drucke entsprechenden Dichtigkeit die Grösse:

8) $\gamma' = 1{,}293$ Kil.

Der Quotient $\frac{p'}{\gamma'}$ hat also für atmosphärische Luft bei einer Temperatur von Null Grad die Grösse:

$$9)\quad \frac{p'}{\gamma'} = \frac{10\,336}{1{,}293} = 7992.$$

Nach Substitution dieses Werthes nimmt die oben gefundene Gleichung die folgende Form an:

$$10)\quad z_2 - z_1 = 7992 \,.\, \lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Mittelst dieser Gleichung würde man die einem gegebenen Druckverhältnisse entsprechende Höhendifferenz berechnen können, wenn die Luft-Temperatur überall Null Grad betrüge, und die Atmosphäre frei von Wasserdämpfen wäre.

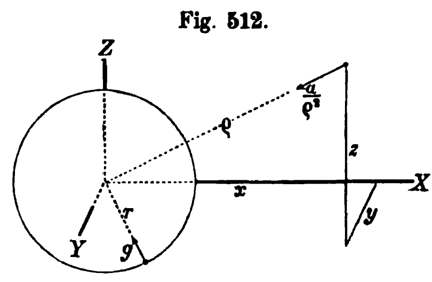
Indem man $dp = 0$ setzt, findet man (auf dieselbe Weise wie in § 156), dass die Flächen constanten Druckes Horizontal-Ebenen sind, und da die Dichtigkeit eine Function des Druckes ist, so sind die Flächen constanten Druckes zugleich Flächen constanter Dichtigkeit.

§ 161.

Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwerkraft.

Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze ändert sich die von der Erdkugel auf einen ausserhalb derselben befindlichen materiellen Punkt ausgeübte Anziehungskraft umgekehrt proportional dem Quadrate seiner Entfernung vom Erdmittelpunkte. Wenn also mit a eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet wird, so kann für eine ausserhalb der Erdoberfläche im Abstande ϱ vom Erdmittelpunkte befindliche Stelle die daselbst wirkende Kraft pro Masseneinheit:

Fig. 512.



1) $\varkappa = \frac{a}{\varrho^2}$

gesetzt werden, und für die drei Seitenkräfte derselben ergeben sich nach Fig. 512 die Werthe:

$$X = -\frac{a}{\varrho^2} \cdot \frac{x}{\varrho}, \qquad Y = -\frac{a}{\varrho^2} \cdot \frac{y}{\varrho}, \qquad Z = -\frac{a}{\varrho^2} \cdot \frac{z}{\varrho}.$$

Nach Substitution dieser Werthe nimmt die allgemeine Differenzialgleichung des hydrostatischen Druckes die folgende Form an:

2) $dp = -\mu a \left\{ \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\varrho^3} \right\}$, oder:

3) $dp = -\mu a \frac{d\varrho}{\varrho^2}$.

Für $\varrho = r$ wird $\varkappa = g$, also ist die Constante a zu berechnen aus der Gleichung:

4) $g = \frac{a}{r^2}$,

und nach Substitution des hieraus für a zu entnehmenden Werthes erhält man die Gleichung:

5) $dp = -\mu g r^2 \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2}$, oder:

6) $dp = -p \frac{\mu' g r^2}{p'} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2}$.

Wenn man hierin (wie im vorigen Paragraphen) wieder $\mu' g = \gamma'$ setzt, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

7) $\frac{p'}{\gamma'} \cdot \frac{dp}{p} = -r^2 \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2}$,

und indem man diese Gleichung integrirt — auf der rechten Seite zwischen den Grenzen r und ϱ, auf der linken zwischen den zugehörigen Grenzen p' und p — erhält man die Gleichung:

8) $\frac{p'}{\gamma'} \int_{p'}^{p} \frac{dp}{p} = -r^2 \int_{r}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2}$, oder:

9) $\frac{p'}{\gamma'} \cdot \lg\left(\frac{p}{p'}\right) = r^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right)$.

In dieser Gleichung bedeutet p' die Grösse des atmosphärischen Druckes an der Erdoberfläche, und für den Quotienten $\frac{p'}{\gamma'}$ ist der in Gleichung 9) des vorigen Paragraphen angegebene numerische

Werth zu substituiren. Man erhält alsdann für das Verhältniss des Druckes p zu dem gewöhnlichen atmosphärischen Drucke den Werth:

$$10)\quad \frac{p}{p'} = e^{\frac{r^2}{7992}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Da die Länge des Erdhalbmessers ungefähr 6 370 000 Meter beträgt, so ergiebt sich hieraus für $\varrho = \infty$ der Werth:

$$11)\quad \frac{p}{p'} = e^{-\frac{6\,370\,000}{7992}} = e^{-797} = 10^{-346}.$$

Wenn man also annehmen dürfte, dass das Mariotte'sche Gesetz auch für beliebig kleine Drücke noch seine Gültigkeit behält, so würde aus den hier gemachten Voraussetzungen folgen, dass die Höhe der Atmosphäre unendlich gross ist, und dass der Druck derselben im unendlich fernen Weltenraume 10^{-346} Atmosphären beträgt.

Unter den gleichen Voraussetzungen würde man, da dem Werthe $\varrho = 2r$ nach obiger Gleichung der Werth:

$$12)\quad \frac{p}{p'} = e^{-\frac{6\,370\,000}{2\,.\,7992}} = e^{-398,5} = 10^{-173}$$

entspricht, zu dem Resultate gelangen, dass an einer Stelle, deren Höhe über der Erdoberfläche gleich dem Erdhalbmesser ist, der Luftdruck 10^{-173} Atmosphären beträgt.

Um das Gesetz zu finden, nach welchem im Inneren der Erdkugel — z. B. in einem mit der äusseren Atmosphäre communicirenden bis zum Erdmittelpunkte hinab reichenden verticalen Schachte — der Luftdruck mit der Tiefe unter der Erdoberfläche zunimmt, würde man in der Gleichung 5) des § 158 für μ den Werth $\frac{\mu'}{p'}p$ zu substituiren und nachher die Integration derselben auszuführen haben. Man gelangt alsdann zu den folgenden Gleichungen:

$$13)\quad dp = -p \cdot \frac{\mu'}{p'} A \,.\, \varrho\, d\varrho,$$

$$14)\quad -\frac{p'}{\mu' A}\int_p^{p'} \frac{dp}{p} = \int_\varrho^r \varrho\, d\varrho,$$

$$15)\quad \frac{p'}{\mu' A} \lg\left(\frac{p}{p'}\right) = \frac{r^2 - \varrho^2}{2}.$$

Wenn man hierin für die Constante A den aus der Gleichung 8) des § 158 zu entnehmenden Werth $\frac{g}{r}$ substituirt, so kann man der obigen Gleichung, indem man zugleich wieder $\mu' g = \gamma'$ setzt, auch die folgende Form geben:

$$16) \quad \frac{p'}{\gamma'} \lg\left(\frac{p}{p'}\right) = \frac{r^2 - \varrho^2}{2r}, \quad \text{oder:}$$

$$17) \quad 7992 \,.\, \lg\left(\frac{p}{p'}\right) = \frac{r^2 - \varrho^2}{2r}.$$

Hierin bedeutet p den Druck im Abstande ϱ vom Erdmittelpunkte und p' den Druck an der Erdoberfläche. Für den Druck p_0, welcher dem Werthe $\varrho = 0$ entspricht, erhält man hiernach die Gleichung:

$$18) \quad \frac{p_0}{p'} = e^{\frac{r}{2\,.\,7992}} = e^{398,5} = 10^{173}.$$

Wenn also angenommen werden dürfte, dass das Mariotte'sche Gesetz auch für beliebig grosse Dichtigkeiten noch seine Gültigkeit behält, so würde hieraus folgen, dass der Druck am Boden jenes Schachtes (d. i. im Erdmittelpunkte) 10^{173} Atmosphären betragen würde.

§ 162.

Relatives Gleichgewicht einer rotirenden Luftmasse.

Die Gleichung 5) des § 159 behält auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn das in Fig. 509 dargestellte, um seine verticale Drehachse rotirende Gefäss — statt mit Wasser — mit Luft gefüllt angenommen wird. Da jedoch in letzterem Falle der Einfluss der Schwerkraft — insofern die Wirkung derselben lediglich darin bestehen wird, eine geringe Zunahme des Luftdruckes in der Richtung von oben nach unten hervorzubringen — bei der vorauszusetzenden geringen Höhe des Gefässes unberücksichtigt gelassen werden darf, so kann man das die Wirkung der Schwerkraft repräsentirende Glied $g\,dz$ in jener Gleichung auch fortlassen. Man erhält alsdann für den vorliegenden Fall die Gleichung:

$$1) \quad dp = \mu\, \omega^2 \varrho\, d\varrho,$$

welcher man nach Substitution des für die Dichtigkeit μ aus dem Mariotte'schen Gesetze sich ergebenden Werthes $\frac{\mu'}{p'} p$, indem man zugleich wieder $\mu' g = \gamma'$ setzt, auch die folgende Form geben kann:

$$2) \quad \frac{p'}{\gamma'} \cdot \frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{g} \cdot \varrho\, d\varrho.$$

Indem man diese Gleichung integrirt — auf der rechten Seite zwischen den Grenzen Null und ϱ, auf der linken zwischen den entsprechenden Grenzwerthen p_0 und p — gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$3) \quad \frac{p'}{\gamma'} \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{g} \int_0^{\varrho} \varrho \, d\varrho,$$

$$4) \quad \frac{p'}{\gamma'} \lg \left(\frac{p}{p_0} \right) = \frac{\omega^2 \varrho^2}{2g}.$$

Wenn man hierin die der Peripheriegeschwindigkeit $\varrho \omega = v$ entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$5) \quad \frac{v^2}{2g} = h$$

setzt, und zugleich für den Quotienten $\frac{p'}{\gamma'}$ dessen numerischen Werth substituirt, so kann man die obige Gleichung in der Form:

$$6) \quad \frac{p}{p_0} = e^{\frac{h}{7992}}$$

benutzen, um das Verhältniss der beiden Drücke p und p_0 daraus zu berechnen.

So z. B. erhält man für $h = 160^m$ aus dieser Gleichung den Werth $\frac{p}{p_0} = 1{,}02$, und da dem Werthe $h = 160^m$ nach Gleichung 5) der Werth $v = 56^m$ entspricht, so folgt hieraus: dass an derjenigen Stelle, deren Peripheriegeschwindigkeit 56 Meter beträgt, der Druck 1,02 mal so gross ist als in der Drehachse.

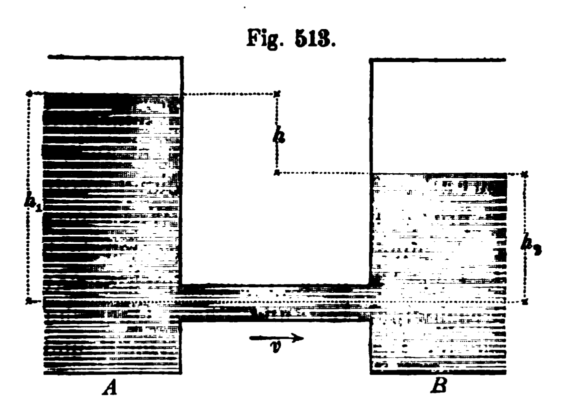
§ 163.

Ausfluss des Wassers.

Wenn zwei Wasserbehälter A und B durch ein horizontales Rohr mit einander verbunden sind, und der Wasserspiegel in dem Gefässe A höher liegt als in dem Gefässe B, so wird ein Ausfliessen des Wassers von A nach B stattfinden (Fig. 513). Die Ausflussgeschwindigkeit kann nach dem Principe der lebendigen Kraft berechnet werden, insofern man annehmen darf, dass nach eingetretenem Beharrungszustande die ganze während des Zeittheilchens dt von dem Druck-Ueberschusse verrichtete mechanische Arbeit dazu verwendet wird, der während dieses Zeittheilchens ausfliessenden Wassermasse dM die der Ausflussgeschwindigkeit v entsprechende lebendige Kraft mitzutheilen.

Wenn mit f der Querschnitt der ausfliessenden Wassersäule (oder der Querschnitt des Rohrs) bezeichnet wird, so hat die während des Zeittheilchens dt ausfliessende Wassermasse die Grösse:

Fig. 513.



$$1)\quad dM = \frac{\gamma f v\, dt}{g}.$$

Diese Masse hatte in dem Gefässe A die Geschwindigkeit Null und erlangt bei dem Eintritte in das Rohr die lebendige Kraft:

$$2)\quad \frac{dM \,.\, v^2}{2} = \frac{\gamma f v\, dt}{g} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Indem man diese lebendige Kraft der von dem Druck-Ueberschusse $\gamma f(h_1 - h_2)$ während des Zeittheilchens dt verrichteten Arbeit gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$3)\quad \frac{\gamma f v\, dt}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \gamma f (h_1 - h_2) \,.\, v\, dt.$$

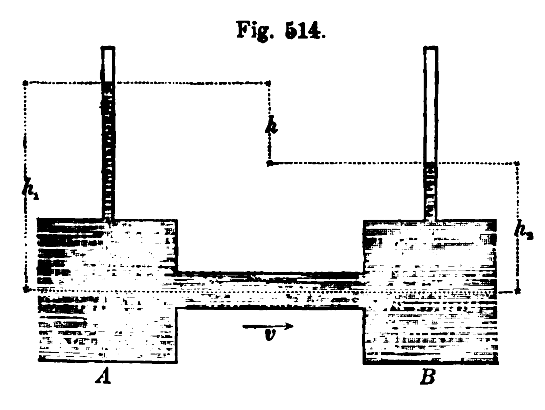
Für die dem Beharrungszustande entsprechende Ausflussgeschwindigkeit ergiebt sich hieraus der Werth:

$$4)\quad v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)},\quad \text{oder:}$$

$$5)\quad v = \sqrt{2gh}.$$

Da die Drücke an den beiden Enden des Rohrs nur von den Druckhöhen abhängen und im Uebrigen unabhängig sind von den Formen der beiden Gefässe, so gilt die obige Gleichung auch für den in Fig. 514 dargestellten Fall, bei welchem die Druckhöhen in den beiden Gefässen A und B durch die

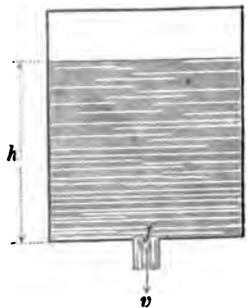
Fig. 514.



Wasserstandshöhen in den beiden aufgesetzten verticalen Röhren veranschaulicht sind.

Für den in Fig. 515 dargestellten Fall, bei welchem die Ausflussöffnung in der horizontalen Bodenwand des Gefässes A sich befindet und der Ausfluss in den leeren Raum erfolgt, ist $h_2 = 0$ und $h_1 = h$ zu setzen. Die Ausflussgeschwindigkeit kann daher auch für diesen Fall aus Gleichung 5) berechnet werden.

Fig. 515.



Die pro Secunde ausfliessende Wassermasse kann als eine prismatische Wassersäule betrachtet werden, deren Länge gleich der Ausflussgeschwindigkeit und deren Querschnitt gleich der Ausflussöffnung ist. Der Rauminhalt dieser Wassermasse hat also die Grösse:

$$6)\quad Q = f \, . \, \sqrt{2gh}.$$

Die auf solche Weise berechnete Ausflussmenge wird die „theoretische Ausflussmenge" genannt. Da die Voraussetzungen, aus welchen die obigen Gleichungen abgeleitet wurden, in der Wirklichkeit nicht genau erfüllt sind, so hat man, um die „wirkliche Ausflussmenge zu erhalten, den obigen Ausdruck noch mit einem Erfahrungscoefficienten zu multipliciren, welcher der „Ausflusscoefficient" genannt wird.*) Wenn dieser Ausflusscoefficient mit μ bezeichnet wird, so ergiebt sich für die wirkliche Ausflussmenge der Werth:

$$7)\quad Q' = \mu \, . \, f \, . \, \sqrt{2gh}.$$

§ 164.

Theoretische Ausflussmenge.

Um für den in Fig. 516 dargestellten Fall, bei welchem die Ausflussöffnung in der verticalen Wand des Gefässes sich befindet und der Ausfluss in den leeren Raum erfolgt, die theoretische Ausflussmenge zu berechnen, hat man sich die Querschnittsfläche des ausfliessenden Wasserstrahles auf die in Fig. 517 angedeutete Weise in horizontale Flächenstreifen von unendlich kleiner Höhe zerlegt zu denken und die pro Secunde durch diese unendlich kleinen Querschnittstheile fliessenden Wasserquantitäten nachher auf dem Wege der Integration zu summiren. Im Abstande z vom Wasserspiegel hat die Ausflussgeschwindigkeit die Grösse:

*) Vergl. „Technische Mechanik", (5. Aufl.) § 198.

$$1)\quad v = \sqrt{2gz},$$

und die pro Secunde durch den an dieser Stelle befindlichen Flächenstreifen ausfliessende Wasserquantität hat nach Fig. 517 die Grösse:

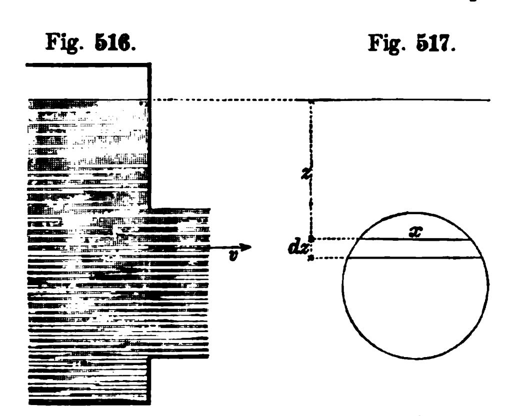


Fig. 516. Fig. 517.

$$2)\quad dQ = x\,dz\,\sqrt{2gz}.$$

Die ganze pro Secunde ausfliessende Wassermenge ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$3)\quad Q = \int x\,dz\,\sqrt{2gz}.$$

Hiernach erhält man z. B. für den in Fig. 518 dargestellten rechteckigen Querschnitt, indem man b statt x setzt, die Gleichung:

$$4)\quad Q = b\sqrt{2g}\int_h^H z^{\frac{1}{2}}\,dz,\quad \text{oder:}$$

$$5)\quad Q = \frac{2}{3}\,b\sqrt{2g}\left\{H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Für den Fall, in welchem die obere Seite des Rechtecks in der Höhe des Wasserspiegels liegt, würde man hierin $h = 0$ zu setzen haben. Die pro Secunde durch einen rechteckigen Wandeinschnitt (oder bei einem Ueberfallswehre) ausfliessende Wassermenge hat demnach die Grösse:

Fig. 518.

$$6)\quad Q = bH\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2gH},$$

also dieselbe Grösse, welche man erhalten würde, wenn man annähme, dass die Ausflussgeschwindigkeit in allen Punkten des Querschnittes die Grösse $\frac{2}{3}\sqrt{2gH}$ hat.

Wenn man $H = h_0 + \frac{a}{2}$ und $h = h_0 - \frac{a}{2}$ setzt, so kann man der Gleichung 5) auch die folgende Form geben:

$$7)\quad Q = \frac{2}{3} b h_0 \sqrt{2 g h_0} \left\{ \left(1 + \frac{a}{2h_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{a}{2h_0}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}, \text{ oder:}$$

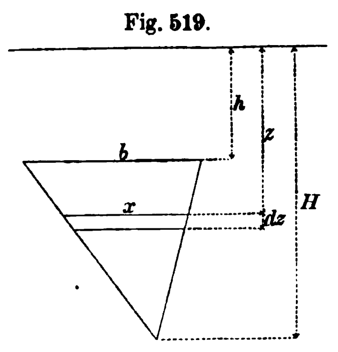
$$8)\quad Q = ab \cdot \sqrt{2 g h_0} \left\{ 1 - \frac{1}{96} \cdot \left(\frac{a}{h_0}\right)^2 - \frac{1}{2048} \cdot \left(\frac{a}{h_0}\right)^4 - \cdots \right\}.$$

Für $\frac{a}{h_0} = 0$ wird der eingeklammerte Ausdruck gleich Eins. Wenn also die Höhe der Ausflussöffnung sehr klein ist im Verhältniss zu dem Abstande des Schwerpunktes vom Wasserspiegel, so kann man die Ausflussmenge annäherungsweise berechnen aus der Gleichung:

$$9)\quad Q = a b \cdot \sqrt{2 g h_0},$$

welche man erhalten würde, wenn man annähme, dass sämmtliche Wassertheilchen mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2 g h_0}$ ausfliessen, welche der Druckhöhe des Schwerpunktes entspricht.

Fig. 519.



Für die in Fig. 519 dargestellte dreieckige Ausflussöffnung hat man:

$$10)\quad \frac{x}{b} = \frac{H - z}{H - h}$$

zu setzen, und wenn man den hieraus für x zu entnehmenden Werth in Gleichung 3) substituirt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$11)\quad Q = \frac{b\sqrt{2g}}{H - h} \int_h^H (H - z)\, z^{\frac{1}{2}}\, dz, \quad \text{oder:}$$

$$12)\quad Q = \frac{b\sqrt{2g}}{H - h} \left\{ \frac{2}{3} H \left(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{5} \left(H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}\right) \right\}.$$

Für den Fall, in welchem die obere horizontale Seite des Dreiecks in der Höhe des Wasserspiegels liegt, hat man hierin $h = 0$ zu setzen. Die Wassermenge, welche pro Secunde durch einen dreieckigen Wandeinschnitt ausfliesst, hat also die Grösse:

$$13)\quad Q = \frac{4}{15} b H \sqrt{2 g H}.$$

Um die wirklichen Ausflussmengen zu erhalten, hat man die oben gefundenen Werthe noch mit dem Ausflusscoefficienten μ zu multipliciren.

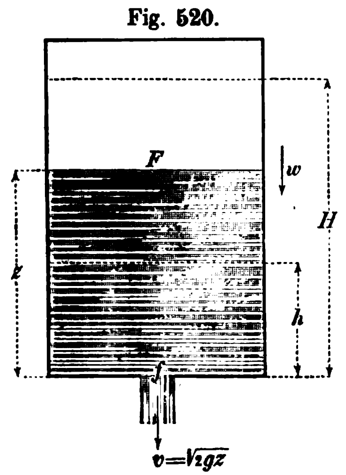
§ 165.

Theoretische Ausflusszeit.

Der Rauminhalt der während des Zeittheilchens dt durch die Bodenöffnung des in Fig. 520 dargestellten cylindrischen Gefässes pro Secunde ausfliessenden Wassermasse hat die Grösse:

$$1)\quad dQ = f \cdot v\,dt.$$

Fig. 520.



Der sinkende Wasserspiegel legt während dieses Zeittheilchens die Strecke $w\,dt$ zurück. Der Rauminhalt der in dem Gefässe enthaltenen Wassermasse vermindert sich also während des Zeittheilchens dt (nach Fig. 520) um die Grösse:

$$2)\quad dQ = F \cdot w\,dt.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man für die Geschwindigkeit w die Gleichung:

$$3)\quad w = \frac{f}{F} \cdot v,$$

welche nach Substitution des für die Ausflussgeschwindigkeit in der Figur angegebenen Werthes die folgende Form annimmt:

$$4)\quad w = \frac{f}{F} \sqrt{2gz}.$$

Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels kann als Geschwindigkeit des Abnehmens — oder als negative Geschwindigkeit des Zunehmens — der Wasserstandshöhe z aufgefasst werden; folglich ist:

$$5)\quad w = -\frac{dz}{dt}$$

zu setzen, und durch Gleichsetzung der obigen beiden Ausdrücke erhält man eine Gleichung, welche für dt aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$6)\quad dt = -\frac{F}{f\sqrt{2g}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz.$$

Die Zeit, in welcher die Wasserstandshöhe von H bis h abnimmt, hat also die Grösse:

$$7) \quad t = -\frac{F}{f\sqrt{2g}}\int_H^h z^{-\frac{1}{2}} dz, \quad \text{oder:}$$

$$8) \quad t = \frac{2F}{f\sqrt{2g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Indem man hierin $h = 0$ setzt, erhält man für die ganze Ausflusszeit den Werth:

$$9) \quad t = 2 \cdot \frac{FH}{f\sqrt{2gH}}.$$

Hierin bedeutet $FH = J$ den ganzen Rauminhalt der ausgeflossenen Wassermasse, und $\sqrt{2gH} = V$ die anfängliche Grösse der Ausflussgeschwindigkeit v. Man kann daher der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

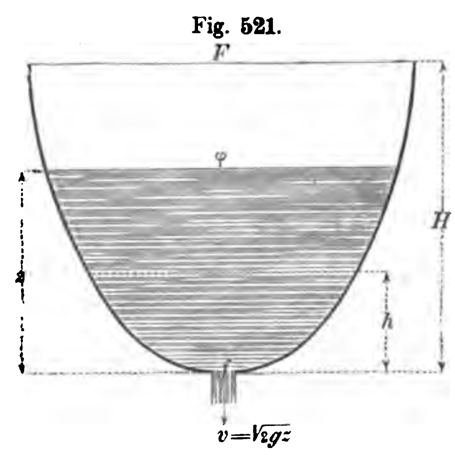
$$10) \quad t = 2 \cdot \frac{J}{f \cdot V},$$

und erkennt aus dieser Gleichung, dass die Ausflusszeit das Doppelte von derjenigen Zeit beträgt, in welcher dieselbe Wassermasse bei unverändert bleibender Druckhöhe ausgeflossen sein würde.

Für den in Fig. 521 dargestellten Fall, bei welchem die Wasserspiegelfläche φ mit der Wasserstandshöhe z abnimmt, hat man der Gleichung 6) die folgende Form zu geben:

$$11) \quad dt = -\frac{\varphi}{f\sqrt{2g}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz,$$

Fig. 521.



und darin für φ die der Form des Gefässes entsprechende Function von z zu substituiren. Wenn z. B. die Wasserspiegelflächen wie die n-ten Potenzen der Wasserstandshöhen sich verhalten, so ist (nach Fig. 521):

$$12) \quad \frac{\varphi}{F} = \frac{z^n}{H^n}$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für φ zu entnehmenden Werthes erhält man die Gleichung:

$$13)\quad dt = -\frac{F}{fH^n\sqrt{2g}}\cdot z^{n-\frac{1}{2}}\cdot dz.$$

Die Zeit, in welcher die Wasserstandshöhe von H bis h abnimmt, hat also die Grösse:

$$14)\quad t = -\frac{F}{fH^n\sqrt{2g}}\int_H^h z^{n-\frac{1}{2}}\,dz, \quad \text{oder:}$$

$$15)\quad t = \frac{F\left(H^{n+\frac{1}{2}} - h^{n+\frac{1}{2}}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)fH^n\sqrt{2g}}.$$

Indem man hierin $h = 0$ setzt, erhält man für die ganze Ausflusszeit den folgenden Ausdruck:

$$16)\quad t = \frac{FH}{\left(n+\frac{1}{2}\right)f\sqrt{2gH}}.$$

Der Rauminhalt der ganzen ausgeflossenen Wassermasse ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$17)\quad J = \int_0^H \varphi\,dz = \frac{F}{H^n}\int_0^H z^n\,dz = \frac{FH}{n+1}.$$

Nach der in Gleichung 10) eingeführten Bezeichnungsweise kann man daher dem obigen Ausdrucke für die Ausflusszeit auch die folgende Form geben:

$$18)\quad t = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\frac{J}{fV}.$$

Der Werth $n = 0$ entspricht dem in Fig. 520 dargestellten Falle, für welchen man wieder den in Gleichung 10) gefundenen Werth erhält.

Für ein Gefäss von der Form eines Rotations-Paraboloides (oder auch eines dreiseitigen Prismas mit horizontalen Kanten) hat man $n = 1$ zu setzen und erhält die Gleichung:

$$19)\quad t = \frac{4}{3}\cdot\frac{J}{fV}.$$

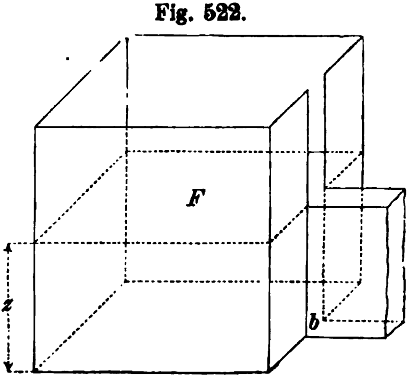
Für ein Gefäss von der Form eines Kegels (oder auch einer Pyramide) hat man $n = 2$ zu setzen und erhält die Gleichung:

$$20)\quad t = \frac{6}{5}\cdot\frac{J}{fV}.$$

Um die wirklichen Ausflusszeiten zu erhalten, würde man die oben gefundenen Werthe noch durch den Ausflusscoefficienten zu dividiren haben.

Wenn das Gefäss die Form eines Parallelepipedons hat, und der Ausfluss durch einen bis zu der horizontalen Bodenfläche hinabreichenden rechteckigen verticalen Wandeinschnitt erfolgt, so hat bei der Wasserstandshöhe z die pro Secunde ausfliessende Wassermenge nach § 164 (Gleichung 6) und nach Fig. 522 die Grösse:

Fig. 522.



$$21)\quad Q = \frac{2}{3}\, b z \sqrt{2 g z} = - F \frac{dz}{dt}.$$

Um die Zeit zu berechnen, in welcher die Wasserstandshöhe von H bis h abnimmt, hat man die obige Gleichung für dt aufzulösen und hernach die Integration zwischen den Grenzen H und h auszuführen. Man gelangt alsdann zu den folgenden Gleichungen:

$$22)\quad dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b\sqrt{2g}} \cdot z^{-\frac{3}{2}} \cdot dz,$$

$$23)\quad t = -\frac{3}{2} \cdot \frac{F}{b\sqrt{2g}} \cdot \int_H^h z^{-\frac{3}{2}} \cdot dz,$$

$$24)\quad t = \frac{3F}{b\sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right).$$

Für $h = 0$ wird $t = \infty$. Es würde also — wenn die Voraussetzungen, aus welchen die obigen Gleichungen abgeleitet wurden, in aller Strenge erfüllt wären — hieraus folgen, dass der sinkende Wasserspiegel erst nach unendlich langer Zeit, d. h. mit anderen Worten niemals, die Bodenfläche des Gefässes erreicht.

§ 166.

Hydraulischer Druck.

Bei Anwendung des Princips der lebendigen Kraft auf die Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit wurde in Bezug auf die in Fig. 515 und Fig. 514 dargestellten Fälle die Voraussetzung gemacht, dass die Wassertheilchen, bevor dieselben zum Ausflusse

gelangten, im Ruhezustande sich befanden. Für diesen Fall kann man der Gleichung der lebendigen Kraft, indem man dieselbe auf die Bewegung eines Wassertheilchens von der Masse m anwendet, auch die folgende Form geben:

$$1)\quad \frac{mv^2}{2} - 0 = mgh.$$

Wenn statt dessen angenommen wird, dass die Wassertheilchen vor dem Ausflusse schon die Anfangsgeschwindigkeit c besassen, so führt die Anwendung des Princips der lebendigen Kraft zu der Gleichung:

$$2)\quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = mgh,$$

in welcher die Geschwindigkeit c aus dem Verhältnisse der Querschnittsflächen der bewegten Wassermasse zu berechnen ist. Da annäherungsweise angenommen werden darf, dass in allen Punkten einer und derselben Querschnittsfläche des ausfliessenden Wasserstrahles die Wassertheilchen mit derselben Geschwindigkeit sich bewegen, und die gleiche Voraussetzung auch in Bezug auf die Bewegung des Wassers innerhalb des Ausflussgefässes gemacht werden darf, so kann die Geschwindigkeit c berechnet werden aus der Gleichung:

$$3)\quad Fc = fv,$$

in welcher F die rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung genommene Querschnittsfläche der Wassermasse innerhalb des Ausflussgefässes bedeutet (also in Fig. 515 die horizontale Querschnittsfläche des Gefässes und in Fig. 514 die verticale Querschnittsfläche des Rohres A). Nach Substitution des hieraus für c zu entnehmenden Werthes erhält man aus Gleichung 2) für die Ausflussgeschwindigkeit den folgenden Ausdruck:

$$4)\quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{f^2}{F^2}}},$$

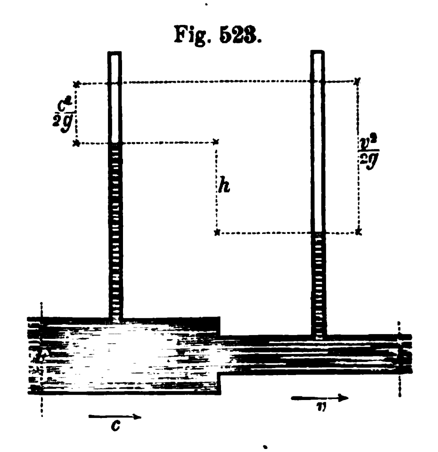
welcher zeigt, dass die Gültigkeit der Gleichung 5) des § 163 auf solche Fälle sich beschränkt, in welchen die Fläche F im Verhältniss zu der Fläche f so gross ist, dass das Glied $\frac{f^2}{F^2}$ im Nenner vernachlässigt werden darf.

Wenn man die Gleichung 2) direct für v auflöst, so erhält man für die Ausflussgeschwindigkeit die Gleichung:

$$5)\quad v = \sqrt{2g\left(h + \frac{c^2}{2g}\right)},$$

welche zeigt, dass das Vorhandensein der Anfangsgeschwindigkeit c denselben Einfluss hat, wie wenn die Druckhöhe h um die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ vergrössert wäre. Zugleich erkennt man aus Fig. 523, indem man der obigen Gleichung die folgende Form giebt:

Fig. 523.

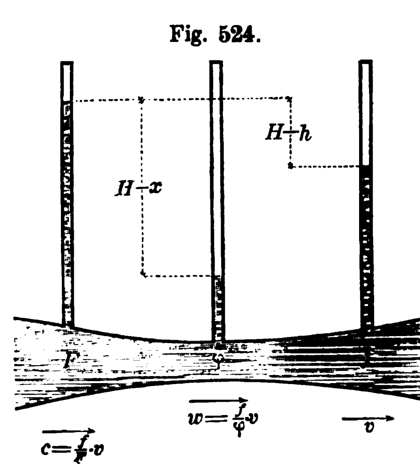


$$6)\quad h = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g},$$

dass die Differenz der hydraulischen Druckhöhen gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen ist.

Dasselbe Gesetz bleibt auch dann noch gültig, wenn die Querschnittsfläche und die Geschwindigkeit der fliessenden Wassermasse stetig sich ändern. Für den in Fig. 524 dargestellten Fall ergeben sich aus dem Principe der lebendigen Kraft die Gleichungen:

Fig. 524.



$$7)\quad H - x = \frac{w^2}{2g} - \frac{c^2}{2g},$$

$$8)\quad H - h = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g},$$

welche zeigen, dass die hydraulische Druckhöhe ihren kleinsten Werth an derjenigen Stelle annimmt, an welcher die Geschwindigkeit ihren grössten Werth erreicht. Die pro Secunde durchfliessende Wassermasse hat den Rauminhalt:

$$9)\quad Fc = \varphi w = fv.$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich also umgekehrt wie die Querschnitte. Hieraus folgt, dass die hydraulische Druckhöhe an der engsten Stelle des Rohres ihren kleinsten Werth annimmt. Aus Gleichung 9) ergeben sich für die Geschwindigkeiten c und w

die in Fig. 524 angegebenen Werthe; man kann daher den Gleichungen 7) und 8), indem man zugleich abkürzungsweise $\frac{f}{F} = k$ und $\frac{f}{\varphi} = n$ setzt, auch die folgenden Formen geben:

$$10)\quad H - x = \frac{v^2}{2g}(n^2 - k^2),$$

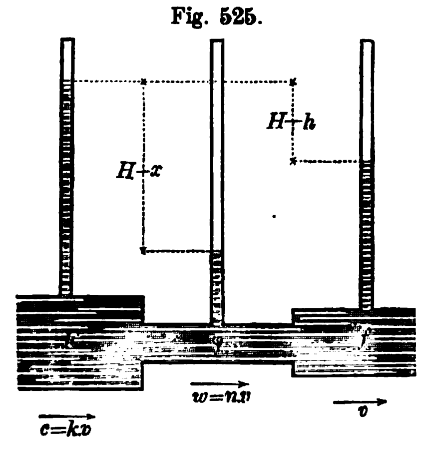
$$11)\quad H - h = \frac{v^2}{2g}(1 - k^2),$$

und wenn man die erstere durch die letztere dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$12)\quad \frac{H - x}{H - h} = \frac{n^2 - k^2}{1 - k^2},$$

nach welcher man das Verhältniss der Druckhöhen-Differenzen aus den gegebenen Querschnittsverhältnissen berechnen kann. Zugleich ergiebt sich für die Ausflussgeschwindigkeit v aus Gleichung 11) der Werth:

Fig. 525.



$$13)\quad v = \sqrt{\frac{2g(H - h)}{1 - k^2}}.$$

Wenn der Querschnitt der fliessenden Wassermasse nicht allmählich, sondern s p r u n g w e i s e von φ bis f zunimmt, und in Folge dessen die Geschwindigkeit derselben an der Uebergangsstelle p l ö t z l i c h von w bis v a b n i m m t (Fig. 525), so entsteht durch den S t o s s des rascher fliessenden Massentheilchens m gegen die langsamer vorangehende Wassermasse ein Verlust an lebendiger Kraft von der Grösse*):

$$14)\quad \mathfrak{B} = \frac{m(w - v)^2}{2}.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft nimmt also für diesen Fall die folgende Form an:

$$15)\quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = mg(H - h) - \frac{m(w - v)^2}{2}, \text{ oder:}$$

*) Vergl. „Technische Mechanik", (5. Aufl.) § 154 und § 196.

$$16) \quad H - h = \frac{v^2}{2g}\left\{1 - k^2 + (n-1)^2\right\}.$$

Statt der Gleichungen 12) und 13) erhält man hiernach für den in Fig. 525 dargestellten Fall die folgenden Gleichungen:

$$17) \quad \frac{H - x}{H - h} = \frac{n^2 - k^2}{1 - k^2 + (n-1)^2},$$

$$18) \quad v = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 - k^2 + (n-1)^2}}.$$

Wenn z. B. $k = 0$ und $n = 2$ gesetzt wird, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen die Werthe: $H - x = 2(H - h)$ und $v = \sqrt{2g\left(\frac{H-h}{2}\right)}$.

Für $\frac{\varphi}{f} = 0$ oder $n = \infty$ wird $H - x = H - h$. Wenn also das Wasser durch ein Zuflussrohr von sehr kleinem Querschnitte in ein Gefäss von sehr grossem Querschnitte hineinfliesst, so wird die hydraulische Druckhöhe in dem Zuflussrohre gleich der Wasserstandshöhe in dem Gefässe sein. Die ganze lebendige Kraft des zufliessenden Wassers wird in diesem Falle durch den Stoss gegen die in dem Gefässe ruhende Wassermasse vernichtet.

§ 167.

Zusammenfluss zweier Wasserstrahlen. (Wasserstrahlpumpe.)

Wenn die beiden aus den Gefässen A und B mit ungleichen Geschwindigkeiten ausfliessenden Wasserstrahlen innerhalb des gemeinschaftlichen Ausflussrohres C zu einem Wasserstrahle von der Querschnittsfläche f sich vereinigen, so wird an der Stelle des Zusammentreffens eine Ausgleichung der Geschwindigkeiten eintreten, und zugleich wird durch den Stoss der aus dem Gefässe A mit der grösseren Geschwindigkeit w dort ankommenden Wassertheilchen gegen die in dem gemeinschaftlichen Ausflussrohre C mit der kleineren Geschwindigkeit v sich bewegende Wassermasse ein Verlust an lebendiger Kraft entstehen (Fig. 526).

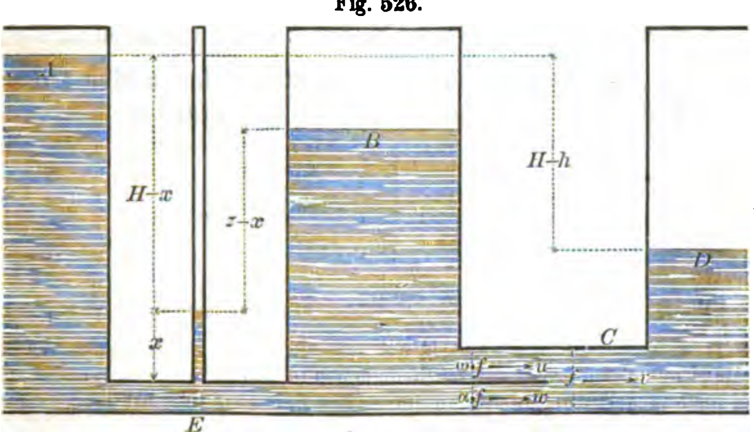
Die Querschnittsfläche des gemeinschaftlichen Ausflussrohres kann man sich in die beiden Theile εf und $(1 - \varepsilon) f$ zerlegt denken, von denen der erstere durch den vom Gefässe A, und der letztere durch den vom Gefässe B herkommenden Theil des Wasserstrahles ausgefüllt wird. Die ganze während des Zeittheilchens dt in das Gefäss D hineinfliessende Wassermasse m setzt sich demnach zusammen aus dem Theile εm, welcher von dem Gefässe A herkommend, und dem Theile $(1 - \varepsilon) m$, welcher von dem Gefässe B herkommend dorthin gelangte. Wenn also die Querschnittsflächen der beiden Gefässe A und B so gross angenommen werden,

dass die Anfangsgeschwindigkeiten vernachlässigt werden dürfen, so führt die Anwendung des Princips der lebendigen Kraft zu der Gleichung:

$$1)\quad \frac{m v^2}{2} - 0 = \varepsilon m g (H - h) + (1 - \varepsilon) m g (z - h) - \frac{\varepsilon m (w - v)^2}{2}.$$

Da auch hier wieder angenommen werden darf, dass in einem und demselben Wasserstrahle die Geschwindigkeiten umgekehrt

Fig. 526.



wie die Querschnitte sich verhalten, so ergeben sich für die Geschwindigkeiten, welche die beiden Wasserstrahlen vor ihrer Vereinigung besassen, aus den in Fig. 526 angegebenen Querschnittsflächen die Werthe:

$$2)\quad w = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot v, \qquad 3)\quad u = \left(\frac{1 - \varepsilon}{\omega}\right) v.$$

Hiernach kann man der Gleichung 1), indem man für die Geschwindigkeit w den obigen Werth substituirt, auch die folgende Form geben:

$$4)\quad \frac{v^2}{2g} = \frac{\varepsilon (H - z) - (h - z)}{1 + \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} - 1\right)^2}.$$

Wenn man nunmehr das Princip der lebendigen Kraft auch auf die Berechnung der beiden Ausflussgeschwindigkeiten w und u anwendet, so erhält man die Gleichungen:

$$5)\quad H - x = \frac{w^2}{2g} = \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

$$6)\quad z - x = \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{1-\varepsilon}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und gelangt, indem man die letztere von der ersteren subtrahirt, zu einer Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$7)\quad \frac{v^2}{2g} = \frac{H - z}{\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1-\varepsilon}{\omega}\right)^2}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden in Gleichung 4) und Gleichung 7) für die Grösse $\frac{v^2}{2g}$ gefundenen Ausdrücke erhält man endlich eine Gleichung, aus welcher für das Verhältniss der beiden Grössen $h - z$ und $H - z$ der folgende Werth sich ergiebt:

$$8)\quad \frac{h-z}{H-z} = \varepsilon - \left\{\frac{1 + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} - 1\right)^2}{\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1-\varepsilon}{\omega}\right)^2}\right\}.$$

Wenn man hierin $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{1-\varepsilon}{\omega}$ setzt, so wird: $\frac{h-z}{H-z} = -\infty$, oder: $z = H$, entsprechend dem Falle, in welchem die beiden ausfliessenden Wasserstrahlen mit gleich grossen Geschwindigkeiten in dem Rohre C zusammentreffen und ohne einander gegenseitig zu stören ihre Bewegung daselbst gemeinschaftlich fortsetzen.

Der Werth $\varepsilon = 1$ entspricht dem Falle, in welchem aus dem Gefässe B gar kein Wasser zum Ausflusse gelangt. Nach Gleichung 8) wird für diesen Fall:

$$9)\quad \frac{h-z}{H-z} = 2\alpha(1-\alpha),$$

also wenn z. B. $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, so wird $h - z = H - h$ oder $z = h - (H - h)$, d. h. der Wasserspiegel des Gefässes B liegt um die Höhe $H - h$ tiefer als der Wasserspiegel des Gefässes D, und nach Gleichung 7) hat die Ausflussgeschwindigkeit in diesem Falle die Grösse:

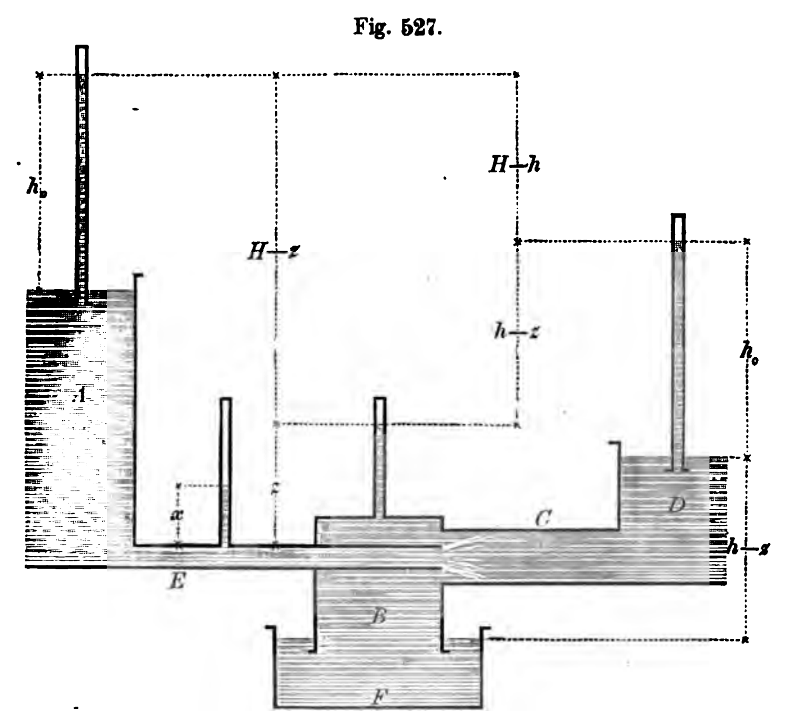
$$10)\quad v = \sqrt{2g\left(\frac{H-h}{2}\right)}.$$

Wenn man $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{6}$, $\omega = \frac{5}{6}$ setzt, so ergiebt sich aus Gleichung 8) der Werth: $\frac{h-z}{H-z} = \frac{11}{72}$; also wenn $h - z = 8^m$ ist, so wird $H - z = 52^m,36$ und $H - h = 44^m,36$. Nach Gleichung 7) hat die Ausflussgeschwindigkeit in diesem Falle die Grösse: $v = 10^m,904$, und wenn $f = 0^{\square m},01$ ist, so fliesst aus jedem der beiden Gefässe A und B pro Secunde eine Wassermenge ab, deren Rauminhalt 0,054 52 Kubikmeter beträgt. Die hydraulische Druckhöhe in dem Rohre E hat nach Gleichung 5) die Grösse: $x = H - 54^m,545$. Da von negativem hydraulischen Drucke selbst-

verständlich nicht die Rede sein kann, so dürfen die obigen Resultate nur dann als gültig betrachtet werden, wenn zugleich die Höhenlage des Ausflussrohres E so gewählt ist, dass die von dem höchsten Punkte seines Querschnittes aus gemessene Druckhöhe H grösser ist als $54^m,545$ (oder die auf gleiche Weise gemessene Druckhöhe z grösser als $2^m,182$).

Die Wirkung des atmosphärischen Druckes auf den Wasserspiegel kann man sich durch eine aufgelegte Wasserschicht von der Höhe $h_0 = 10^m,336$ veranschaulichen. Die oben gefundenen Gleichungen können daher auch für den in Fig. 527 dargestellten

Fig. 527.



Fall als gültig betrachtet werden, bei welchem die Wasserspiegelflächen in den Gefässen A, D, F der Wirkung des atmosphärischen Druckes ausgesetzt sind und in Folge dessen ein jeder um die Höhe h_0 tiefer liegt als der Wasserspiegel in dem betreffenden luftleeren Rohre, dessen Wasserstandshöhe die wirkliche Druckhöhe anzeigt. Durch den aus dem Gefässe A mit grosser Geschwindigkeit ausfliessenden Wasserstrahl wird an der Ausflussmündung desselben eine Erniedrigung der hydraulischen Druckhöhe hervorgebracht und dadurch bewirkt, dass das Wasser aus

dem Gefässe F, getrieben durch den atmosphärischen Druck, zu dem höher gelegenen Wasserbehälter D hinaufsteigt. Da bei Ableitung der obigen Gleichungen die Druckhöhenverluste, welche durch die Reibung des Wassers an den Röhrenwänden*) verursacht werden, unberücksichtigt geblieben sind, so wird die pro Secunde geförderte Wassermenge in Wirklichkeit etwas kleiner ausfallen als die obige Rechnung ergab.

§ 168.

Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen.

Die in den vorigen Paragraphen mehrfach angewendete vereinfachende Hypothese, nach welcher die Wassertheilchen in allen Punkten einer und derselben Querschnittsfläche der abfliessenden Wassermasse mit gleichen Geschwindigkeiten sich bewegen, darf annäherungsweise auch für den in Fig. 528 dargestellten Fall als gültig betrachtet werden, bei welchem das Wasser durch einen Kanal aus dem Wasserbehälter A nach dem tiefer gelegenen Wasserbehälter B hinabfliesst. Hieraus folgt, dass die Bewegung des Wassers in dem Kanale eine gleichförmige sein wird, sobald die Querschnittsfläche der abfliessenden Wassermasse überall dieselbe Grösse hat. Bei einem geradlinigen prismatischen Kanale wird diese Bedingung erfüllt sein, wenn die Wassertiefe an den beiden Enden des Kanales dieselbe Grösse hat.

Fig. 528.

Diejenige Grösse, welche die Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel haben muss, wenn das Wasser mit der Geschwindigkeit c abfliessen soll, kann annäherungsweise berechnet werden nach der Erfahrungsformel:

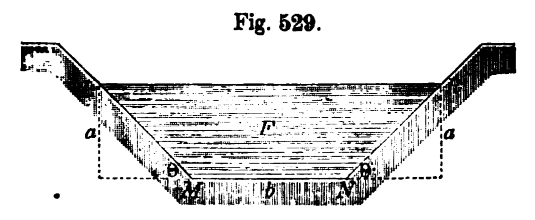
$$1) \quad h = \zeta \cdot l \cdot \frac{P}{F} \cdot \frac{c^2}{2g},$$

in welcher ζ einen Erfahrungscoefficienten, F die Querschnittsfläche

*) Vergl. „Technische Mechanik", (5. Aufl.) § 199.

der abfliessenden Wassermasse und P den sogenannten Wasserperimeter $LMNR$ bedeutet oder denjenigen Theil des Querschnittsumfanges, in welchem die Querschnittsfläche durch den Boden und die Seitenwände des Kanales begrenzt wird (Fig. 529). Der Erfahrungscoefficient ζ hat im Mittel die Grösse:

Fig. 529.



$$2)\quad \zeta = 0{,}008.$$

Bei grosser Stromgeschwindigkeit hat derselbe einen etwas kleineren Werth, bei kleiner Stromgeschwindigkeit einen etwas grösseren Werth. Den genaueren Werth dieses Coefficienten kann man berechnen aus der Erfahrungsformel:

$$3)\quad \zeta = 0{,}007\,41 \left(1 + \frac{0{,}058\,53}{c}\right),$$

welche zeigt, dass der obige Mittelwerth einer Stromgeschwindigkeit von 0,734 Metern pro Secunde entspricht.

Nach Fig. 528 kann $\frac{h}{l} = \sin \alpha$ gesetzt werden; man kann daher der Gleichung 1), indem man dieselbe für c auflöst, auch die folgende Form geben:

$$4)\quad c = \sqrt{\frac{2 g F \sin \alpha}{\zeta P}},$$

und dieselbe in dieser letzteren Form zur Berechnung der Stromgeschwindigkeit benutzen, indem man aus derselben mit Benutzung des in Gleichung 2) für ζ angegebenen Mittelwerthes zunächst einen Annäherungswerth von c berechnet und hernach mit dem aus Gleichung 3) zu entnehmenden genaueren Werthe von ζ die Rechnung wiederholt.

§ 169.

Vortheilhaftestes Kanalprofil.

Für den Wasserquerschnitt F und den Wasserperimeter P erhält man nach Fig. 529 die Gleichungen:

$$1)\quad F = a\left(b + \frac{a}{\operatorname{tg} \theta}\right),$$

$$2)\quad P = b + \frac{2a}{\sin \theta}.$$

Aus der ersteren Gleichung ergiebt sich für die Breite des Kanales am Boden der Ausdruck:

$$3)\quad b = \frac{F}{a} - \frac{a}{\operatorname{tg}\theta},$$

und nach Substitution dieses Werthes nimmt die zweite Gleichung die folgende Form an:

$$4)\quad P = \frac{F}{a} - \frac{a}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{2a}{\sin\theta}.$$

Die Gleichung 1) des vorigen Paragraphen zeigt, dass zum Hervorbringen einer vorgeschriebenen Stromgeschwindigkeit c unter sonst gleichen Umständen ein um so kleineres Gefälle ausreicht, je kleiner der Wasserperimeter P ist. Da der Wasserquerschnitt F und der Neigungswinkel θ, welchen die Seitenwände mit der Horizontalen einschliessen sollen, als gegebene Grössen zu betrachten sind, so hat man in Gleichung 4) die Grösse P als eine Function der Wassertiefe a zu behandeln, und erhält, indem man den Differenzialquotienten derselben (nach a genommen) gleich Null setzt, die Gleichung:

$$5)\quad 0 = -\frac{F}{a^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{2}{\sin\theta}.$$

Für die vortheilhafteste Wassertiefe ergiebt sich aus dieser Gleichung der Werth:

$$6)\quad a = \sqrt{\frac{F\sin\theta}{2 - \cos\theta}}.$$

Die zugehörigen Werthe der Grössen b und P kann man nunmehr aus den Gleichungen 3) und 4) berechnen, indem man darin für a diesen Werth substituirt.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\theta =$	90°	60°	45°	35°	30°
$\frac{a}{\sqrt{F}} =$	0,707	0,760	0,740	0,697	0,664
$\frac{b}{\sqrt{F}} =$	1,414	0,877	0,613	0,439	0,356
$\frac{P}{\sqrt{F}} =$	2,828	2,632	3,704	2,870	3,012.

Wenn z. B. die Werthe: $F = 4^{\square m}$ und $\theta = 35°$ gegeben sind, so erhält man aus der obigen Tabelle die Werthe: $a = 1^m,394$ und $b = 0^m,878$, welchen der Wasserperimeter: $P = 5^m,74$ entspricht.

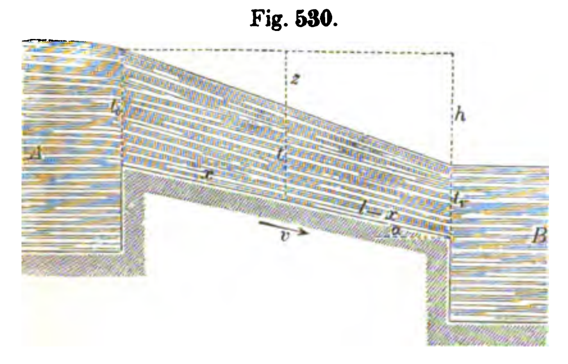
Um für das auf solche Weise bestimmte Kanalprofil diejenige Stromgeschwindigkeit zu berechnen, welche dem Werthe: $\sin \alpha = 0{,}001$ entspricht, hat man in der Gleichung 4) des vorigen Paragraphen zunächst $\zeta = 0{,}008$ zu setzen und erhält daraus zunächst den Annäherungswerth: $c = 1^m{,}31$. Dieser Stromgeschwindigkeit entspricht nach der Gleichung 3) des vorigen Paragraphen der Werth: $\zeta = 0{,}007\,74$, und mit Benutzung desselben findet man durch Wiederholung der Rechnung für die Stromgeschwindigkeit den genaueren Werth: $c = 1^m{,}33$. Für den Rauminhalt der pro Secunde abfliessenden Wassermenge ergiebt sich hiernach der Werth: $Q = 4 \,.\, 1{,}33 = 5{,}32$ Cubikmeter.

§ 170.

Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen.

Wenn die Wassertiefe t_0 am oberen Ende des Kanales grösser ist als die Wassertiefe t_1 am unteren Ende (Fig. 530), so wird die Geschwindigkeit v_0 am oberen Ende kleiner sein als die Geschwindigkeit v_1 am unteren Ende; die Bewegung des abfliessenden Wassers ist also in diesem Falle eine beschleunigte.

Fig. 530.



Während bei der gleichförmigen Bewegung des Wassers das ganze Gefälle auf Ueberwindung des Widerstandes der Reibung des Wassers an den Kanalwänden verwendet wird, kann man sich bei dem Falle der beschleunigten Bewegung das Gefälle in zwei Theile zerlegt denken, von denen der eine auf Ueberwindung der Reibungswiderstände, und der andere auf Vergrösserung der lebendigen Kraft der abfliessenden Wassermasse verwendet wird. Die Anwendung des Princips der lebendigen Kraft auf die Bewegung des Wassers längs des in Fig. 531 dargestellten unendlich kleinen Theiles der Kanalstrecke führt hiernach zu der Gleichung:

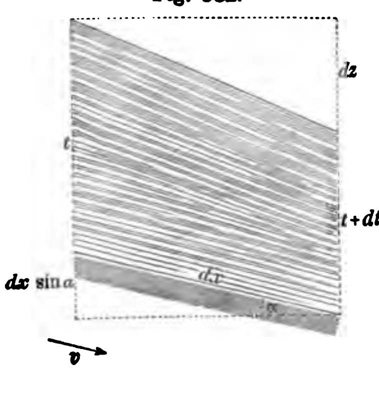
$$1)\quad dz = \zeta\, dx \frac{P}{F} \frac{v^2}{2g} + \frac{(v + dv)^2}{2g} - \frac{v^2}{2g},$$

in welcher F und P resp. den Wasserquerschnitt und den Wasserperimeter im Abstande x von dem oberen Ende des Kanales bedeuten. Da die Differenz der letzteren beiden Glieder dieser Glei-

chung als Differenzial der Grösse $\frac{v^2}{2g}$ zu betrachten ist, so kann man statt dessen auch setzen:

$$2)\quad dz = \zeta\, dx \frac{P}{F} \frac{v^2}{2g} + \frac{d(v^2)}{2g}.$$

Fig. 531.



Die pro Secunde abfliessende Wassermasse hat den Rauminhalt: $Q = Fv$; folglich ist:

$$3)\quad d(v^2) = d\left(\frac{Q^2}{F^2}\right)$$

$$= -\frac{2\,Q^2\,dF}{F^3} = -\frac{2\,v^2\,dF}{F}.$$

Wenn der Kanal ein rechteckiges Profil von der Breite b hat, so ist: $F = bt$ und $dF = b\,dt$ zu setzen, hiernach wird:

$$4)\quad d(v^2) = -\frac{2\,v^2\,dt}{t},$$

und die Gleichung 2) nimmt nach Substitution dieses Werthes die folgende Form an:

$$5)\quad dz = \frac{v^2}{2g}\left(\zeta \frac{P}{F}\,dx - \frac{2\,dt}{t}\right).$$

Nach der in Fig. 531 angegebenen Bezeichnungsweise hat das Gefälle des Wasserspiegels die Grösse:

$$6)\quad dz = dx\,.\,\sin\alpha - dt.$$

Indem man die obigen beiden Werthe von dz einander gleich setzt, erhält man eine Gleichung, aus welcher für den Differenzialquotienten von t (nach x genommen) der folgende Ausdruck sich ergiebt:

$$7)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha - \zeta \cdot \frac{P}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{v^2}{g\,t}}.$$

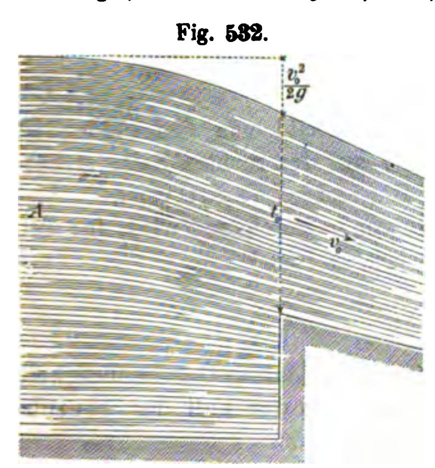
Mittelst dieser Gleichung kann man bei gegebener Wassertiefe t diejenige Grösse dt berechnen, um welche längs der unendlich kleinen Strecke dx die Wassertiefe sich ändern muss, wenn das Wasser mit der gegebenen Geschwindigkeit v durch den betreffenden Querschnitt hindurchfliessen soll.

Wenn z. B. $t = 1^m$ und $b = 10^m$ ist, so hat der Wasserquerschnitt den Flächeninhalt: $F = bt = 10^{\square m}$, und der Wasserperimeter die Länge:

$P = b + 2t = 12^m$. Wenn ferner: $\sin\alpha = \frac{1}{2000}$ ist, so ergiebt sich für die Geschwindigkeit der **gleichförmigen** Bewegung, welche bei überall gleich grosser Wassertiefe von 1^m stattfinden würde, (nach § 168, Gleichung 4) der Werth: $c = 1^m,021\,4$, und für die pro Secunde abfliessende Wassermenge der Werth: $F.c = 10{,}214$ Cubikmeter. Bei dieser gleichförmigen Bewegung würde das Längenprofil des Wasserspiegels eine dem Kanalboden parallele gerade Linie bilden.

Indem man dem Wasserspiegel ein **grösseres** Gefälle giebt, kann man bewirken, dass die Geschwindigkeit den grösseren Werth: $v = 1^m,4$, und die abfliessende Wassermenge den grösseren Werth: $Q = 10 . 1{,}4 = 14$ Cubikmeter pro Secunde erreicht. Der Geschwindigkeit $v = 1^m,4$ entspricht (nach § 168, Gleichung 3) der Coefficient: $\zeta = 0{,}007\,72$, und nach Gleichung 7) der Werth: $\frac{dt}{dx} = -\,0{,}000\,533$. Die Wassertiefe muss also in der Richtung stromabwärts um $0^m,000\,533$ pro Meter der Kanalstrecke abnehmen. Da für eine verhältnissmässig kurze Strecke das Längenprofil des Wasserspiegels bei dem hier vorausgesetzten geringen Gefälle annäherungsweise als **geradlinig** angesehen werden darf, so erhält man nunmehr nach Fig. 530, indem man darin: $x = 100^m = l - x$ und $t = 1^m$ setzt, für die Wassertiefen an den beiden Enden des Kanales die Werthe: $t_0 = 1^m,0533$ und $t_1 = 0^m,9467$. Das ganze Gefälle des Wasserspiegels hat hiernach die Grösse: $l \sin\alpha + t_0 - t_1 = 0{,}1 + 0{,}1066 = 0^m,2066$.

Fig. 532.



Der Wassertiefe $t_0 = 1^m,0533$ entspricht die Geschwindigkeit: $v_0 = \frac{1{,}4}{1{,}0533} = 1^m,329$, und die Geschwindigkeitshöhe: $\frac{v_0^2}{2g} = 0^m,09$. Wenn also der Querschnitt des Wasserbehälters A so gross ist, dass die Wassermasse in demselben als ruhend betrachtet werden darf, so wird die Oberfläche derselben um 0,09 Meter höher liegen, als der Wasserspiegel am oberen Ende des Kanales (Fig. 532). Die ganze Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel A und B in Fig. 530 muss demnach: 0,2966 Meter betragen, wenn eine Wassermenge von 14 Cubikmetern pro Secunde durch den Kanal von A nach B abfliessen soll.

Wenn man ein anderes Mal für die mittlere Geschwindigkeit den kleineren Werth: $v = 0^m,7$ annimmt (welchem der Coefficient $\zeta = 0{,}008\,03$ entspricht), so erhält man auf gleiche Weise den Werth: $\frac{dt}{dx} = +\,0{,}000\,272\,7$. Die Bewegung des Wassers ist in diesem Falle eine **verzögerte**, und es wird: $t_0 = 0^m,972\,73$, $t_1 = 1^m,027\,27$, $v_0 = 0^m,7196$, $\frac{v_0^2}{2g} = 0^m,0264$. Die Wassertiefen-Differenz hat die Grösse: $t_1 - t_0 = 0^m,054\,54$; der Wasserspiegel hat

das Gefälle: 0,1 — 0,054 54 = 0,045 46; die ganze Höhen-Differenz der beiden Wasserspiegel beträgt in diesem Falle: 0,071 86 Meter, und bei dieser Höhen-Differenz werden nur 7 Cubikmeter pro Secunde abfliessen.

§ 171.

Grenzbedingungen der beschleunigten Bewegung.

Die Bewegung des Wassers in dem Kanale ist eine beschleunigte, wenn der Differenzialquotient $\frac{dt}{dx}$ negativ ist. Nach der im vorigen Paragraphen gefundenen allgemeinen Differenzialgleichung:

$$1) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin \alpha - \zeta \frac{P}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{v^2}{gt}}$$

wird diese Bedingung erfüllt sein, sobald von den beiden im Zähler und Nenner des Ausdruckes auf der rechten Seite stehenden Grössen die eine positiv, die andere negativ ist.

Wenn mit c derjenige Werth von v bezeichnet wird, für welchen der Zähler gleich Null wird, so ist:

$$2) \quad c = \sqrt{\frac{2g\,F \sin \alpha}{\zeta P}},$$

also (nach § 168, Gleichung 4) gleich derjenigen Geschwindigkeit, welche den Werthen F, P und $\sin \alpha$ für den Fall der gleichförmigen Bewegung entsprechen würde.

Wenn mit C derjenige Werth von v bezeichnet wird, für welchen der Nenner gleich Null wird, so ist:

$$3) \quad C = \sqrt{2g\left(\frac{t}{2}\right)},$$

also gleich derjenigen Geschwindigkeit, welcher die halbe Wassertiefe als Geschwindigkeitshöhe entsprechen würde.

Denkt man sich in Fig. **528** das Wasser anfangs in gleichförmiger Bewegung von A nach B abfliessend und nachher in Folge einer Senkung des Wasserspiegels B in eine beschleunigte Bewegung übergehend, so erkennt man sogleich, dass bei diesem neuen Bewegungszustande die Geschwindigkeit des Wassers an jeder Stelle des Kanales grösser sein wird als diejenige Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser im Falle der gleichförmigen Bewegung bei gleich grosser Wassertiefe an dieser Stelle vorbeifliessen würde. Wenn also eine beschleunigte Bewegung

wirklich stattfindet, so wird v jedenfalls grösser sein als c; folglich wird der Zähler des obigen Ausdruckes in diesem Falle einen negativen Werth annehmen, und der Nenner muss positiv sein, wenn $\frac{dt}{dx}$ negativ werden soll. Der Nenner würde aber negativ werden, wenn v grösser als C wäre. Hieraus folgt, dass eine Beschleunigung überhaupt nur dann stattfinden kann, wenn v zugleich grösser als c und kleiner als C ist. Diese Bedingung hört auf erfüllbar zu sein, wenn $c = C$ ist. Durch Gleichsetzung der oben für diese beiden Grössen gefundenen Ausdrücke erhält man für diesen Grenzfall die Bedingungsgleichung:

$$4)\quad \sqrt{\frac{2g\,F\sin\alpha}{\zeta P}} = \sqrt{2g\left(\frac{t}{2}\right)},$$

welcher man nach Substitution der Werthe $F = bt$ und $P = b + 2t$ auch die folgende Form geben kann:

$$5)\quad \sin\alpha = \frac{\zeta}{2}\left(1 + \frac{2t}{b}\right).$$

Eine beschleunigte Bewegung wird also nur dann möglich sein, wenn $\sin\alpha$ kleiner ist als $\frac{\zeta}{2}\left(1 + \frac{2t}{b}\right)$.

Dass eine fernere Geschwindigkeitsveränderung nicht mehr eintreten kann, sobald die Geschwindigkeitshöhe gleich der halben Wassertiefe geworden ist, lässt sich auch direct mittelst der beiden Gleichungen 2) und 4) des vorigen Paragraphen nachweisen. Wenn man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ mit H bezeichnet, so kann man jenen beiden Gleichungen auch die folgenden Formen geben:

$$6)\quad dz = \zeta\,dx\,\frac{P}{F}\,\frac{v^2}{2g} + dH,$$

$$7)\quad dH = -\,\frac{2\,H\,dt}{t}.$$

Nach Fig. 531 besteht das ganze Gefälle dz aus zwei Theilen, von denen der eine gleich dem Gefälle des Kanalbodens und der andere gleich der Wassertiefenänderung ist. Der erstere Theil des Gefälles würde bei der kleineren Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung zur Ueberwindung der Reibungswiderstände gerade ausreichen. Bei der wirklich vorhandenen grösseren Geschwindigkeit v wird derselbe nicht mehr dazu ausreichen; es wird vielmehr zur Ueberwindung der Reibungswiderstände auch noch

ein Theil der Wassertiefenänderung in Anspruch genommen werden. Die Gleichung 7) zeigt aber, dass $dH = -dt$ wird, sobald $H = \frac{t}{2}$ ist, dass also für diesen Fall zum Hervorbringen einer beliebigen Geschwindigkeitsvergrösserung dv ein Gefälle erforderlich sein würde, welches gleich der ganzen zugehörigen Wassertiefenänderung ist. Es kann daher eine Geschwindigkeitsvergrösserung überhaupt nicht stattfinden, wenn $H = \frac{t}{2}$ ist, und noch weniger, wenn $H > \frac{t}{2}$ ist. Die Bewegung des Wassers von A nach B wird daher eine gleichförmige bleiben, wie tief auch immer der Unterwasserspiegel B sinken möge, sobald der Neigungswinkel α den aus der Bedingungsgleichung 5) zu berechnenden Werth erreicht oder übertrifft (Fig. 533). Die Bewegung längs der ganzen Kanalstrecke wird auch dann noch eine gleichförmige bleiben, wenn der Unterwasserspiegel B bis unter den Kanalboden herabsinkt, und demgemäss die Wasserbewegung am unteren Ende des Kanales in einem Wasserfalle ihren Abschluss findet (Fig. 534).

Fig. 533.

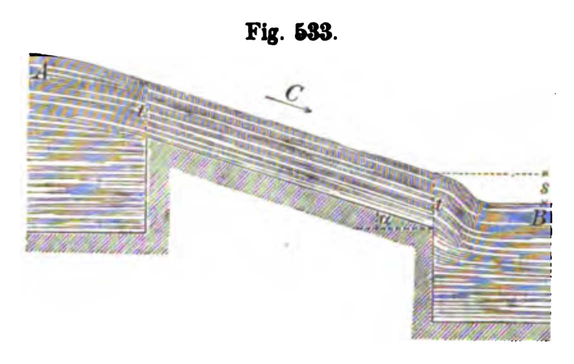
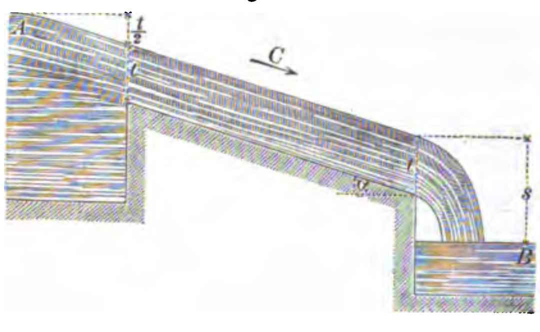


Fig. 534.



Wenn z. B. wieder $t = 1^m$ und $b = 10^m$ gesetzt wird, so ergiebt sich aus Gleichung 3) der Werth: $C = 3^m,132$. Dieser Geschwindigkeit entspricht (nach § 168, Gleichung 3) der Coefficient: $\zeta = 0,007\,55$. Hiernach erhält man aus der für den Grenzwinkel α gefundenen Gleichung 5) den Werth:

$$\sin \alpha = \frac{0,007\,55}{2}\left(1 + \frac{2}{10}\right) = 0,004\,53.$$

Wenn also der Kanalboden bei einer Länge von 1000 Metern ein Gefälle von 4,53 Metern hat, so wird das Wasser gleichförmig mit einer Geschwindig-

keit von 3,132 Metern pro Secunde von A nach B auch dann noch abfliessen, wenn der Unterwasserspiegel B um eine beliebige Grösse s sich senkt (Fig. 534). Der obere Wasserspiegel A wird in diesem Falle um die Geschwindigkeitshöhe $\frac{t}{2} = 0{,}5$ Meter höher liegen als der Wasserspiegel am oberen Ende des Kanales.

§ 172.

Beschleunigte Bewegung in bergan steigendem Kanale.

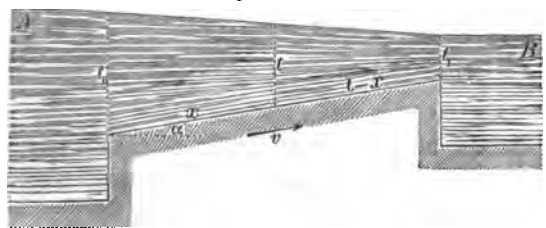
Da die Geschwindigkeitshöhe niemals über die halbe Wassertiefe hinaus wachsen kann — vorausgesetzt, dass dieselbe von vornherein einen kleineren Werth hatte — so wird in der allgemeinen Differenzialgleichung:

$$1) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha - \zeta \frac{P}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{v^2}{gt}}$$

der Nenner des Ausdruckes auf der rechten Seite immer **positiv** sein, wenn der Neigungswinkel α kleiner ist als der aus Gleichung 5) des vorigen Paragraphen zu berechnende Grenzwerth. Der Differenzialquotient $\frac{dt}{dx}$ wird daher immer **negativ** sein, wenn $\sin\alpha$ **negativ** ist. Hieraus folgt, dass die Bewegung unter allen Umständen eine beschleunigte sein wird, wenn das Wasser in Bezug auf den ansteigenden Kanalboden **bergan** fliesst statt **bergab**. Indem man „$-\sin\alpha$" statt „$+\sin\alpha$" setzt, erhält man für diesen Fall die Gleichung:

$$2) \quad \frac{dt}{dx} = -\left\{\frac{\sin\alpha + \zeta \frac{P}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{v^2}{gt}}\right\}.$$

Fig. 535.



Mit Beibehaltung der am Schlusse des § 170 angenommenen Zahlenwerthe: $t = 1^m$, $b = 10^m$, $P = 12^m$, $F = 10^{\square m}$, $\sin\alpha = 0{,}0005$, $v = 0^m{,}7$ und $\zeta = 0{,}008\,03$ erhält man aus obiger Gleichung den Werth: $\frac{dt}{dx} = -0{,}000\,78$, und wenn man wie dort: $x = 100^m = l - x$ setzt, so wird: $t_0 = 1^m{,}078$ und $t_1 = 0^m{,}922$. Hiernach hat das Gefälle des Wasserspiegels die Grösse: $t_0 - t_1 - l \sin\alpha = 0{,}156 - 0{,}1 = 0^m{,}056$. Die Geschwindigkeit hat am oberen Ende des Kanales die Grösse:

$v_0 = 0^m,65$, und am unteren Ende die Grösse: $v_1 = 0^m,76$. Der Wasserspiegel A liegt um die Geschwindigkeitshöhe: $\frac{v_0^2}{2g} = 0^m,0215$ höher als der Wasserspiegel am oberen Ende des Kanales. Die ganze Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel A und B muss also: 0,0775 Meter betragen, wenn die der angenommenen mittleren Geschwindigkeit: $v = 0^m,7$ entsprechende Wassermenge von 7 Cubikmetern pro Secunde abfliessen soll.

Die obige Gleichung bleibt auch dann noch gültig, wenn der Neigungswinkel des Kanalbodens die Grösse Null hat. Hiernach erhält man für die Bewegung des Wassers in einem horizontalen Kanale die Gleichung:

$$3)\quad \frac{dt}{dx} = -\left(\frac{\zeta \frac{P}{F} \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{v^2}{gt}}\right).$$

Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen wird für diesen Fall: $\frac{dt}{dx} = 0,000\,253\,6$, also $t_0 = 1^m,025\,36$ und $t_1 = 0^m,974\,64$, folglich $v_0 = 0^m,6827$, $v_1 = 0^m,7182$ und $\frac{v_0^2}{2g} = 0^m,0237$. Für das Gefälle des Wasserspiegels ergiebt sich hiernach der Werth: $t_0 - t_1 = 0^m,050\,72$, und für die ganze Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel A und B der Werth: $0^m,0735$.

§ 173.

Längenprofil des Wasserspiegels.

Nur bei geringem Gefälle des Wasserspiegels darf das Längenprofil desselben für eine kurze Strecke annäherungsweise als geradlinig betrachtet werden. Um die genauere Form dieses Längenprofiles zu bestimmen, hat man sich die ganze Länge l in mehrere Theile: $l_1, l_2 \ldots l_n$ zerlegt zu denken und die allgemeine Differenzialgleichung 7) des § 170, welcher man nach Substitution der Werthe: $F = bt$ und $P = b + 2t$ auch die folgende Form geben kann:

$$1)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha - \zeta\left(1 + \frac{2t}{b}\right)\frac{v^2}{2gt}}{1 - \frac{v^2}{gt}},$$

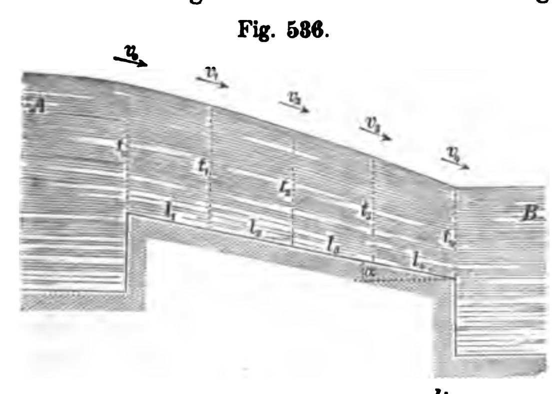
alsdann der Reihe nach auf jede einzelne dieser Strecken anzuwenden, indem man für die Grössen v und t ihre jedesmaligen Mittelwerthe einsetzt (Fig. 536).

Wenn die von dem Kanale pro Secunde fortzuführende Wassermenge Q vorgeschrieben, und die Wassertiefe t_0 am oberen Ende gegeben ist, so kann man zunächst aus der Gleichung:

$$2)\quad v_0 = \frac{Q}{b\,t_0}$$

die Geschwindigkeit am oberen Ende des Kanales berechnen. Indem man alsdann für die Wassertiefe t_1 (am unteren Ende der ersten Strecke l_1) einen beliebigen Werth willkürlich annimmt, findet man auf gleiche Weise die Geschwindigkeit am unteren Ende der ersten Strecke aus der Gleichung:

Fig. 586.



$$3)\quad v_1 = \frac{Q}{b\,t_1}.$$

Hiernach kann man aus der Gleichung 1), indem man darin: $v = \frac{v_0 + v_1}{2}$ und $t = \frac{t_0 + t_1}{2}$ setzt, den Mittelwerth des Differenzialquotienten $\frac{dt}{dx}$ für die erste Strecke, und mit Benutzung dieses Werthes zugleich die Streckenlänge l_1 berechnen, welche der willkürlich angenommenen Wassertiefen-Abnahme $t_0 - t_1$ entspricht. Durch Wiederholung dieser Berechnung in Bezug auf die zweite, dritte und jede folgende Strecke kann man nachher auf gleiche Weise die übrigen Theile des Längenprofiles bestimmen.

In dem ersten Zahlenbeispiele des § 170 wurde: $Q = 14^{cm}$, $b = 10^m$, $\sin\alpha = 0{,}0005$ angenommen, woraus die Werthe: $t_0 = 1^m{,}0533$, $v_0 = 1^m{,}3292$ und eine Wassertiefen-Abnahme von 0,1066 Metern für die ganze Länge des Kanales berechnet wurden. Indem man sich diese ganze Wassertiefen-Abnahme in vier gleiche Theile zerlegt denkt, findet man für die Wassertiefen an den unteren Endpunkten der vier zugehörigen Strecken die Werthe: $t_1 = 1^m{,}026\,65$, $t_2 = 1^m$, $t_3 = 0^m{,}973\,35$, $t_4 = 0^m{,}9467$, und für die Geschwindigkeiten an diesen vier Stellen die Werthe: $v_1 = 1^m{,}3646$, $v_2 = 1^m{,}4$, $v_3 = 1^m{,}4377$, $v_4 = 1^m{,}4788$. Hiernach hat man bei der Berechnung der ersten Strecke: $v = \frac{v_0 + v_1}{2} = 1^m{,}347$, $t = \frac{t_0 + t_1}{2} = 1^m{,}04$ und $\zeta = 0{,}007\,73$ zu setzen; man erhält dann aus Gleichung 1) den Werth:

$$4)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{0{,}0005 - 0{,}007\,73\left(1 + \frac{2\,.\,1{,}04}{10}\right)\cdot\frac{1{,}347^2}{2\,.\,9{,}81\,.\,1{,}04}}{1 - \frac{1{,}347^2}{9{,}81\,.\,1{,}04}} = -\,0{,}000\,401\,3,$$

als Wassertiefen-Zunahme pro Längeneinheit der ersten Strecke. Da die

ganze Wassertiefen-Abnahme für diese Strecke gleich $\frac{0,1066}{4} = 0^m,026\,65$ ist, so ergiebt sich für die Länge der ersten Strecke der Werth:

$$5)\quad l_1 = \frac{0,026\,65}{0,000\,401\,3} = 66^m,41.$$

Bei der Berechnung der zweiten Strecke hat man: $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 1^m,3823$, $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 1^m,0133$ und $\zeta = 0,007\,72$ zu setzen; man erhält dann die Werthe: $\frac{dt}{dx} = -0,000\,486$ und $l_2 = 54^m,84$. Auf gleiche Weise findet man für die dritte und vierte Strecke die Werthe: $l_3 = 45^m,82$ und $l_4 = 38^m,40$.

Die genauere Berechnung des in § 170 annäherungsweise als geradlinig betrachteten Längenprofiles führt also zu dem Resultate, dass die ganze Länge des Kanales nicht 200 Meter — wie in § 170 angenommen wurde — sondern 205,47 Meter betragen müsste, wenn bei der vorausgesetzten Wassertiefen-Abnahme von 0,1066 Metern eine Wassermenge von 14 Cubikmetern pro Secunde abfliessen soll.

Man erkennt an dem oben berechneten Zahlenbeispiele, dass nach dem unteren Ende des Kanales hin die Wassertiefe immer rascher abnimmt, und die Geschwindigkeit immer rascher zunimmt. Da nach § 171 die Geschwindigkeitshöhe niemals über die halbe Wassertiefe hinaus wachsen kann, so muss es für die Wassertiefe selbst einen unteren Grenzwerth geben, unter welchen hinab dieselbe niemals abnehmen kann, wie tief auch immer der Wasserspiegel B sinken möge. Diesen Grenzwerth t findet man aus den gegebenen Grössen v_0 und t_0, indem man die der Geschwindigkeitshöhe $\frac{t}{2}$ entsprechende Geschwindigkeit gleich derjenigen Geschwindigkeit setzt, welche dem umgekehrten Querschnittsverhältnisse entspricht, aus der Gleichung:

$$6)\quad v_0 \cdot \frac{t_0}{t} = \sqrt{2g \cdot \frac{t}{2}}, \quad \text{oder:} \quad t = \sqrt[3]{\frac{v_0^2\, t_0^2}{g}}.$$

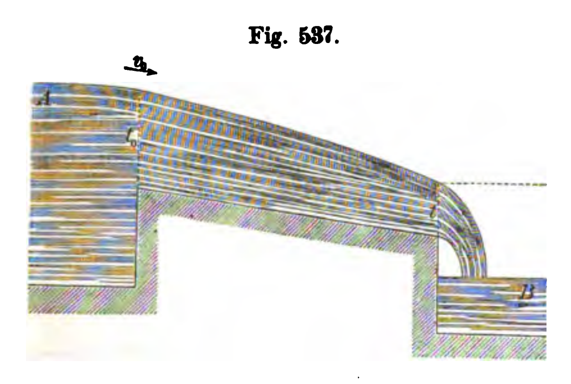
So z. B. würde man bei den oben angenommenen Werthen: $v_0 = 1^m,3292$ und $t_0 = 1^m,0533$ für diese untere Grenze der Wassertiefe den folgenden Werth erhalten:

$$7)\quad t = \sqrt[3]{\frac{1,3292^2 \,.\, 1,0533^2}{9,81}} = 0^m,585.$$

Denkt man sich den oben als Beispiel gewählten Kanal stromabwärts noch weiter sich fortsetzend und den unteren Endpunkt gerade bis zu derjenigen Stelle hinausgerückt, für welche nach der oben angewendeten Berechnungsmethode die Wassertiefe: $t = 0^m,585$ sich ergeben würde, so erkennt man, dass in diesem

Falle die angenommene Grösse: $Q = 14^{cm}$ zugleich den oberen Grenzwerth bilden würde für die Wassermenge, welche unter solchen Umständen überhaupt von dem Kanale fortgeführt werden kann, und die Grösse: $v_0 = 1^m,3292$ den oberen Grenzwerth für die Geschwindigkeit, mit welcher bei der angenommenen Wassertiefe: $t_0 = 1^m,0533$ am oberen Ende das Wasser von A abfliessen kann. Diese Geschwindigkeit wird selbst dann nicht ferner wachsen können, wenn der Wasserspiegel B bis unter den Kanalboden hinab sinkt (Fig. 537). Zugleich ergiebt sich aus Gleichung 1): dass an dieser Stelle: $\frac{dt}{dx} = -\infty$ wird, dass also das Längenprofil des Wasserspiegels an dieser Stelle eine verticale Tangentenrichtung annimmt.

Fig. 537.



Läge das untere Ende noch weiter entfernt, so würde das Wasser überhaupt nicht mehr mit der Geschwindigkeit: $v_0 = 1^m,3292$ in den Kanal eintreten können. Es würde in diesem Falle vielmehr ein neuer — und zwar kleinerer — Grenzwerth v_0' für die Eintrittsgeschwindigkeit v_0 sich bilden, und wiederum würde an dem unteren Ende — falls der Ausfluss (wie in Fig. 537) in dem leeren Raum stattfindet — diejenige Wassertiefe t' sich herstellen, welche nach Gleichung 6) dem neuen Werthe v_0' der Eintrittsgeschwindigkeit entspricht, sowie umgekehrt aus dem gegebenen Werthe t' der zugehörige Werth von v_0' aus der obigen Gleichung berechnet werden kann.

Wenn man z. B. $t' = 0^m,55$ setzt, so erhält man aus Gleichung 6) für die zugehörige Eintrittsgeschwindigkeit den Werth:

$$8) \quad v_0' = \sqrt{\frac{9,81 \, . \, 0,55^3}{1,0533^2}} = 1^m,213.$$

Da jedoch die Ungenauigkeit der hinsichtlich der Bewegung des Wassers in § 168 gemachten Voraussetzungen mit wachsender Neigung des Wasserspiegels zunimmt, so wird man für den hier betrachteten Grenzfall einer verticalen Lage des Wasserspiegels

selbstverständlich eine vollkommene Uebereinstimmung der Rechnungsresultate mit den Erfahrungsresultaten nicht erwarten dürfen.

§ 174.

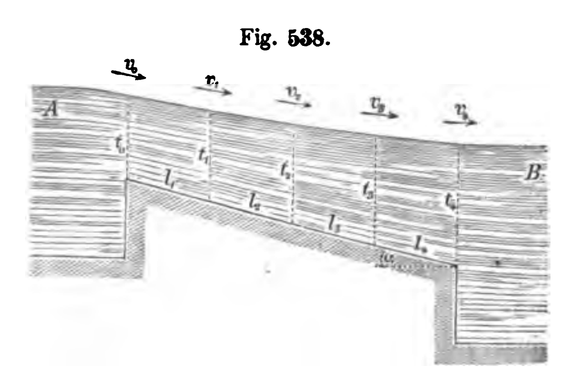
Stau-Curve.

Die in § 170 gefundene allgemeine Differenzialgleichung kann — wie das am Schlusse jenes Paragraphen berechnete zweite Zahlenbeispiel zeigt — ebensowohl auf die verzögerte, als auf die beschleunigte Bewegung angewendet werden, und wenn man jener Gleichung wiederum die im vorigen Paragraphen angegebene Form:

$$1)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha - \zeta\left(1 + \frac{2t}{b}\right)\frac{v^2}{2gt}}{1 - \frac{v^2}{gt}}$$

giebt, so kann man bei der Berechnung des Längenprofiles genau dasselbe Verfahren anwenden, welches im vorigen Paragraphen auf den Fall der beschleunigten Bewegung angewendet wurde.

Fig. 538.



Man berechnet zunächst aus der gegebenen Wassertiefe t_0 am oberen Ende des Kanales und der gleichfalls gegebenen Wassermenge Q die Eintrittsgeschwindigkeit v_0, nimmt alsdann für die Wassertiefe t_1 am unteren Endpunkte der ersten Strecke l_1 einen willkürlich zu wählenden Werth an und berechnet daraus die Geschwindigkeit v_1 an dem unteren Endpunkte dieser Strecke (Fig. 538). Hiernach kann man aus der obigen Differenzialgleichung, indem man darin $v = \frac{v_0 + v_1}{2}$ und $t = \frac{t_0 + t_1}{2}$ setzt, die Wassertiefen-Zunahme pro Längeneinheit für die erste Strecke und damit zugleich die Länge derselben berechnen. Indem man diese Berechnung in Bezug auf die zweite, dritte und jede folgende Strecke wiederholt, findet man successive die übrigen Theile des ganzen Längenprofiles.

Bei dem am Schlusse des § 170 berechneten zweiten Zahlenbeispiele wurde: $Q = 7$ Cubikmeter, $b = 10^m$, $\sin\alpha = 0{,}0005$ gesetzt, woraus die Werthe: $t_0 = 0^m{,}972\,73$, $v_0 = 0^m{,}7196$ und eine Wassertiefenzunahme von 0,054 54 Metern für die ganze Länge des Kanales berechnet wurden. Indem man sich diese ganze Wassertiefenzunahme in vier gleiche Theile von der Grösse: $\frac{0{,}054\,54}{4} = 0^m{,}013\,635$ zerlegt denkt, findet man für die Wassertiefen an den unteren Endpunkten der vier zugehörigen Strecken die Werthe: $t_1 = 0^m{,}9864$, $t_2 = 1^m$, $t_3 = 1^m{,}0136$, $t_4 = 1^m{,}027\,27$, und für die Geschwindigkeiten an diesen vier Stellen die Werthe: $v_1 = 0^m{,}7097$, $v_2 = 0^m{,}7$, $v_3 = 0^m{,}6906$, $v_4 = 0^m{,}6814$. Hiernach hat man bei der Berechnung der obersten Strecke: $v = \frac{v_0 + v_1}{2} = 0^m{,}7146$, $t = \frac{t_0 + t_1}{2} = 0^m{,}9795$ und $\zeta = 0{,}008\,016$ zu setzen: man erhält dann aus Gleichung 1) den Werth:

$$2)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{0{,}0005 - 0{,}008\,016 \cdot \left(1 + \frac{2 \,.\, 0{,}9795}{10}\right) \frac{0{,}7146^2}{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}9795}}{1 - \frac{0{,}7146^2}{9{,}81 \,.\, 0{,}9795}} = 0{,}000\,258\,9,$$

als Wassertiefenzunahme pro Längeneinheit der ersten Strecke, und für die Länge derselben ergiebt sich hieraus der Werth:

$$3)\quad l_1 = \frac{0{,}013\,635}{0{,}000\,258\,9} = 52^m{,}28.$$

Bei der Berechnung der zweiten Strecke hat man: $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 0^m{,}7048$, $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 0^m{,}9932$ und $\zeta = 0{,}008\,024$ zu setzen; man erhält dann die Werthe: $\frac{dt}{dx} = 0{,}000\,268\,45$ und $l_2 = 50^m{,}8$. Auf dieselbe Weise findet man für die dritte und vierte Strecke resp. die Werthe: $l_3 = 49^m{,}15$ und $l_4 = 47^m{,}7$.

Die Vergleichung dieser Werthe mit denjenigen Werthen, welche aus der in § 170 gemachten Voraussetzung einer geradlinigen Form des Längenprofiles sich ergeben würden, zeigt: dass bei der verzögerten Bewegung im Allgemeinen der Fehler sehr klein sein wird, welchen man begeht, indem man für die verhältnissmässig kurze Strecke von einigen hundert Metern das Längenprofil des Wasserspiegels als geradlinig annimmt.

Wenn man in Gleichung 1) den Zähler des Ausdruckes auf der rechten Seite gleich Null setzt, so erhält man die Gleichung:

$$4)\quad \sin\alpha = \zeta\left(1 + \frac{2t}{b}\right)\frac{v^2}{2gt},$$

welcher man nach Substitution des Werthes $v = \frac{Q}{bt}$ auch die folgende Form geben kann:

$$5)\quad t = \sqrt[3]{\frac{\zeta Q}{2gb^2 \sin\alpha}\left(1 + \frac{2t}{b}\right)}.$$

Indem man zunächst annäherungsweise: $\left(1 + \frac{2t}{b}\right) = 1$ und $\zeta = 0{,}008$ setzt, erhält man aus dieser Gleichung den Annäherungswerth: $t = 0^m{,}73$, und nach Substitution desselben in dem Ausdrucke auf der rechten Seite mit Benutzung des nunmehr (aus § 168, Gleichung 3) zu entnehmenden genaueren Werthes von ζ den genaueren Werth: $t = 0^m{,}77$. Dieser Werth von t würde dem Werthe: $\frac{dt}{dx} = 0$, also dem Falle der gleichförmigen Bewegung entsprechen; d. h. wenn bei gleichförmiger Bewegung die oben angenommene Wassermenge von 7 Cubikmetern pro Secunde durch den Kanal fortgeführt werden sollte, so müsste die Wassertiefe überall 0,77 Meter betragen.

Die Gleichung 1) zeigt, dass mit abnehmender Wassertiefe t der Differenzialquotient $\frac{dt}{dx}$ immer kleiner wird, und dass derselbe gleich Null wird, wenn $t = 0^m{,}77$ wird. Denkt man sich den in Fig. 538 dargestellten Kanal über den oberen Endpunkt hinaus beliebig weit verlängert, und die Berechnung des Längenprofiles in Bezug auf den stromaufwärts gelegenen Theil immer weiter fortgesetzt, so erkennt man, dass die in der Richtung stromaufwärts allmählich kleiner werdende Wassertiefe dem oben gefundenen Grenzwerthe: $t = 0^m{,}77$ immer mehr sich nähern wird, ohne denselben jemals wirklich zu erreichen. In der Richtung stromaufwärts nähert sich also das Längenprofil des Wasserspiegels asymptotisch derjenigen (dem Kanalboden parallelen) geraden Linie, welche für den Fall der gleichförmigen Bewegung (bei gleich grosser Wassermenge Q) das Längenprofil des Wasserspiegels bilden würde.

Dasselbe Resultat würde auch in Bezug auf den in Fig. 536 dargestellten Fall sich ergeben, wenn man sich den Kanal über den oberen Endpunkt hinaus verlängert denkt und die Berechnung des Längenprofiles in der Richtung stromaufwärts immer weiter fortsetzt. Der im vorigen Paragraphen angenommenen Wassermenge von 14 Cubikmetern pro Secunde würde für den Fall der gleichförmigen Bewegung nach Gleichung 5) die Wassertiefe: $t = 1^m{,}245$ entsprechen. In Fig. 536 würde also eine in der Höhe: $t = 1^m{,}245$ über dem Kanalboden parallel zu demselben gelegte gerade Linie die Asymptote bilden für das in der Richtung stromaufwärts bis ins Unendliche fortgesetzte Längenprofil des Wasserspiegels.

§ 175.

Wasser-Schwelle.

Bei der verzögerten Bewegung des Wassers in einem Kanale hat der in § 170 (Gleichung 7) für die Wassertiefen-Aenderung gefundene Ausdruck:

$$1)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha - \zeta \cdot \frac{P}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{v^2}{gt}}$$

immer einen positiven Werth, und zwar ist sowohl der Zähler als der Nenner des Ausdruckes auf der rechten Seite stets eine positive Grösse. In der Richtung stromaufwärts findet ein beständiges Abnehmen der Wassertiefe t und ein beständiges Zunehmen der Geschwindigkeit v statt. Es wird daher sowohl der Zähler als der Nenner des obigen Ausdruckes in der Richtung stromaufwärts allmählich kleiner werden und dem Werthe Null immer mehr sich nähern.

Wenn mit c derjenige Werth von v bezeichnet wird, für welchen der Zähler gleich Null wird, so ist:

$$2)\quad c = \sqrt{\frac{2g\,F\sin\alpha}{\zeta P}},$$

also nach § 168 (Gleichung 4) gleich derjenigen Geschwindigkeit, welche den Werthen: F, P, $\sin\alpha$ als Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung entsprechen würde.

Wenn mit C derjenige Werth von v bezeichnet wird, für welchen der Nenner gleich Null wird, so ist:

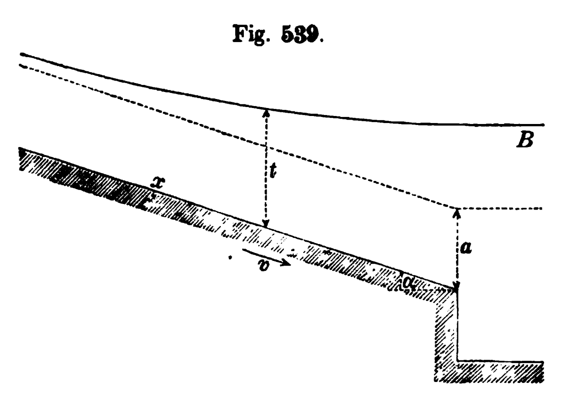
$$3)\quad C = \sqrt{2g \cdot \frac{t}{2}},$$

also gleich derjenigen Geschwindigkeit, welcher die halbe Wassertiefe als Geschwindigkeitshöhe entsprechen würde. (Vergl. § 171.)

Hieraus folgt, dass bei allmählichem Wachsen von v der Zähler den Werth Null früher erreichen wird als der Nenner, sobald die der Geschwindigkeit c entsprechende Geschwindigkeitshöhe kleiner ist als die halbe zugehörige Wassertiefe. Wenn aber der Zähler den Werth Null erreicht, während der Nenner noch positiv geblieben ist, so wird an der betreffenden Stelle der Differenzialquotient $\frac{dt}{dx}$ den Werth Null annehmen, welcher dem Falle der gleichförmigen Bewegung entsprechend eine fernere Wassertiefen-Abnahme ausschliesst, und das Längenprofil des Wasserspiegels wird in diesem Falle (auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen auf dem Wege der Rechnung ermittelt wurde) in der Richtung stromaufwärts an das geradlinige Längenprofil der gleichförmigen Bewegung asymptotisch sich anschliessen (Fig. 539).

Denkt man sich in dem (unendlich lang vorausgesetzten) Kanale die Wassermenge Q pro Secunde anfangs in gleichförmiger Bewegung bei überall gleich grosser Wassertiefe a mit der Geschwindigkeit c abfliessend und hernach in Folge einer durch Steigen des Unterwasserspiegels B hervorgebrachten Stauung die Wassertiefe überall so lange wachsend, bis nach eingetretenem Beharrungszustande wiederum dieselbe Wassermenge Q pro Secunde zum Abflusse gelangt, so erkennt man, dass ein solcher asymptotischer Anschluss der Staucurve an das geradlinige Längenprofil der gleichförmigen Bewegung immer dann stattfinden wird, wenn die der anfänglichen Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung entsprechende Geschwindigkeitshöhe kleiner als die halbe anfängliche Wassertiefe war. Nach § 171 (Gleichung 5) wird also die Staucurve die in Fig. 539 dargestellte Form annehmen, sobald der Neigungswinkel des Kanalbodens der folgenden Bedingung entspricht:

Fig. 539.



$$4) \quad \sin\alpha < \frac{\zeta}{2}\left(1 + \frac{2a}{b}\right).$$

Wenn z. B. $a = 1^m$ und $b = 10^m$ gesetzt wird, so nimmt diese Bedingung die Form an: $\sin\alpha < \frac{0,008}{2}\left(1 + \frac{2 \cdot 1}{10}\right)$, oder: $\sin\alpha < 0,0048$.

Eine von der vorigen gänzlich verschiedene Form dagegen wird das Längenprofil des Wasserspiegels annehmen, wenn $\frac{c^2}{2g}$ grösser als $\frac{a}{2}$ war, denn in diesem letzteren Falle wird in Gleichung 1) bei allmählichem Wachsen von v der Nenner auf der rechten Seite den Werth Null erreichen und nach der negativen Seite hin überschreiten, während der Zähler noch positiv geblieben ist. Der Differentialquotient $\frac{dt}{dx}$ wird also an der betreffenden Stelle durch den Werth ∞ aus dem positiven in das negative

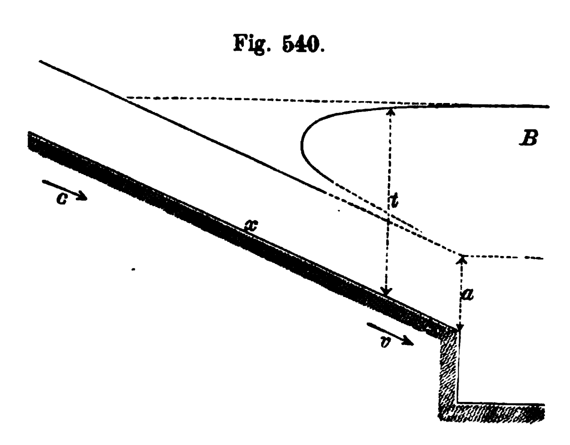
Gebiet übergehen — entsprechend einer Umbiegung der Staucurve und einem Zurückkehren derselben nach dem unteren Ende des Kanales hin. — Um das Längenprofil des Wasserspiegels für diesen Fall zu bestimmen, würde man zunächst der Gleichung 1), indem man darin $v = \frac{Q}{bt}$ setzt, die folgende Form zu geben haben:

$$5)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha - \zeta\left(1 + \frac{2t}{b}\right)\cdot\frac{Q^2}{2gb^2t^3}}{1 - \frac{Q^2}{gb^2t^3}}.$$

Nach dieser Gleichung würde man für jeden gegebenen Werth von t den zugehörigen Werth des Differenzialquotienten $\frac{dt}{dx}$ berechnen und (auf dieselbe Weise wie in den vorigen beiden Paragraphen gezeigt wurde) die einzelnen Theile des Längenprofiles nach und nach bestimmen können.

Durch Ausführung dieser Rechnung würde man für das Längenprofil des Wasserspiegels eine Curve erhalten, welche mit dem oberen Zweige an die Horizontale, und mit dem unteren wieder rückwärts gewendeten Zweige an das geradlinige Längenprofil der gleichförmigen Bewegung asymptotisch sich anschliesst — in solcher Weise, dass in der stromabwärts von jenem Umkehrpunkte gelegenen Kanalstrecke jedem Werthe von x zwei verschiedene Werthe von t entsprechen würden (Fig. 540). Wenn aber der Wasserspiegel wirklich eine solche Form hätte, so würden jedenfalls in der Nähe derjenigen Stelle, an welcher nach obiger Gleichung der Differenzialquotient $\frac{dt}{dx}$ einen unendlich grossen Werth annimmt, die in § 168 gemachten Voraussetzungen, nach welchen in allen Punkten eines und desselben Querschnittes die Wassertheilchen mit gleichen Geschwindigkeiten sich bewegen

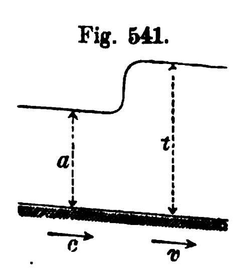
Fig. 540.



sollten, unmöglich noch erfüllt sein können, und da die obige Differenzialgleichung eben aus jenen Voraussetzungen abgeleitet worden war, so folgt hieraus: dass dieselbe auf den vorliegenden Fall überhaupt nicht mehr angewendet werden darf.

Obwohl hiernach eine directe Anwendung der obigen Rechnungsresultate nicht statthaft sein würde, so ist doch eine indirecte Verwerthung derselben hiermit keineswegs ausgeschlossen, insofern man aus dem Ergebnisse der obigen Untersuchung den Schluss ziehen darf, dass in dem vorliegenden Falle das Längenprofil des Wasserspiegels überhaupt keine stetig gekrümmte Linie bilden kann. Man muss vielmehr annehmen, dass an irgend einer Stelle ein plötzlicher Uebergang aus dem geradlinigen Längenprofile der gleichförmigen Bewegung in das krummlinige Längenprofil der ungleichförmigen Bewegung stattfinden wird. Es bildet sich in diesem Falle eine sogenannte Wasser-Schwelle, bei welcher die Wassertiefe sprungweise aus einem kleineren Werthe in einen grösseren Werth übergeht. In dem stromaufwärts gelegenen Theile wird die gleichförmige Bewegung ihren ungestörten Verlauf nehmen, wie wenn gar keine Stauung eingetreten wäre. In dem stromabwärts gelegenen Theile wird das Längenprofil allmählich in die Horizontale des Unterwasserspiegels B übergehen.

Fig. 541.



Die Höhe der Wasserschwelle würde man annäherungsweise mit Hülfe des Princips der lebendigen Kraft berechnen können, indem man die Differenz der beiden Geschwindigkeitshöhen gleich der Höhendifferenz der beiden Wasserspiegel setzt; also nach Fig. 541 aus der Gleichung:

$$6)\quad \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g} = a - t,$$

welcher man nach Substitution der Werthe: $v = c \cdot \frac{a}{t}$ und $\frac{c^2}{2g} = H$ auch die folgenden Formen geben kann:

$$7)\quad \frac{c^2}{2g}\left(\frac{a^2 - t^2}{t^2}\right) = a - t,$$

$$8)\quad H\left(\frac{a + t}{t^2}\right) = 1,$$

$$9)\quad t^2 - Ht = Ha,$$

$$10)\quad t = \frac{H}{2} + \sqrt{Ha + \frac{H^2}{4}} \cdot$$

Aus dieser letzteren Gleichung ergeben sich die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\frac{H}{a} =$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{t-a}{a} =$	0	0,618	1,732	2,791.

Dem Werthe: $H = \frac{a}{2}$ entspricht nach obiger Gleichung der Werth: $t - a = 0$; dieselbe zeigt also in Uebereinstimmung mit dem schon früher gefundenen Resultate, dass eine Wasserschwelle nur dann sich bilden wird, wenn die Geschwindigkeitshöhe grösser als die halbe Wassertiefe ist, oder nach § 171 (Gleichung 5), wenn der Neigungswinkel des Kanalbodens der folgenden Bedingung entspricht:

$$11)\quad \sin\alpha > \frac{\zeta}{2}\left(1 + \frac{2a}{b}\right) \cdot$$

Nach § 168 entsprechen den Werthen: $a = 0^m,4$, $b = 2^m$, $c = 2^m,8$ für den Fall der gleichförmigen Bewegung die Werthe: $\zeta = 0,007\,56$ und $\sin\alpha = 0,010\,584$. Da die Geschwindigkeitshöhe: $H = \frac{2,8^2}{2 \,.\, 9,81} = 0^m,4$ in diesem Falle gleich der ganzen Wassertiefe ist, so wird nach obiger Tabelle: $\frac{t-a}{a} = 0,618$, oder: $t - a = 0,4 \,.\, 0,618 = 0^m,247$. Bei diesem Gefälle des Kanalbodens wird also eine Wasserschwelle sich bilden, deren Höhe etwa 247 Millimeter beträgt.

§ 176.

Annäherungsform der Stau-Curve für einen Kanal von grosser Breite und geringer Wassertiefe.*)

Wenn die Wassertiefe t im Verhältniss zu der Kanalbreite b überall sehr klein ist, so kann man der Gleichung 1) des § 174, indem man darin das Glied $\frac{2t}{b}$ gegen das Glied „1“ vernachlässigt, die folgende Form geben:

$$1)\quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha - \frac{\zeta v^2}{2gt}}{1 - \frac{v^2}{gt}}.$$

*) Nach Bresse: „Cours de mécanique appliquée“. Seconde Partie: „Hydraulique“. Paris. 1860.

Die Werthe $v = c$ und $t = a$ entsprechen dem Falle der gleichförmigen Bewegung, und da für diesen Fall der Zähler des Ausdruckes auf der rechten Seite gleich Null werden muss, so ist:

$$2)\quad 0 = \sin\alpha - \frac{\zeta c^2}{2ga}.$$

Nach Substitution des hieraus für den Coefficienten ζ zu entnehmenden Werthes erhält man die Gleichung:

$$3)\quad \frac{dt}{dx} = \sin\alpha \left(\frac{1 - \frac{a v^2}{t c^2}}{1 - \frac{v^2}{g t}} \right).$$

Da die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Wassertiefen sich verhalten, so kann $v = c\,\frac{a}{t}$ gesetzt werden; also ist:

$$4)\quad \frac{dt}{dx} = \sin\alpha \left(\frac{1 - \frac{a^3}{t^3}}{1 - \frac{c^2 a^2}{g t^3}} \right),$$

und wenn man die der Geschwindigkeit c entsprechende Geschwindigkeitshöhe: $\frac{c^2}{2g} = H$ setzt, so kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$5)\quad dx\,.\sin\alpha = \frac{(t^3 - 2Ha^2)\,dt}{t^3 - a^3}.$$

Wenn man wieder (wie in Fig. 531) das der Strecke dx und der Wassertiefen-Zunahme dt entsprechende Gefälle des Wasserspiegels mit dz bezeichnet, so ist:

$$6)\quad dx\,.\sin\alpha = dz + dt$$

zu setzen, und man erhält durch Gleichsetzung der obigen beiden Ausdrücke die Gleichung:

$$7)\quad dz + dt = \left(\frac{t^3 - 2\,Ha^2}{t^3 - a^3} \right) dt, \quad \text{oder:}$$

$$8)\quad dz = \frac{a^2\,(a - 2\,H)\,dt}{t^3 - a^3}.$$

Bei der verzögerten Bewegung ist die Wassertiefe t an allen Stellen grösser als diejenige überall gleich grosse Wassertiefe a, bei welcher eine gleich grosse Wassermenge pro Secunde in gleichförmiger Bewegung abfliessen würde. Hiernach ist das Verhältniss:

$$9) \quad \frac{t}{a} = \omega$$

eine Zahl, welcher immer grösser ist als „Eins". Nach Substitution des aus der letzteren Gleichung für t zu entnehmenden Werthes kann man der vorhergehenden Gleichung auch die folgende Form geben:

$$10) \quad dz = (a - 2H)\frac{d\omega}{\omega^3 - 1}, \quad \text{oder:}$$

$$11) \quad z = (a - 2H)\int \frac{d\omega}{\omega^3 - 1}.$$

Um die Integration auszuführen, hat man zunächst den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck in folgender Weise umzuformen:

$$12) \quad \frac{d\omega}{\omega^3 - 1} = \frac{d\omega}{3}\left\{\frac{1}{\omega - 1} - \left(\frac{\omega + 2}{\omega^2 + \omega + 1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{d\omega}{\omega - 1} - \left[\frac{\omega + \frac{1}{2}}{\left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right]d\omega - \frac{\sqrt{3}\,.\,d\left(\frac{2\omega + 1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2\omega + 1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right\},$$

und erhält, indem man nach Substitution des letzteren Ausdruckes die Integration ausführt, die folgenden Gleichungen:

$$13) \quad z = \left(\frac{a - 2H}{3}\right)\left\{\int \frac{d\omega}{\omega - 1} - \int \frac{\left(\omega + \frac{1}{2}\right)d\omega}{\left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{3}\int \frac{d\left(\frac{2\omega + 1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2\omega + 1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right\},$$

$$14) \quad z = \left(\frac{a - 2H}{3}\right)\left\{\lg(\omega - 1) - \frac{1}{2}\lg\left[\left(\omega + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] - \sqrt{3}\,.\,\text{arc tg}\left(\frac{2\omega + 1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$
$$+ \text{Const., oder:}$$

$$15) \quad z = \left(\frac{a - 2H}{3}\right)\left\{\lg\left(\frac{\omega - 1}{\sqrt{\omega^2 + \omega + 1}}\right) - \sqrt{3}\,.\,\text{arc tg}\left(\frac{2\omega + 1}{\sqrt{3}}\right)\right\} + \text{Const.}$$

Denkt man sich den Kanal über den unteren Endpunkt hinaus bis ins Unendliche sich fortsetzend, so erkennt man, dass mit wachsendem „ω" die Geschwindigkeit v dem Grenzwerthe Null, und demgemäss die Wassertiefe t dem Grenzwerthe ∞ sich nähern würde. Das Längenprofil des Wasserspiegels wird also in der Richtung stromabwärts einer festen Horizontalen asymptotisch sich annähern. Wenn diese Horizontale als Niveau-Linie gewählt wird, von welcher aus das Gefälle z gemessen werden soll, so nimmt

die Grösse z überall negative Werthe an, insofern sämmtliche Punkte des Längenprofiles oberhalb jener Horizontalen liegen. Für $z = 0$ würde alsdann $t = \infty$ und daher auch $\omega = \infty$ werden. Die Constante ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$16)\quad 0 = \left(\frac{a - 2H}{3}\right)\{\lg 1 - \sqrt{3}\,.\,\text{arc tg}\,\infty\} + \text{Const., oder:}$$

$$17)\quad \text{Const.} = \left(\frac{a - 2H}{3}\right)\frac{\pi}{2}\sqrt{3}.$$

Nach Substitution dieses Werthes kann man der Gleichung 15) die folgende Form geben:

$$18)\quad z = \left(\frac{a-2H}{3}\right)\left\{\lg\left(\frac{\omega-1}{\sqrt{\omega^2+\omega+1}}\right)+\sqrt{3}\left[\frac{\pi}{2}-\text{arc tg}\left(\frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}\right)\right]\right\},$$

oder:

$$19)\quad z = \left(\frac{a-2H}{3}\right)\left\{\lg\left(\frac{\omega-1}{\sqrt{\omega^2+\omega+1}}\right)+\sqrt{3}\,.\,\text{arc cotg}\left(\frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Wenn mit y die Höhe eines Punktes im Längenprofile des Wasserspiegels über jener Niveau-Linie bezeichnet wird, so ist $y = -z$ zu setzen; also wird:

$$20)\quad y = (a - 2H)\left\{\frac{1}{6}\lg\left(\frac{\omega^2+\omega+1}{(\omega-1)^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc cotg}\left(\frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}\right)\right\},$$

und wenn die eingeklammerte Function von ω abkürzungsweise mit Ω bezeichnet wird, so erhält man die Gleichung:

$$21)\quad y = (a - 2H)\,\Omega.$$

Um den zugehörigen Werth der Abscisse x zu finden, hat man: $dz = -dy$ zu setzen in Gleichung 6) und hernach die Integration derselben auszuführen; man gelangt alsdann zu den folgenden Gleichungen:

$$22)\quad dx\,.\,\sin\alpha = dt - dy,$$

$$23)\quad \sin\alpha\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} dt - \int_{y_1}^{y_2} dy,$$

$$24)\quad (x_2 - x_1)\sin\alpha = t_2 - t_1 - (y_2 - y_1),$$

welcher letzteren man in Berücksichtigung der den Buchstaben ω und y beigelegten Bedeutungen auch die folgende Form geben kann:

$$25)\quad x_2 - x_1 = \frac{a}{\sin\alpha}\left\{\omega_2 - \omega_1 - \left(1 - \frac{2H}{a}\right)(\Omega_2 - \Omega_1)\right\}.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man aus den gegebenen (oder willkürlich angenommenen) Wassertiefen-Verhältnissen ω_1 und ω_2 die Länge derjenigen Strecke berechnen, deren Endpunkten jene Werthe entsprechen. Die zugehörigen Werthe der Function Ω findet man aus der Gleichung:

$$26)\quad \Omega = \frac{1}{6} \lg \left(\frac{\omega^2 + \omega + 1}{(\omega - 1)^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{2\omega + 1}{\sqrt{3}}\right),$$

aus welcher die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe sich ergeben:

$\frac{1}{\omega}$ =	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
ω =	1	1,1111	1,25	1,4286	1,6667	2
Ω =	∞	0,6489	0,4198	0,2883	0,198	0,1318
$\frac{1}{\omega}$ =	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01	0
ω =	2,5	3,3333	5	10	100	∞
Ω =	0,0821	0,0455	0,0201	0,005	0,0001	0

Den Werthen $a = 1^m$, $b = 100^m$ und $\sin\alpha = \frac{1}{1270}$ entspricht nach § 168 für den Fall der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit: $c = 1^m,4$ und die Geschwindigkeitshöhe: $H = \frac{1,4^2}{2 \,.\, 9,81} = 0^m,1$.

Wenn also z. B. in Folge einer Stauung die Wassertiefe (nach eingetretenem Beharrungszustande) an einer bestimmten Stelle bis auf die Grösse: $t_2 = 2^m$ zugenommen hat, und diejenige weiter stromaufwärts gelegene Stelle aufgesucht werden soll, an welcher die Wassertiefe nur noch die Grösse: $t_1 = 1^m,25$ hat, so ist $\omega_1 = 1,25$ und $\omega_2 = 2$ zu setzen. Diesen Werthen entsprechen nach obiger Tabelle die Werthe: $\Omega_1 = 0,4198$ und $\Omega_2 = 0,1318$. Hiernach erhält man aus Gleichung 25) den Werth:

$$x_2 - x_1 = 1270 \left\{2 - 1,25 - (1 - 0,2)\,(0,1318 - 0,4198)\right\} = 1245^m.$$

Diejenige Stelle, an welcher die Wassertiefe nur noch $1^m,25$ beträgt, liegt also in der Richtung stromaufwärts um 1245 Meter von derjenigen Stelle entfernt, an welcher die Wassertiefe 2 Meter beträgt.

Den im Anfange dieses Paragraphen gemachten Voraussetzungen entsprechend dürfen die aus den obigen Gleichungen abge-

leiteten Rechnungsresultate selbstverständlich nur dann als gültig betrachtet werden, wenn das Verhältniss $\frac{t}{b}$ längs der ganzen Kanalstrecke, auf welche die Rechnung angewendet wurde, einen sehr kleinen Werth hat. Auf solche Fälle, in welchen das Verhältniss: $\omega = \frac{t}{a}$ einen sehr grossen Werth hat, dürfen die obigen Gleichungen daher nur angewendet werden unter der Voraussetzung: dass gleichzeitig die Wassertiefe der gleichförmigen Bewegung einen sehr kleinen Werth hat. In diesem Sinne würde der in die Tabelle mit aufgenommene Grenzfall: $\omega = \infty$ also nicht zu deuten sein als derjenige Fall, in welchem $t = \infty$, sondern vielmehr als derjenige Fall, in welchem $a = 0$ wird, wobei die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dass die Wassertiefe t einen endlichen und im Verhältniss zu der Kanalbreite immer noch sehr kleinen Werth hat. Da jedoch ausserdem nach Gleichung 2) der Coefficient ζ bei obiger Rechnung als eine constante Grösse behandelt wurde, so dürfen die gefundenen Werthe doch immer nur als vorläufige Annäherungswerthe betrachtet werden, und in solchen Fällen, wo eine genauere Berechnung der Stau-Curve erforderlich ist, würde die Anwendung der in § 174 erklärten etwas umständlicheren Methode nicht wohl zu umgehen sein.

Die obigen Gleichungen gelten nicht nur für die verzögerte, sondern auch für die beschleunigte Bewegung, bei welcher letzteren die Werthe der Verhältnisszahl ω stets zwischen den Grenzen „Eins" und „Null" liegen. Aus Gleichung 26) erhält man für diesen Fall die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\omega =$	1	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6
$\Omega =$	$+\infty$	+ 0,8624	+ 0,6138	+ 0,3459	+ 0,1711	+ 0,0325
$\omega =$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$\Omega =$	— 0,0878	— 0,1980	— 0,3025	— 0,4042	— 0,5046	— 0,6046

Wenn man z. B. mit Beibehaltung der bei dem vorigen Beispiele angenommenen Zahlenwerthe: $\omega_1 = 0,9$ und $\omega_2 = 0,7$ setzt, so findet man aus der obigen Tabelle die zugehörigen Werthe: $\Omega_1 = 0,6138$ und $\Omega_2 = 0,1711$. Hiernach erhält man aus Gleichung 25) den Werth:

$$x_2 - x_1 = 1270 \left\{ 0,7 - 0,9 - (1 - 0,2)\ (0,1711 - 0,6138) \right\} = 195^m,78$$

für die Länge derjenigen Kanalstrecke, an deren oberem Endpunkte die Wassertiefe: $0^m,9$, und an deren unterem Endpunkte die Wassertiefe: $0^m,7$ beträgt.

Bei dem hier angenommenen Falle würde dem Werthe: $\omega = 0,585$ der Werth: $\frac{dt}{dx} = -\infty$ oder eine Wassertiefe entsprechen, welche gleich der doppelten zugehörigen Geschwindigkeitshöhe ist. Die obige Berechnungsmethode würde daher im vorliegenden Falle nur auf solche Werthe von ω angewendet werden dürfen, welche grösser sind als 0,585, insofern nach § 173 die in der Richtung stromabwärts allmählich abnehmende Wassertiefe niemals kleiner werden kann als die doppelte Geschwindigkeitshöhe.

NEUNTER ABSCHNITT.

Mechanische Wärmetheorie.

§ 177.

Mariotte-Gay-Lussac'sches Gesetz.

Wenn ein Kilogramm Luft von der Temperatur Null Grad Celsius bis zu einer Temperatur von t Graden Celsius erwärmt wird, während der Druck pro Quadratmeter unverändert gleich p_0 bleibt, so wächst das Volumen von der Grösse v_0 bis auf eine Grösse v_t, welche nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze zu berechnen ist aus der Gleichung:

$$1)\quad \frac{v_t - v_0}{v_0} = \alpha t.$$

Hierin bedeutet α den „Temperatur-Ausdehnungscoefficienten" oder dasjenige Ausdehnungsverhältniss, welches einer Temperatur-Erhöhung von Null Grad bis auf + 1 Grad Celsius entsprechen würde. Dieser Coefficient hat für trockene atmosphärische Luft die Grösse:

$$2)\quad \alpha = \frac{1}{273}.$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetze verhalten sich bei gleichen Temperaturen die Drücke wie die Dichtigkeiten oder umgekehrt wie die Volumina. Wenn also jene Luftmasse, nachdem das Volumen in Folge der Temperatur-Erhöhung die Grösse v_t erreicht hatte, nachher bei unverändert bleibender Temperatur t durch Vergrösserung des Druckes auf das kleinere Volumen v zusammengepresst wird, so ist der diesem neuen Volumen entsprechende Druck p zu berechnen aus der Gleichung:

$$3)\quad \frac{p}{p_0} = \frac{v_t}{v},$$

welcher man nach Substitution des für die Grösse v_t aus Gleichung 1) zu entnehmenden Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$4)\quad p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t).$$

Wenn mit γ das dem Volumen v — und mit γ_0 das dem Volumen v_0 — entsprechende Gewicht pro Cubikmeter bezeichnet wird, so ist:

5) $\gamma v = 1 = \gamma_0 v_0$

zu setzen, und nach Substitution der hieraus für die Volumina zu entnehmenden Ausdrücke nimmt die vorige Gleichung die folgende Form an:

6) $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0}(1 + \alpha t).$

Bei dem Drucke von 1 Atmosphäre und der Temperatur von Null Grad Celsius beträgt das Gewicht eines Cubikmeters Luft: 1,293 Kilogramm. Dem Werthe $p_0 = 10\,333$ Kil. entspricht demnach der Werth: $\gamma_0 = 1{,}293$ Kil., und wenn man zugleich für α den oben angegebenen numerischen Werth einsetzt, so erhält man die Gleichung:

7) $\frac{p}{\gamma} = \frac{10\,333}{1{,}293}\left(1 + \frac{t}{273}\right),$ oder:

8) $\frac{p}{\gamma} = 29{,}27\,(273 + t).$

In letzterer Gleichung bezeichnet der eingeklammerte Ausdruck denjenigen Werth, welchen man für die Temperatur erhalten würde, wenn man statt des Nullpunktes der Celsius'schen Temperatur-Scala den um 273 Grad tiefer liegenden Punkt derselben als Nullpunkt gewählt hätte. Dieser Punkt wird der absolute Nullpunkt der Temperatur, und die Grösse:

9) $273 + t = T$

wird die absolute Temperatur genannt. Nach Einführung dieser Bezeichnungsweise kann man der Gleichung 8) auch die folgende Form geben:

10) $\frac{p}{\gamma T} = 29{,}27.$

Diese Gleichung zeigt: dass die auf der linken Seite stehende Function der drei veränderlichen Grössen: p, γ, T den constanten Werth:

11) $R = 29{,}27$

stets beibehält — wie auch immer jene drei Grössen sich ändern mögen. Man kann daher die Gleichung:

12) $\frac{p}{\gamma T} = R$

benutzen, um irgend eine dieser drei veränderlichen Grössen zu berechnen, sobald die Werthe der beiden anderen gegeben sind.

Da $\gamma = \frac{1}{v}$ zu setzen ist (nach Gleichung 5), so kann man der obigen — aus der Verbindung des Mariotte'schen Gesetzes mit dem Gay-Lussac'schen Gesetze hervorgegangenen — Gleichung auch die folgende Form geben:

$$13) \quad pv = RT,$$

in welcher dieselbe auf analoge Weise zur Berechnung irgend einer von den drei Grössen p, v, T benutzt werden kann, sobald die Werthe der beiden anderen bekannt sind.

§ 178.

Temperaturfläche der Luft.

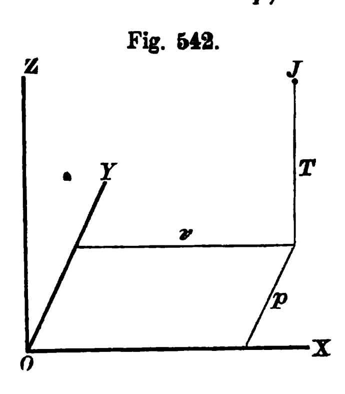
Für die absolute Temperatur der Luftmasse ergiebt sich aus der Mariotte-Gay-Lussac'schen Gleichung der Ausdruck:

$$1) \quad T = \frac{pv}{R}.$$

Die Grösse T erscheint in dieser Gleichung als Function der beiden veränderlichen Grössen p, v, und das Gesetz, nach welchem die Grösse T mit den Grössen p, v sich ändert, kann man sich durch eine krumme Fläche auf folgende Weise geometrisch veranschaulichen.

Wenn man in der Horizontalebene OXY den Punkt aufsucht, dessen Coordinaten p, v sind, und in diesem Punkte ein Perpendikel von der Länge T errichtet, so kann der Endpunkt J dieses Perpendikels als Repräsentant des augenblicklichen Zustandes der Luftmasse betrachtet werden (Fig. 542). Indem man sich diese Construction für sämmtliche Werthen-Combinationen der Grössen p, v wiederholt denkt, erhält man als geometrischen Ort für alle Lagen, welche der Punkt J annehmen kann, eine krumme Fläche, welche abkürzungsweise die „Temperaturfläche“ genannt werden soll. Jedem Punkte dieser Temperaturfläche entspricht ein besonderer Zustand der Luftmasse, in-

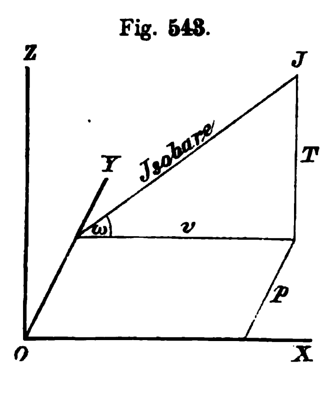
Fig. 542.



sofern mit der Lage dieses Punktes zugleich für jede der drei veränderlichen Grössen p, v, T ein bestimmter Werth gegeben ist.

Denkt man sich durch den Punkt J eine Ebene gelegt, welche der Vertical-Ebene OXZ parallel ist, so erkennt man (aus Gleichung 1), dass die Temperaturfläche von dieser Ebene in einer geraden Linie geschnitten wird, welche — der Gleichung $p =$ Const. entsprechend — als Linie constanten Druckes mit dem Namen „Isobare" bezeichnet werden kann. Der Steigungswinkel dieser Isobare ist nach Fig. 543 zu berechnen aus der Gleichung:

Fig. 543.



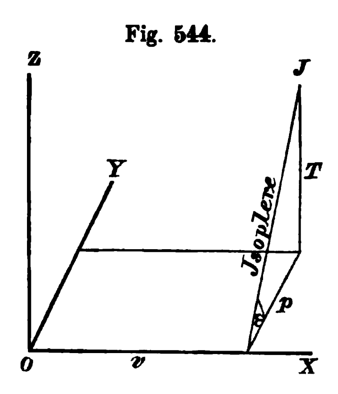
$$2) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{T}{v},$$

welcher man nach Gleichung 1) auch die folgende Form geben kann:

$$3) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{p}{R}.$$

Denkt man sich ein anderes Mal die Schnitt-Ebene parallel zur Vertical-Ebene OYZ hindurchgelegt, so erhält man wiederum eine gerade Durchschnittslinie, welche — der Gleichung $v =$ Const. entsprechend — als Linie constanten Volumens mit dem Namen „Isoplere" bezeichnet werden kann (nach dem griechischen Worte: πλήρης = voll). Der Steigungswinkel dieser Isoplere ist nach Fig. 544 zu berechnen aus der Gleichung:

Fig. 544.



$$4) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{T}{p},$$

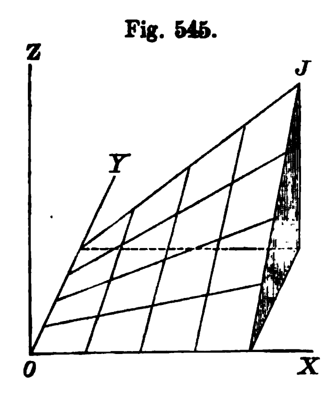
welcher man nach Gleichung 1) auch die folgende Form geben kann:

$$5) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{v}{R}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass in jener krummen Fläche die Linien constanten Druckes und die Linien constanten Volumens zwei einander schneidende Systeme von geraden Linien bilden.

Die Temperaturfläche kann daher auch als geometrischer Ort aller Durchschnittspunkte dieser beiden Linien-Systeme aufgefasst werden (Fig. 545).

Fig. 545.

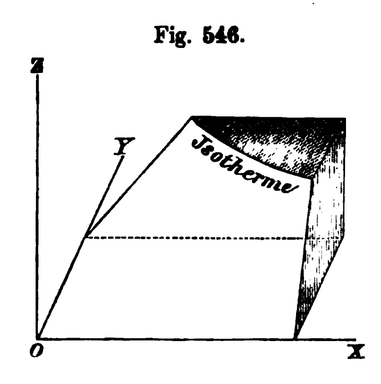


Wenn man endlich drittens: eine horizontale Schnitt-Ebene hindurchlegt, so wird die Temperaturfläche von derselben in einer krummen Linie geschnitten, welche — der Gleichung $T = \text{Const.}$ entsprechend — als Linie constanter Temperatur mit dem Namen „Isotherme" bezeichnet werden kann (Fig. 546). Der Gleichung dieser Isotherme kann man (nach Gleichung 1) die folgende Form geben:

$$6)\quad pv = \text{Const.},$$

und man erkennt aus dieser Gleichung, dass die Isotherme eine in der Horizontal-Ebene liegende Hyperbel mit rechtwinkeligen Asymptoten bildet.

Fig. 546.



Betrachtet man die Temperaturfläche als eine Gebirgsoberfläche, so würden die Isothermen mit krummlinigen Horizontalwegen verglichen werden können, während die Isobaren und die Isopleren als geradlinig ansteigende Wege am Gebirgsabhange sich darstellen würden. Jede bestimmte gegebene Aenderung des Zustandes der Luftmasse würde hiernach als eine Wanderung auf dieser Gebirgsfläche aufgefasst werden können längs einer bestimmten vorgeschriebenen Bahnlinie, deren einelne auf einander folgende Punkte die nach einander durchlaufenen Zustände der Luftmasse repräsentiren.

Für die beiden partiellen Differenzial-Quotienten der Grösse T ergeben sich aus Gleichung 1) die Werthe:

$$7)\quad \frac{dT}{dp} = \frac{v}{R}, \qquad 8)\quad \frac{dT}{dv} = \frac{p}{R},$$

und für das totale Differenzial der Grösse T erhält man hiernach die folgende Gleichung:

$$9)\quad dT = \left(\frac{dT}{dp}\right) dp + \left(\frac{dT}{dv}\right) dv, \quad \text{oder:}$$

$$dT = \frac{v}{R}\,dp + \frac{p}{R}\,dv,$$

welche letztere zugleich die Differenzialgleichung der Temperaturfläche darstellt.

Anstatt die Grösse T als Function der beiden unabhängigen veränderlichen Grössen p und v zu betrachten, könnte man auch die Grösse:

$$10)\quad p = \frac{RT}{v}$$

als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen T und v, oder auch die Grösse:

$$11)\quad v = \frac{RT}{p}$$

als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen T und p auffassen. Man würde dann z. B. für die partiellen Differenzialquotienten der Grössen p und v, nach T genommen, die folgenden Gleichungen erhalten:

$$12)\quad \frac{dp}{dT} = \frac{R}{v}, \qquad 13)\quad \frac{dv}{dT} = \frac{R}{p},$$

welche zeigen, dass die Werthe derselben resp. mit den reciproken Werthen der oben für die beiden partiellen Differenzialquotienten der Grösse T gefundenen Ausdrücke identisch sind.

§ 179.

Mechanisches Aequivalent der Wärme.

Diejenige Wärme-Quantität, welche erforderlich ist, um einer Masse von 1 Kil. Gewicht eine Temperatur-Erhöhung von 1 Grad Celsius zu ertheilen, wird die „specifische Wärme“ oder die „Wärme-Capacität“ des betreffenden Stoffes genannt. Als Wärme-Einheit pflegt man hierbei die Wärme-Capacität des Wassers bei Null Grad Celsius zu wählen: nämlich diejenige Wärme-Quantität, welche erforderlich ist, um die Temperatur eines Kilogramms Wasser von Null Grad bis auf + 1 Grad Celsius zu erhöhen.

Wenn mit dQ die unendlich kleine Wärme-Quantität bezeichnet wird, welche einer Masse von 1 Kil. Gewicht die unendlich kleine Temperatur-Erhöhung dT ertheilt, so ist:

$$1)\quad \frac{dQ}{dT} = c$$

diejenige Wärme-Quantität, welche dieser Masse eine Temperatur-Erhöhung von 1 Grad ertheilen würde, oder die specifische Wärme des betreffenden Stoffes.

Für die specifische Wärme der Luft ergeben die Beobachtungen zwei verschiedene Werthe, jenachdem bei Zuführung der Wärme entweder das Volumen oder der Druck unverändert erhalten wird. Die specifische Wärme der Luft bei constantem Volumen hat den constanten Werth:

$$2) \quad c_v = 0{,}1685.$$

Die specifische Wärme der Luft bei constantem Drucke hat den gleichfalls constanten Werth:

$$3) \quad c_p = 0{,}2375.$$

Die Wärme-Quantität, welche erforderlich ist, um einem Kilogramm Luft bei constantem Volumen die Temperatur-Erhöhung dT zu ertheilen, hat also die Grösse:

$$4) \quad dQ_v = c_v\, dT.$$

Bei dieser Temperatur-Erhöhung wird gleichzeitig die Druck-Vergrösserung dp hervorgebracht. Die Wärme-Quantität, welche erforderlich ist, um bei constantem Drucke jene Temperatur-Erhöhung hervorzubringen, hat den grösseren Werth:

$$5) \quad dQ_p = c_p\, dT.$$

Bei dieser letzteren Art der Wärme-Zuführung wird zugleich die Volumen-Vergrösserung dv hervorgebracht, wobei von dem constanten Drucke p die unendlich kleine mechanische Arbeit:

$$6) \quad d\mathfrak{A} = p\, dv = p \left(\frac{dv}{dT}\right) dT$$

verrichtet wird. Nach der Anschauungsweise der mechanischen Wärme-Theorie hat man die Ursache des Unterschiedes zwischen jenen beiden erforderlichen Wärme-Quantitäten darin zu suchen: dass bei dem letzteren Falle von der zugeführten Wärme nicht nur die Temperatur-Erhöhung dT, sondern zugleich auch die mechanische Arbeit $d\mathfrak{A}$ hervorgebracht wird. Man hat den letzteren Vorgang so aufzufassen, als ob die zugeführte Wärme-Quantität dQ_p gleichsam in zwei Theile sich zerlegt, von denen der eine Theil dQ_v auf das wirkliche Hervorbringen der Temperatur-Erhöhung dT verwendet wird, während der andere Theil:

$$7) \quad dQ_p - dQ_v = (c_p - c_v)\, dT,$$

welcher als **Wärme** verschwindet, gleichzeitig in **mechanische Arbeit** umgewandelt wird.

Nach den Hypothesen der mechanischen Wärme-Theorie steht in allen solchen Fällen, wo Wärme in mechanische Arbeit umgewandelt wird, die hervorgebrachte mechanische Arbeit in einem **constanten** Verhältnisse zu der verschwindenden Wärme-Quantität. Wenn also mit A das Wärme-Aequivalent der Arbeits-Einheit — oder mit $\frac{1}{A}$ das Arbeits-Aequivalent der Wärme-Einheit — bezeichnet wird, so ergiebt sich für das Arbeits-Aequivalent der verschwindenden Wärme-Quantität $dQ_p - dQ_v$ der Werth:

$$8)\quad d\mathfrak{A} = \frac{dQ_p - dQ_v}{A} = \frac{(c_p - c_v)\,dT}{A},$$

und durch Gleichsetzung der beiden für die Grösse $d\mathfrak{A}$ gefundenen Ausdrücke erhält man die Gleichung:

$$9)\quad p\,dv = \frac{(c_p - c_v)\,dT}{A}.$$

In dieser Gleichung bedeutet dv diejenige Volumen-Vergrösserung, welche bei **constantem Drucke** eintritt, wenn die Temperatur-Erhöhung dT stattfindet. Wenn man also der obigen Gleichung die folgende Form giebt:

$$10)\quad Ap\left(\frac{dv}{dT}\right) = c_p - c_v,$$

so bedeutet hierin der eingeklammerte Quotient den partiellen Differenzialquotienten von v, nach T genommen, und nach Substitution des in Gleichung 13) des vorigen Paragraphen für diesen Differenzialquotienten angegebenen Werthes erhält man die Gleichung:

$$11)\quad AR = c_p - c_v.$$

Für das Wärme-Aequivalent eines Meterkilogrammes ergiebt sich hieraus der Werth:

$$12)\quad A = \frac{0{,}2375 - 0{,}1685}{29{,}27} = \frac{1}{424}.$$

Das mechanische Aequivalent der Wärme-Einheit beträgt demnach 424 Meterkilogramm.

§ 180.

Poisson'sches Gesetz.

Um diejenige Wärme-Quantität zu berechnen, welche einem Kilogramm Luft zugeführt werden muss, wenn bei **constantem**

Volumen die Temperatur-Erhöhung dT in demselben hervorgebracht werden soll, hat man der Gleichung 4) des vorigen Paragraphen die folgende Form zu geben:

$$1)\quad dQ_v = c_v \left(\frac{dT}{dp}\right) dp,$$

und darin für den eingeklammerten partiellen Differenzialquotienten den in § 178 (Gleichung 7) angegebenen Werth zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

$$2)\quad dQ_v = c_v \left(\frac{v}{R}\right) dp.$$

Um diejenige Wärme-Quantität zu berechnen, welche einem Kilogramm Luft zugeführt werden muss, um bei constantem Drucke die Temperatur-Erhöhung dT hervorzubringen, hat man der Gleichung 5) des vorigen Paragraphen die folgende Form zu geben:

$$3)\quad dQ_p = c_p \left(\frac{dT}{dv}\right) dv,$$

und darin für den eingeklammerten partiellen Differenzialquotienten den in § 178 (Gleichung 8) angegebenen Ausdruck zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

$$4)\quad dQ_p = c_p \left(\frac{p}{R}\right) dv.$$

Die Wärme-Quantität dQ_v vergrössert den Druck um die Grösse dp, lässt aber das Volumen v unverändert. Die Wärme-Quantität dQ_p vergrössert das Volumen um die Grösse dv, lässt aber den Druck p unverändert. Diejenige Wärme-Quantität dQ, welche erforderlich ist, um gleichzeitig die Druck-Vergrösserung dp und die Volumen-Vergrösserung dv hervorzubringen, ist gleich der Summe jener beiden Wärme-Quantitäten zu setzen; also ist:

$$5)\quad dQ = c_v \left(\frac{dT}{dp}\right) dp + c_p \left(\frac{dT}{dp}\right) dv, \quad \text{oder:}$$

$$dQ = \frac{c_v\, v\, dp + c_p\, p\, dv}{R}.$$

Um die Beziehung zu finden, welche zwischen der Druck-Aenderung dp und der Volumen-Aenderung dv in demjenigen Falle stattfinden würde, wenn gar keine Wärme zugeführt wird, hat man dQ gleich Null zu setzen; man erhält dann die Gleichung:

$$6)\quad 0 = c_v\, v\, dp + c_p\, p\, dv.$$

Das Verhältniss der beiden Wärme-Capacitäten hat nach den Gleichungen 2) und 3) des vorigen Paragarphen die Grösse:

$$7)\quad k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{0,2375}{0,1685} = 1,41.$$

Hiernach kann man der obigen Gleichung, indem man dieselbe durch c_v dividirt, auch die folgende Form geben:

$$8)\quad \frac{dp}{p} = -k\frac{dv}{v}.$$

Wenn man diese Gleichung integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen p_1 und p_2, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen v_1 und v_2 — so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$9)\quad \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = -k\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v},$$

$$10)\quad \lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -k\lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right),$$

$$11)\quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-k}.$$

Wenn mit T_1 die anfängliche und mit T_2 die nachherige Temperatur bezeichnet wird, so ist nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze:

$$12)\quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

zu setzen, und wenn man hierin das eine Mal für das Verhältniss $\frac{p_2}{p_1}$, das andere Mal für das Verhältniss $\frac{v_2}{v_1}$ den aus Gleichung 11) zu entnehmenden Werth substituirt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$13)\quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-k},$$

$$14)\quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{k}},$$

aus welchen man die bei dieser Zustandsänderung stattfindende Temperaturänderung berechnen kann. Die drei Gleichungen 11), 13), 14), welchen man auch die folgenden Formen geben kann:

$$15)\quad p_2 v_2^k = p_1 v_1^k,$$

$$16)\quad T_2 v_2^{k-1} = T_1 v_1^{k-1},$$

$$17)\quad \frac{T_2^k}{p_2^{k-1}} = \frac{T_1^k}{p_1^{k-1}}$$

enthalten das Poisson'sche Gesetz und gelten für solche Zustandsänderungen, bei welchen weder Wärme-Zuführung noch Wärme-Entziehung stattfindet. Eine solche Zustandsänderung wird z. B. dann stattfinden, wenn die (festen und beweglichen) Gefässwände, welche die Luftmasse einschliessen, für Wärme vollkommen undurchdringlich — oder „adiabatisch" — sind, und wird deshalb eine „adiabatische" Zustandsänderung genannt. Die krumme Linie, welche der den Zustand der Luftmasse repräsentirende Punkt in der Temperaturfläche bei dieser Zustandsänderung beschreibt, wird die „adiabatische Curve" oder „Adiabate" genannt, und wenn man den oben gefundenen Gleichungen die folgenden Formen giebt:

$$18)\quad p v^k = \text{Const.},$$

$$19)\quad T v^{k-1} = \text{Const.},$$

$$20)\quad \frac{T^k}{p^{k-1}} = \text{Const.},$$

so können dieselben als Gleichungen der Projectionen dieser Curve auf die drei Coordinaten-Ebenen betrachtet werden.

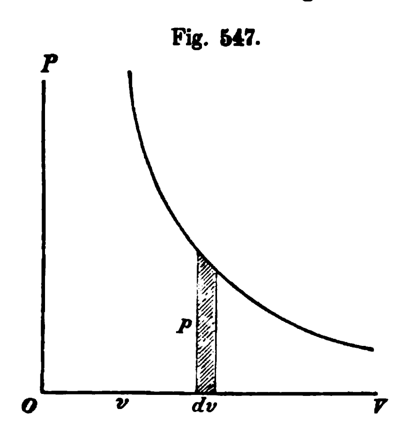
Wenn z. B. als Anfangszustand derjenige gewählt wird, in welchem die gewöhnliche atmosphärische Luft bei mittlerem Barometerstande (in der Höhe des Meeresspiegels) bei der Temperatur von Null Grad Celsius sich befindet, so ist: $v_1 = \frac{1}{1,293} = 0,7734$, $p_1 = 10\,333$ und $T_1 = 273$ zu setzen. Bei adiabatischer Ausdehnung auf das zehnfache Volumen wird $v_2 = 7,734$ also (nach Gleichung 15): $p_2 = 402$ und (nach Gleichung 16): $T_2 = 106,2$. Bei adiabatischer Compression auf den zehnten Theil des ursprünglichen Volumens wird dagegen: $v_2 = 0,07734$, also: $p_2 = 265\,600$ und: $T_2 = 701,7$. Die den obigen Werthen-Combinationen entsprechenden drei Punkte der Temperaturfläche gehören demnach einer und derselben adiabatischen Curve an. Mit Beibehaltung des Werthes $T_1 = 273^0$ (oder $t_1 = 0^0$ Celsius) erhält man auf gleiche Weise aus Gleichung 13) oder Gleichung 16) für die Volumen-Aenderungen und die Temperatur-Aenderungen die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\frac{v_2}{v_1} =$	10	100	1000	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{T_2}{T_1} =$	$\frac{1}{2,57}$	$\frac{1}{6,607}$	$\frac{1}{16,98}$	2,57	6,607	16,98
$T_2 =$	106,2	41,3	16,08	701,7	1797,1	4635,5
$t_2 =$	− 166,8	− 232,7	− 256,92	+ 428,7	+ 1524,1	+ 4362,5.

§ 181.
Adiabatische Zustandsänderung.

Wenn das Volumen der in einem cylindrischen Gefässe zwischen dem festen Boden und einem beweglichen Kolben eingeschlossenen Luftmasse in Folge einer Verschiebung des letzteren um die Grösse dv zunimmt, während von aussen her auf den Kolben ein der Gleichgewichtsbedingung desselben entsprechender Gegendruck wirkt, so verrichtet der von innen gegen den Kolben wirkende Druck der eingeschlossenen Luft die mechanische Arbeit:

Fig. 547.

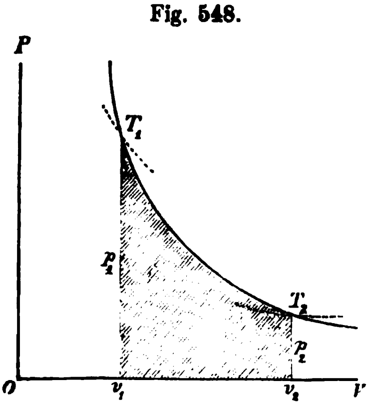


$$1) \quad d\mathfrak{A} = p\,dv,$$

welche auf die in Fig. 547 angedeutete Weise durch den schraffirten Flächenstreifen geometrisch dargestellt werden kann. Die ganze bei dem Uebergange aus dem Volumen v_1 in das Volumen v_2 verrichtete mechanische Arbeit hat demnach die Grösse:

$$2) \quad \mathfrak{A} = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

Fig. 548.



und entspricht der in Fig. 548 schraffirten Fläche, deren Inhalt berechnet werden kann, sobald die Form der oberen Begrenzungslinie gegeben ist, d. h. sobald das Gesetz bekannt ist, nach welchem der Druck p mit dem Volumen v sich ändert.

Wenn während der Ausdehnung weder Wärme-Zuführung noch Wärme-Entziehung stattfand, so war die Zustandsänderung eine adiabatische, und die obere Begrenzungslinie der schraffirten Fläche ist in diesem Falle als Horizontalprojection der adiabatischen Curve zu betrachten. Nach der Gleichung 18) des vorigen Paragraphen ist also für diesen Fall:

$$3) \quad p v^k = p_1 v_1^k$$

zu setzen, und wenn man den hieraus für die Grösse p zu entnehmenden Werth in Gleichung 2) substituirt, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \mathfrak{A} = p_1 v_1^k \int_{v_1}^{v_2} v^{-k}\, dv,$$

$$5)\quad \mathfrak{A} = p_1 v_1^k \left(\frac{v_2^{1-k} - v_1^{1-k}}{1-k} \right), \quad \text{oder:}$$

$$6)\quad \mathfrak{A} = \frac{p_1 v_1}{k-1} \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} \right\}.$$

In letzterer Gleichung kann $p_1 v_1 = R T_1$ gesetzt werden (nach § 177), und wenn man zugleich mit Benutzung der Gleichung 16) des vorigen Paragraphen das Verhältniss der Volumina durch das Verhältniss der Temperaturen ausdrückt, so erhält man für die mechanische Arbeit den Werth:

$$7)\quad \mathfrak{A} = \frac{R(T_1 - T_2)}{k-1}.$$

Dieser mechanischen Arbeit entspricht (nach § 179) das Wärme-Aequivalent:

$$8)\quad Q = \frac{AR(T_1 - T_2)}{k-1}.$$

Da keine Wärme zugeführt wurde, so hat man diese Wärme-Quantität als denjenigen Theil der ursprünglich in der Luftmasse enthalten gewesenen inneren Wärme anzusehen, welcher während der Ausdehnung als Wärme verschwand und in mechanische Arbeit umgewandelt wurde. Nach Substitution des aus § 179 (Gleichung 11) für das Product AR zu entnehmenden Werthes erhält man für diesen in Arbeit umgewandelten Theil der inneren Wärme die Gleichung:

$$9)\quad Q = c_v (T_1 - T_2),$$

welche zeigt, dass $Q = c_v T_1$ wird, wenn $T_2 = 0$ oder $v_2 = \infty$ wird, d. h. wenn bei Fortsetzung der Ausdehnung bis ins Unendliche nach und nach die ganze ursprünglich vorhanden gewesene Wärme in Arbeit umgewandelt wurde. Hieraus folgt, dass die in einem Kilogramm Luft von der absoluten Temperatur T enthaltene Wärme-Quantität zu berechnen ist aus der Gleichung:

$$10)\quad U = c_v T,$$

und nach Einführung dieser Bezeichnungsweise kann man der oben gefundenen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$11)\quad Q = U_1 - U_2.$$

Das mechanische Aequivalent der ganzen ursprünglich vorhanden gewesenen Wärme-Quantität U_1 erscheint in Fig. 548 dargestellt durch die ganze zwischen der Abscissen-Achse und der asymptotisch an dieselbe sich anschliessenden Horizontalprojection der Adiabate liegende Fläche, deren linksseitige Begrenzung die Ordinate p_1 bildet.

Bei adiabatischer Compression vom Volumen v_2 bis auf das Volumen v_1 würde die innere Wärme von der Grösse U_2 bis auf die Grösse U_1 zunehmen, und diese Zunahme $U_1 - U_2$ würde als Wärme-Aequivalent der auf die Luftmasse bei der Compression übertragenen mechanischen Arbeit zu betrachten sein. Durch eine solche Zuführung von mechanischer Arbeit würde also der Zustandspunkt der Luftmasse aus der anfänglichen Isotherme T_2 in in eine beliebige vorgeschriebene höher liegende Isotherme T_1 versetzt werden können. Niemals aber würde durch alleinige Zuführung von mechanischer Arbeit bewirkt werden können, dass der Zustandspunkt der Luftmasse in eine höher liegende Adiabate versetzt wird — so lange die hier gemachte Voraussetzung erfüllt bleibt: nach welcher der auf den Kolben von aussen her wirkende Druck stets diejenige Grösse haben sollte, welche der Gleichgewichtsbedingung des Kolbens entspricht.

Nach den Gleichungen 9) und 6) kann man dem Ausdrucke für die bei adiabatischer Zustandsänderung verrichtete Arbeit, indem man zugleich für die Constanten ihre numerischen Werthe einsetzt, auch die folgenden Formen geben:

$$12)\quad \mathfrak{A} = \frac{Q}{A} = \frac{c_v}{A}\, T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

$$13)\quad \mathfrak{A} = 71{,}4 \,.\, T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right), \quad \text{oder:}$$

$$14)\quad \mathfrak{A} = 71{,}4 \,.\, T_1 \left\{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right\}.$$

Wenn z. B. $T_1 = 273^\circ$ gesetzt wird (entsprechend einer Anfangstemperatur von Null Grad Celsius), so ergiebt sich für $\mathfrak{A}$ der Werth:

$$15)\quad \mathfrak{A} = 19\,500 \left\{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{0{,}41}\right\}.$$

Für $\frac{v_1}{v_2} = 0$ wird hiernach $\mathfrak{A} = 19\,500^{\mathrm{mk}}$, d. h. wenn 1 Kilogramm Luft von

der ursprünglichen Temperatur $T_1 = 273^0$ ohne Zuführung von Wärme bis ins Unendliche sich ausdehnt, so verrichtet der Druck derselben eine mechanische Arbeit von 19 500 Meterkilogrammen. Die ganze ursprünglich in der Luftmasse vorhanden gewesene Wärme-Quantität: $c_v T_1 = 0{,}1685 \,.\, 273 = 46$ Wärme-Einheiten wird dabei in mechanische Arbeit umgewandelt, und die absolute Temperatur der Luftmasse würde dabei bis auf Null Grad sinken.

Für $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{10}$ wird $\mathfrak{A} = 11\,900^{mk}$, d. h. wenn 1 Kilogramm Luft von der ursprünglichen Temperatur $T_1 = 273^0$ ohne Zuführung von Wärme bis auf das Zehnfache des Volumens sich ausdehnt, so verrichtet der Druck derselben eine mechanische Arbeit von 11 900 Meterkilogrammen. Nach der Gleichung 11) des vorigen Paragraphen sinkt dabei der Druck von der Grösse p_1 bis auf die Grösse: $p_2 = \frac{p_1}{25{,}7}$, und nach Gleichung 13) des vorigen Paragraphen sinkt die absolute Temperatur von der Grösse $T_1 = 273^0$ bis auf die Grösse $T_2 = 106^0{,}2$.

Für $\frac{v_1}{v_2} = 10$ wird: $\mathfrak{A} = -30\,600^{mk}$, d. h. wenn 1 Kilogramm Luft von der ursprünglichen Temperatur $T_1 = 273^0$ bis auf den zehnten Theil des ursprünglichen Rauminhalts zusammengepresst werden soll, so ist hierzu eine mechanische Arbeit von 30 600 Meterkilogrammen erforderlich, falls bei diesem Zusammenpressen keine Ableitung von Wärme stattfindet. Der Druck würde hierbei (nach Gleichung 11) des vorigen Paragraphen) von der Grösse p_1 bis auf die Grösse: $p_2 = 25{,}7 \,.\, p_1$ zunehmen, und die absolute Temperatur würde (nach Gleichung 13) des vorigen Paragraphen) von der Grösse $T_1 = 273^0$ bis auf die Grösse: $T_2 = 701^0{,}7$ zunehmen.

Wenn man in Gleichung 13) für das Verhältniss $\frac{T_2}{T_1}$ den in Gleichung 14) des vorigen Paragraphen gefundenen Werth einsetzt, so nimmt dieselbe die folgende Form an:

$$16)\quad \mathfrak{A} = 71{,}4 \,.\, T_1 \left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right\},$$

und kann in dieser Form zur Berechnung der mechanischen Arbeit in solchen Fällen benutzt werden, wo statt des Volumen-Verhältnisses $\frac{v_1}{v_2}$ das Druckverhältniss $\frac{p_1}{p_2}$ gegeben ist.

Für $T_1 = 273^0$ und $\frac{p_2}{p_1} = 10$ wird hiernach: $\mathfrak{A} = -18\,600^{mk}$, d. h. wenn 1 Kilogramm Luft von der ursprünglichen Temperatur $T_1 = 273^0$ soweit zusammengepresst werden soll, dass der Druck auf das Zehnfache steigt, so ist hierzu eine mechanische Arbeit von 18 600 Meterkilogrammen erforderlich, falls bei diesem Zusammenpressen keine Ableitung von Wärme stattfindet. Dabei würde die absolute Temperatur von 273° bis auf 533°,3 zunehmen, und das Volumen von v_1 bis auf $v_2 = \frac{v_1}{5{,}12}$ abnehmen.

§ 182.

Entropie.

Wenn man die Gleichung 5) des § 180 auf beiden Seiten durch T dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$1)\quad \frac{dQ}{T} = \frac{c_v v\, dp + c_p p\, dv}{RT},$$

welcher man nach Substitution der Werthe: $RT = pv$ und $c_p = kc_v$ auch die folgenden Formen geben kann:

$$2)\quad \frac{dQ}{T} = c_v\left(\frac{dp}{p} + k\frac{dv}{v}\right),$$

$$3)\quad \frac{dQ}{T} = d\left[c_v \lg\left(pv^k\right)\right].$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die Grösse $\frac{dQ}{T}$ als das vollständige Differenzial einer Function von p und v sich darstellt. Durch Ausführung der Integration erhält man die Gleichung:

$$4)\quad \int \frac{dQ}{T} = c_v \lg\left(pv^k\right) + \text{Const.},$$

in welcher die Integrations-Constante noch näher zu bestimmen sein wird. Die auf solche Weise definirte Grösse wird die „Entropie“ der Luftmasse genannt.*)

Da die adiabatische Curve (nach § 180, Gleichung 18) diejenige ist, in deren Punkten das Produkt pv^k überall einen und denselben Werth hat, so ergiebt sich aus der obigen Gleichung, dass die adiabatische Curve auch als Curve „constanter Entropie“ aufgefasst und demgemäss mit dem Namen „isentropische Curve“ bezeichnet werden kann. Jeder adiabatischen Curve entspricht ein bestimmter Entropie-Werth. Bei dem Uebergange des Zustandspunktes von einer gegebenen Adiabate zu einer zweiten gegebenen Adiabate ändert sich die Entropie stets um dieselbe Grösse — wie auch immer die Form und Lage der Uebergangslinie gewählt werden möge.

Der Werth, welcher in Gleichung 4) für die Integrations-Constante einzusetzen ist, wird abhängen von der Lage derjenigen Adiabate, welche dem gewählten Anfangszustande entspricht. Wenn man als solche z. B. diejenige wählt, welche der Gleichung: $pv^k =$ Const. entspricht, so erhält man die Gleichung:

---

*) Clausius: „Mechanische Wärmetheorie“. 2. Aufl. I. Band S. 111.

$$5)\quad \int \frac{dQ}{T} = c_v \lg (pv^k) - c_v \lg (\mathfrak{p}\mathfrak{v}^k).$$

Diese Gleichung zeigt, dass für das obige Integral stets ein bestimmter endlicher Werth sich ergeben wird, sobald das Produkt $\mathfrak{p}\mathfrak{v}^k$ grösser als Null ist. Wenn dagegen $\mathfrak{p}\mathfrak{v}^k = 0$ wäre, so erhielte man die Gleichung:

$$6)\quad \int \frac{dQ}{T} = c_v \lg (pv^k) + \infty.$$

In diesem Falle würden also die Entropie-Werthe in allen ausserhalb der Adiabate jenes Anfangszustandes liegenden Punkten der Temperaturfläche unendlich gross werden, obschon die Differenzen der Entropie-Werthe auch in diesem Falle stets endliche Grössen bleiben würden.

Um das Rechnen mit unendlich grossen Entropie-Werthen zu vermeiden, empfiehlt es sich daher: als Adiabate des Anfangszustandes irgend eine höher liegende Adiabate zu wählen, d. h. eine solche, deren Constante grösser ist als Null. Wenn man z. B. diejenige wählt, welche der Gleichung:

$$7)\quad \mathfrak{p}\mathfrak{v}^k = 1$$

entspricht, so wird: $\lg(\mathfrak{p}\mathfrak{v}^k) = 0$, und für die Adiabate: $pv^k =$ Const. ergiebt sich nunmehr der Entropie-Werth:

$$8)\quad \mathfrak{E} = c_v \lg (pv^k).$$

Hiernach würde die Gleichung 7) diejenige Adiabate repräsentiren, welcher der Entropie-Werth: $\mathfrak{E} = 0$ entspricht.

Für die Entropie, welche ein Kilogramm gewöhnlicher atmosphärischer Luft bei mittlerem Barometerstande (in der Höhe des Meeresspiegels) bei der Temperatur von Null Grad Celsius besitzt, erhält man aus obiger Gleichung, indem man darin: $v = \frac{1}{1,293} = 0,7734$ und $p = 10\,333$ setzt, den Werth:

$$9)\quad \mathfrak{E} = 0,1685 \lg (10\,333 \,.\, 0,7734^{1,41}) = 1,496.$$

Bei isothermischer Ausdehnung dieser Luftmasse auf das zehnfache Volumen würde (nach dem Mariotte'schen Gesetze) der Druck auf den zehnten Theil sinken, und die Entropie würde zunehmen bis auf die Grösse:

$$10)\quad \mathfrak{E} = 0,1685 \lg (1033,3 \,.\, 7,734^{1,41}) = 1,655.$$

Bei constantem Volumen verhalten sich die Drücke wie die absoluten Temperaturen. Hiernach erhält man aus Gleichung 8) für die Isoplere: $v = \frac{1}{1,293} = 0,7734$ Kubikmeter z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\frac{p}{10\,333} = \frac{T}{273} =$	0,01	0,1	1	10	100
$\mathfrak{E} =$	0,720	1,108	1,496	1,884	2,272.

Bei constantem **Drucke** verhalten sich die Volumina wie die absoluten Temperaturen. Hiernach ergeben sich z. B. für die Isobare: $p = 10\,333$ Kil. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$$\frac{v}{0{,}7734} = \frac{T}{273} = 0{,}01 \quad 0{,}1 \quad 1 \quad 10 \quad 100$$

$$\mathfrak{E} = 0{,}402 \quad 0{,}949 \quad 1{,}496 \quad 2{,}044 \quad 2{,}591.$$

Da bei adiabatischer Zustandsänderung die Entropie constant bleibt, so ergiebt sich aus den am Schlusse des § 180 berechneten Zahlenbeispielen, dass die drei Werthen-Combinationen:

$v =$	0,7734	7,734	0,07734
$p =$	10 333	402	265 600
$T =$	273	106,2	701,7

drei verschiedene Zustände repräsentiren, welchen ein und derselbe Entropie-Werth entspricht, nämlich der Werth: $\mathfrak{E} = 1{,}496$.

Um denjenigen Punkt der Temperaturfläche zu finden, in welchem irgend eine gegebene Isotherme: $T =$ Const. von der Adiabate: $\mathfrak{E} = 0$ geschnitten wird, hat man die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{v}^k = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}\mathfrak{v} = RT$$

für die beiden Coordinaten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{v}$ aufzulösen; man erhält dann z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$T =$	273	1	$\frac{1}{29{,}27}$
$\mathfrak{p} =$	$26{,}37 \,.\, 10^{12}$	110 450	1
$\mathfrak{v} =$	$303 \,.\, 10^{-12}$	0,000 265	1

Die **Isothermen** sind die Linien, in welchen die **Temperatur** einen constanten Werth hat, und die **Adiabaten** (oder Isentropen) sind die Linien, in welchen die **Entropie** einen constanten Werth hat. Beide Linien-Systeme liegen in der Temperaturfläche, und jeder gegebene Punkt dieser Fläche kann demnach angesehen werden als der Durchschnittspunkt, in welchem eine bestimmte Isotherme: $T =$ Const. von einer bestimmten Adiabate: $\mathfrak{E} =$ Const. geschnitten wird. Statt der Coordinaten p und v könnten daher zur Bestimmung dieses Punktes auch die Grössen T und $\mathfrak{E}$ als Coordinaten gewählt werden, und da jeder Punkt der Temperaturfläche einen bestimmten Zustand der Luftmasse repräsentirt, so ist dieser Zustand völlig bestimmt, sobald für die beiden Grössen T und $\mathfrak{E}$ ihre Werthe gegeben sind.

So z. B. würden die Werthe $T = 273$ und $\mathfrak{E} = 1{,}496$ denjenigen Zustand repräsentiren, welcher dem Drucke $p = 10\,333$ Kil. und dem Volumen $v = 0{,}7734$ Cubikmeter entspricht; ebenso z. B.

die Werthe $T = 273$ und $\mathfrak{E} = 1{,}655$ denjenigen Zustand, welcher dem Drucke $p = 1033{,}3$ Kil. und dem Volumen $v = 7{,}734$ Cubikmeter entspricht. Mittelst der beiden Gleichungen:

$$pv = RT \quad \text{und} \quad c_v \lg (pv^k) = \mathfrak{E}$$

können die Coordinaten des einen Systems jederzeit leicht in die des anderen Systems transformirt werden.

Während einer Zustands-Aenderung der Luftmasse beschreibt der den Zustand derselben repräsentirende Punkt in der Temperaturfläche eine bestimmte Bahnlinie. Die Art der Zustandsänderung kann daher durch eine Gleichung von der Form:

$$11) \quad T = f(\mathfrak{E})$$

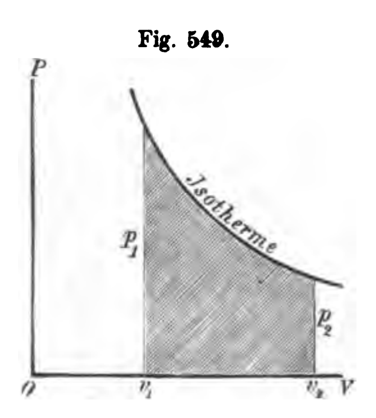
charakterisirt werden, insofern nach obiger Erklärung eine solche Gleichung immer als Gleichung irgend einer in der Temperaturfläche liegenden Linie aufgefasst werden kann.

§ 183.

Isothermische Zustandsänderung.

Die adiabatische Ausdehnung ist (nach § 181) stets mit einem Sinken der Temperatur verbunden. Wenn während der Ausdehnung die Temperatur unverändert bleiben soll, so muss der Luftmasse beständig Wärme zugeführt werden, welche hierbei als Wärme verschwindend in die auf Ueberwindung des äusseren Gegendruckes verwendete mechanische Arbeit umgewandelt wird. Diese mechanische Arbeit kann man — auf dieselbe Weise wie mit Bezug auf Fig. 547 und Fig. 548 bereits erklärt wurde — geometrisch darstellen mittelst der in Fig. 549 schraffirten Fläche, welche oben von der Isotherme: $T = $ Const. begrenzt wird. Für das Wärme-Aequivalent dieser mechanischen Arbeit ergiebt sich hiernach der Werth:

Fig. 549.



$$1) \quad Q = A \int p \, dv.$$

Wenn man hierin für p den aus der Gleichung: $pv = RT$ zu entnehmenden Werth substituirt und nachher — unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Grösse T constant ist — die Integration ausführt, so erhält man die Gleichung:

$$2)\quad Q = ART\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v},\ \text{oder:}$$

$$3)\quad Q = ART\lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right).$$

Die Wärme-Quantität, welche einem Kilogramm Luft von der absoluten Temperatur $T = 273^0$ bei isothermischer Ausdehnung auf das zehnfache Volumen zuzuführen ist, hat demnach die Grösse:

$$4)\quad Q = \frac{29{,}27\,.\,273}{424}\lg 10 = 43{,}4 \text{ Wärme-Einheiten.}$$

Zu dem gleichen Resultate würde man mit Benutzung der Gleichung 3) und 8) des vorigen Paragraphen gelangen, indem man:

$$5)\quad dQ = T\,d\mathfrak{E}$$

setzt und hiernach — wiederum unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Grösse T constant ist — die Integration ausführt; man erhält dann die Gleichung:

$$6)\quad Q = T\int_{\mathfrak{E}_1}^{\mathfrak{E}_2} d\mathfrak{E},\quad \text{oder:}$$

$$7)\quad Q = T(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1),\quad \text{oder:}\quad \frac{Q}{T} = \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1.$$

Wenn in Bezug auf das oben berechnete Beispiel angenommen wird, dass das anfängliche Volumen $v_1 = \frac{1}{1{,}293} = 0{,}7734$ war, so ist nach den Gleichungen 9) und 10) des vorigen Paragraphen: $\mathfrak{E}_1 = 1{,}496$ und $\mathfrak{E}_2 = 1{,}655$ zu setzen; man erhält also für die erforderliche Wärme-Quantität wie oben den Werth:

$$8)\quad Q = 273\,(1{,}655 - 1{,}496) = 43{,}4 \text{ Wärme-Einheiten.}$$

Die obige Gleichung zeigt, dass die bei isothermischem Uebergange aus einer gegebenen Adiabate: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1$ in eine zweite gegebene Adiabate: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_2$ zuzuführende Wärme-Quantität stets der absoluten Temperatur dieser Isotherme proportional ist; oder: dass der Quotient $\frac{Q}{T}$ für alle isothermischen Uebergänge aus der ersten in die zweite Adiabate einen und denselben Werth annimmt.

Wenn z. B. die Ueberführung aus der Adiabate: $\mathfrak{E} = 1{,}496$ in die Adiabate: $\mathfrak{E} = 1{,}655$ längs der Isotherme: $T = 2\,.\,273 = 546$ erfolgte, so würde die Wärme-Quantität: $Q = 2\,.\,43{,}4 = 86{,}8$ Wärme-Einheiten erforderlich sein.

Zugleich erkennt man aus Gleichung 3), dass für alle isothermischen Uebergänge aus der ersten in die zweite Adiabate das Ausdehnungsverhältniss einen und denselben Werth hat.

Die oben gefundenen Gleichungen gelten nicht nur für die isothermische Expansion, sondern auch für die isothermische Compression vom Volumen v_2 auf das Volumen v_1, für welchen letzteren Fall die Grösse Q als diejenige Wärme-Quantität anzusehen ist, welche der Luftmasse entzogen werden muss, wenn die Temperatur unverändert bleiben soll.

§ 184.

Allgemeine Wärme-Gleichung.

Nach § 180 (Gleichung 5) hat diejenige Wärme-Quantität, welche einem Kilogramm Luft zugeführt werden muss, wenn gleichzeitig der Druck um dp und das Volumen um dv vergrössert werden soll, die Grösse:

$$1)\quad dQ = \frac{c_v\, v\, dp + c_p\, p\, dv}{R}.$$

Wenn man hierin das eine Mal für c_v, das andere Mal für c_p den aus der Gleichung 11) des § 179 zu entnehmenden Werth einsetzt, so erhält man mit Benutzung des in § 178 (Gleichung 9) für das totale Differenzial von T angegebenen Ausdruckes die Gleichungen:

$$2)\quad dQ = c_p\, dT - A\, v\, dp,$$

$$3)\quad dQ = c_v\, dT + A\, p\, dv.$$

In letzterer Gleichung kann $c_v\, dT = dU$ gesetzt werden (nach § 181, Gleichung 10); dieselbe zeigt daher in der Form:

$$4)\quad dQ = dU + A\, p\, dv,$$

dass die zugeführte Wärme-Quantität dQ aus zwei Theilen sich zusammensetzt, von denen der eine Theil dU auf Vergrösserung der inneren Wärme verwendet wird, während der andere Theil $A\, p\, dv$ als Wärme verschwindet und in Expansionsarbeit umgewandelt wird. Für die ganze Wärme-Quantität, welche der Luftmasse während einer bestimmten vorgeschriebenen Zustandsänderung zugeführt werden muss, ergiebt sich hiernach die Gleichung:

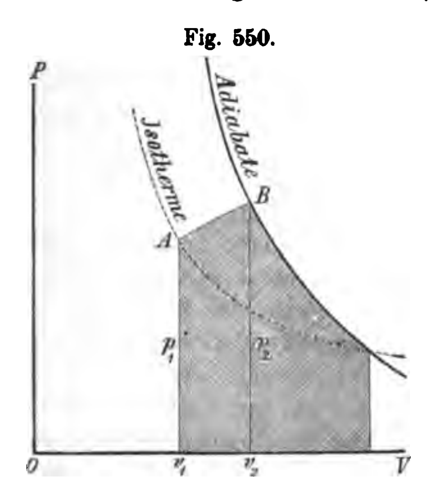
$$5)\quad Q = \int_{U_1}^{U_2} dU + A \int p\, dv.$$

Das erstere Integral hat den Werth $U_2 - U_1$, hängt also nur ab von dem gegebenen Anfangszustande und dem gegebenen Endzustande. Das zweite Integral dagegen hängt zugleich ab von

der Art des Ueberganges und kann nur dann bestimmt werden, wenn das Gesetz gegeben ist, nach welchem p mit v sich änderte während des Ueberganges.

Wenn man nach Beendigung der vorgeschriebenen Zustandsänderung die Luftmasse adiabatisch sich ausdehnen liesse so lange bis die Temperatur — und mit derselben zugleich die innere Wärme — wieder bis auf die ursprüngliche Grösse abgenommen hat, so würde dieselbe Wärme-Quantität, um welche vorher die innere Wärme zugenommen hatte, hierbei wieder in mechanische Arbeit umgewandelt werden. Das Arbeitsäquivalent der ganzen Wärme-Quantität, welche während der durch die Linie AB repräsentirten Zustandsänderung der Luftmasse zugeführt wurde, kann daher geometrisch dargestellt werden durch die Summe der beiden in Fig. 550 schraffirten Flächen, von denen die linksseitige das Integral $\int p\,dv$ darstellt, während die rechtsseitige das Arbeitsäquivalent der Zunahme der inneren Wärme repräsentirt.

Fig. 550.



Am Schlusse des § 182 wurde gezeigt, dass die Art der Zustandsänderung auch durch eine Gleichung von der Form:

6) $T = f(\mathfrak{E})$

charakterisirt werden kann, oder durch eine Linie, deren Form erkennen lässt: nach welchem Gesetze die Temperatur mit der Entropie sich ändert. Man würde daher, wenn dieses Gesetz unmittelbar gegeben wäre, die Wärme-Quantität:

7) $dQ = T d\mathfrak{E}$

Fig. 551.

auch auf die in Fig. 551 angedeutete Weise durch den schraffirten Flächenstreifen geometrisch darstellen können und die ganze Wärme-Quantität Q durch Summation der einzelnen Flächenstreifen be-

stimmen können. Für den Fall der isothermischen Zustandsänderung würde man auf solche Weise eine Rechteckfläche erhalten, deren Inhaltsberechnung wieder zu dem in Gleichung 7) des vorigen Paragraphen für diesen Fall gefundenen Werthe führen würde.

§ 185.

Beschleunigte Expansion.

Bei allen bisher untersuchten Fällen wurde vorausgesetzt: dass die Zustandsänderung mit sehr geringer Geschwindigkeit erfolgte, und dass der von aussen her auf den Kolben wirkende Druck stets diejenige Grösse hatte, welche den jedesmaligen Gleichgewichtsbedingungen der eingeschlossenen Luftmasse entsprach. So lange diese Voraussetzung erfüllt blieb, durfte die bei irgend einer Zustandsänderung stattfindende Verschiebung des Kolbens stets als eine gleichförmige Bewegung betrachtet werden, und — wie am Schlusse des § 181 gezeigt wurde — konnte in diesem Falle durch alleinige Zuführung von Arbeit (ohne gleichzeitige Zuführung oder Entziehung von Wärme) niemals eine Versetzung des Zustandspunktes der Luftmasse in eine andere Adiabate, d. h. eine Aenderung ihrer Entropie hervorgebracht werden.

Wenn dagegen der von aussen her auf den Kolben wirkende Druck grösser oder kleiner ist als der Gleichgewichtsdruck der eingeschlossenen Luftmasse, so wird eine beschleunigte Bewegung des Kolbens — in der Richtung nach innen oder in der Richtung nach aussen hin — stattfinden, und in diesem Falle wird auch ohne Wärme-Zuführung oder -Entziehung — durch alleinige Zuführung einer (positiven oder negativen) Arbeitsgrösse — eine Aenderung der Entropie hervorgebracht werden können. Es lässt sich jedoch nachweisen: dass diese Aenderung stets nur eine Zunahme — niemals aber eine Abnahme sein kann.

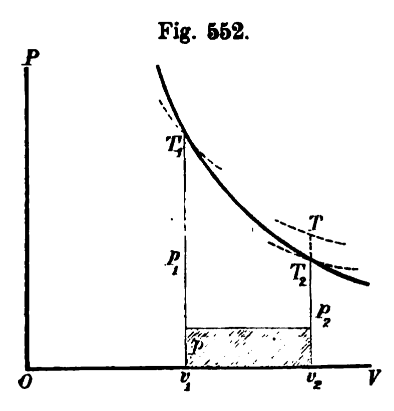
Bei adiabatischer — langsam und allmählich erfolgender — Ausdehnung kann die Bewegung des Kolbens als eine gleichförmige betrachtet werden. Die der Luftmasse entzogene auf den Kolben übertragene Arbeit würde in diesem Falle (nach Fig. 548) durch die von der Adiabate begrenzte Fläche geometrisch darzustellen sein. Bei dieser Art der Ausdehnung würde der Druck allmählich von p_1 bis p_2 und die Temperatur von T_1 bis auf T_2 sinken. Wenn statt dessen ein anderes Mal angenommen wird, dass der äussere Druck plötzlich von p_1 bis p sinkt und während

des alsdann eintretenden beschleunigten Zurückweichens des Kolbens den constanten Werth p beibehält, so ergiebt sich für die von der Luftmasse auf den Kolben übertragene Arbeit der Werth:

$$1)\quad \mathfrak{A} = p\,(v_2 - v_1).$$

Diese in Fig. 552 durch die schraffirte Rechteckfläche dargestellte Arbeit wird immer kleiner sein als die adiabatische Arbeit, sobald — wie hier einstweilen vorausgesetzt werden soll — der constante Druck p kleiner ist als der Druck p_2, welcher nach Beendigung der adiabatischen Ausdehnung eingetreten sein würde. Denkt man sich nunmehr nach dem Uebergange der Luftmasse aus dem Volumen v_1 in das Volumen v_2 das Zurückweichen des Kolbens durch irgend ein Bewegungshinderniss (z. B. eine Verengung des Cylinders an dieser Stelle) plötzlich gehemmt, so erkennt man, dass bei nachher eintretendem Gleichgewichtszustande die Luftmasse eine Isotherme T erreichen wird, welche höher liegt als diejenige Isotherme T_2, welche die Luftmasse bei adiabatischer Ausdehnung erreicht haben würde. Denn von der inneren Wärme der Luftmasse wurde im vorliegenden Falle nur der Theil:

Fig. 552.



$$2)\quad Q = A p\,(v_2 - v_1)$$

in äussere Arbeit umgewandelt. Indem man diese Grösse dem Verluste an innerer Wärme gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$3)\quad c_v\,(T_1 - T) = A p\,(v_2 - v_1),$$

aus welcher für die wirklich erreichte Endtemperatur der folgende Werth sich ergiebt:

$$4)\quad T = T_1 - \frac{A p\,(v_2 - v_1)}{c_v}.$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass $T = T_1$ wird, wenn der constante Gegendruck p die Grösse Null hatte. In diesem Falle wird die Temperatur der Luftmasse trotz erfolgter Volumen-Vergrösserung wieder bis zur Isotherme des Anfangszustandes hinaufsteigen, und aus dem in § 182 für den Fall einer isothermischen Ausdehnung berechneten Zahlenbeispiele ergiebt sich, dass mit

einer solchen Zustands-Aenderung immer eine Versetzung in eine höhere Adiabate, d. h. eine **Vergrösserung der Entropie** verbunden ist.

Wenn z. B. ein Kilogramm gewöhnlicher atmosphärischer Luft (vom Drucke $p_1 = 10\,333$ Kil., vom Volumen: $v = 0{,}7734$ Cubikmeter und von der Temperatur $T = 273^0$) plötzlich ohne Gegendruck auf das Zehnfache des ursprünglichen Volumens sich ausdehnte, so würde (nach § 182) die Entropie von der Grösse 1,496 bis zu der Grösse 1,655 zunehmen.

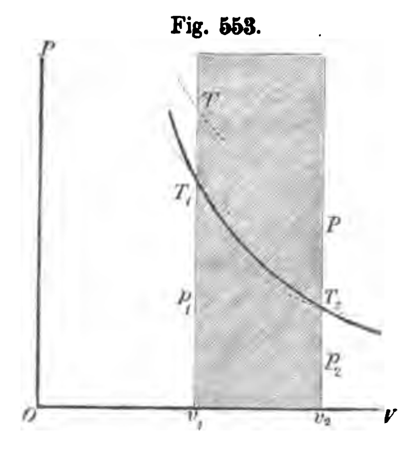
§ 186.

Beschleunigte Compression.

Bei langsam und allmählich erfolgender adiabatischer Compression vom Volumen v_2 auf das kleinere Volumen v_1 würde ein dem Laufe der adiabatischen Curve entsprechendes allmähliches Anwachsen des Druckes von der ursprünglichen Grösse p_2 bis zur Grösse p_1 stattfinden, und nach Fig. 548 würde die von der Adiabate selbst begrenzte Fläche die der Luftmasse hierbei zugeführte Arbeitsgrösse darstellen.

Wenn dagegen ein anderes Mal der äussere Druck **plötzlich** von der Grösse p_2 bis zur Grösse P gesteigert wird und während des dadurch bewirkten beschleunigten Vorrückens des Kolbens den constanten Werth P beibehält, so wird der Luftmasse eine Arbeit zugeführt von der Grösse:

Fig. 553.



$$1)\quad \mathfrak{A} = P\,(v_2 - v_1).$$

Diese in Fig. 553 durch die schraffirte Rechteckfläche dargestellte Arbeit wird immer grösser sein als die adiabatische Arbeit, wenn — wie hier vorausgesetzt wird — der constante Druck P grösser ist als derjenige Druck p_1, welcher nach Beendigung der **adiabatischen** Compression eingetreten sein würde.

Denkt man sich nach dem Uebergange der Luftmasse in das kleinere Volumen v_1 das Vorrücken des Kolbens plötzlich gehemmt, so erkennt man, dass bei nachher eintretendem Gleichgewichtszustande der Zustandspunkt der Luftmasse eine Isotherme T erreichen wird, welche höher liegt als diejenige Isotherme T_1,

welche die Luftmasse bei langsamer **adiabatischer** Compression erreicht haben würde. Indem man das Wärme-Aequivalent der oben gefundenen Arbeitsgrösse dem Zuwachse der inneren Wärme gleich setzt, erhält man die Gleichung:

$$2)\quad AP(v_2 - v_1) = c_v (T - T_2),$$

aus welcher für die erreichte End-Temperatur der folgende Werth sich ergiebt:

$$3)\quad T = T_2 + \frac{AP(v_2 - v_1)}{c_v}.$$

Um diejenige Grösse zu finden, welche der constante äussere Druck P haben musste, damit der nachherige Gleichgewichtsdruck der Luftmasse ebenfalls gleich P werde, hat man:

$$4)\quad Pv_1 = RT$$

zu setzen und hierin für T den oben gefundenen Werth zu substituiren. Man erhält dann eine Gleichung, welche für P aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$5)\quad P = \frac{c_v R T_2}{(c_v + AR)\, v_1 - AR\, v_2}.$$

Wenn man in dieser Gleichung: $RT_2 = p_2 v_2$ setzt, so erhält man durch Auflösung derselben für das dem obigen Werthe von P entsprechende Compressionsverhältniss den Werth:

$$6)\quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{AR + c_v \cdot \frac{p_2}{P}}{AR + c_v}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Verhältniss $\frac{v_1}{v_2}$ nur abhängt von dem **Druck-Verhältniss** $\frac{p_2}{P}$, nicht aber von der **absoluten** Grösse des ursprünglichen Druckes.

Wenn z. B. die Luftmasse ursprünglich im Zustande der gewöhnlichen atmosphärischen Luft sich befand (entsprechend den Werthen: $p_2 = 10333$ Kil., $v_2 = 0^{cm},7734$, $T_2 = 273^0$), und der äussere Druck plötzlich auf 10 Atmosphären gesteigert wird, so ist $\frac{p_2}{P} = \frac{1}{10}$ zu setzen, und es wird $\frac{v_1}{v_2} = 0{,}36165$, oder $v_1 = 0^{cm},28$. Dem Drucke $P = 10 \,.\, 10333$ Kil. und dem Volumen $v_1 = 0^{cm},28$ entspricht die Temperatur $T = 987^0$, und nach § 182 findet man, dass bei dieser Compression die Entropie der Luftmasse von 1,496 bis 1,643 zunimmt, während bei adiabatischer Compression d. h. bei constant bleibender Entropie das Volumen bis auf die Grösse $v_1 = 0{,}1953\, v_2$ abnehmen, und die Temperatur bis zu der Grösse $T_1 = 533^0$ zunehmen würde, wenn der Druck bis auf das Zehnfache zunähme.

Die obige Gleichung zeigt, dass mit allmählich wachsendem Werthe der Grösse P das Volumen-Verhältniss einem bestimmten Grenzwerthe sich nähert, welchen dasselbe niemals überschreiten kann; denn für $P = \infty$ wird:

$$7) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{AR}{AR + c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{1}{3{,}44}.$$

Hieraus folgt, dass selbst bei Anwendung einer unendlich grossen Druckkraft P es nicht möglich sein würde, eine bleibende Compression hervorzubringen auf ein Volumen:

$$8) \quad v_1 < \frac{v_2}{3{,}44},$$

während bei allmählicher Steigerung des Druckes — entsprechend dem Laufe der adiabatischen Curve — jede beliebige bleibende Compression hervorgebracht werden kann.

Die oben gefundenen Gleichungen können auch auf den in Fig. 554 und Fig. 555 dargestellten Fall angewendet werden, bei welchem angenommen ist, dass die Kolbenfläche 1 Quadratmeter beträgt und dass eine auf den Kolben gelegte schwere Masse durch ihr Gewicht den äusseren Druck gegen die eingeschlossene Luftmasse hervorbringt. Diese Belastung hatte anfänglich die in Fig. 554 angegebene Grösse p_2 und wird durch Auflegen eines Uebergewichtes plötzlich bis zu der Grösse P gesteigert. In Folge dessen wird der Kolben sinken und nach Schwingungen von abnehmender Amplitude schliesslich in einer neuen Gleichgewichtslage (Fig. 555) zur Ruhe gelangen — insofern mit jeder Schwingung eine ungleichförmige Zustandsänderung der Luftmasse, folglich eine Zunahme der Entropie, oder ein Umsatz von lebendiger Kraft der schwingenden Bewegung in Wärme verbunden sein wird.

Fig. 554.

Fig. 555.

Nach eingetretenem Ruhezustande wird die von der Höhe h_2 bis auf die Höhe h_1 herabgesunkene Belastung die mechanische Arbeit:

$$9) \quad P(v_2 - v_1) = P(h_2 - h_1)$$

verrichtet haben, und die innere Wärme wird um das Wärme-

Aequivalent dieser Arbeitsgrösse zugenommen haben. Aus den oben gefundenen Gleichungen ergiebt sich demnach, dass es unter den hier vorausgesetzten Bedingungen niemals möglich sein wird, eine bleibende Senkung des Kolbens bis auf eine Höhe:

$$10)\quad h_1 < \frac{h_2}{3,44}$$

zu bewirken — wie gross auch immer das auf den Kolben gelegte Gewicht P gewählt werden möge.

§ 187.

Zunahme der Entropie bei Temperatur-Ausgleichungen.

Wenn einer Luftmasse von der Temperatur T die Wärme-Quantität dQ entzogen wird, und diese Wärme-Quantität einer anderen Luftmasse von der Temperatur t zugeführt wird, so vermindert sich die Entropie der ersteren um die Grösse $\frac{dQ}{T}$, während die Entropie der letzteren um die Grösse $\frac{dQ}{t}$ zunimmt. Die Gesammt-Entropie der beiden Luftmassen wächst also um die Grösse:

$$1)\quad d\mathfrak{E} = \frac{dQ}{t} - \frac{dQ}{T},$$

welche stets positiv ist, sobald T grösser ist als t, wie hier vorausgesetzt werden soll. Hieraus folgt, dass mit jedem Wärme-Uebergange von einem wärmeren Theile zu einem kälteren Theile eine Zunahme der Entropie des Ganzen verbunden sein wird.

Nach § 181 und § 182 ergeben sich resp. für Druck, Volumen, absolute Temperatur, Entropie und innere Wärme eines Luftkilogrammes die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$$\begin{cases} p_1 = 10\,333 \\ v_1 = 0,7734 \\ T_1 = 273 \\ \mathfrak{E}_1 = 1,496 \\ U_1 = 46 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2 = 10\,333 \\ v_2 = 1,5468 \\ T_2 = 546 \\ \mathfrak{E}_2 = 1,661 \\ U_2 = 92 \end{cases}$$

Denkt man sich ein Kilogramm Luft (Nr. 1) in dem durch den Index „Eins" charakterisirten Zustande und ein anderes Kilogramm Luft (Nr. 2) in dem durch den Index „Zwei" charakterisirten Zustande, so ergiebt sich für die Entropie, welche diese beiden Luftmassen zusammengenommen besitzen, der Werth:

2) $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = 3{,}157.$

Wenn diese beiden Luftmassen — anfänglich durch eine Scheidewand getrennt — zusammen in einem und demselben Gefässe sich befinden, dessen unbeweglich vorausgesetzte Wände für Wärme undurchdringlich sind, so wird nach Beseitigung jener Scheidewand eine Temperatur-Ausgleichung eintreten, bei welcher die gesammte innere Wärme:

3) $U_1 + U_2 = 138$

nunmehr gleichförmig auf die ganze Masse sich vertheilen wird. Nach erfolgter Temperatur-Ausgleichung wird jede von den beiden Luftmassen das Volumen:

4) $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 1{,}16,$

die innere Wärme: $U = 69$ und die überall gleiche Temperatur:

5) $T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 409{,}5$

besitzen, während der Druck die Grösse $p = 10\,333$ unverändert beibehalten hat. Diesen Werthen entspricht nach § 182 der Entropiewerth: $\mathfrak{E} = 1{,}593$ für jedes Kilogramm. Während der Temperatur-Ausgleichung wächst also die Entropie des G a n z e n von der Grösse: $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = 3{,}157$ bis zu der Grösse:

6) $2\mathfrak{E} = 3{,}186.$

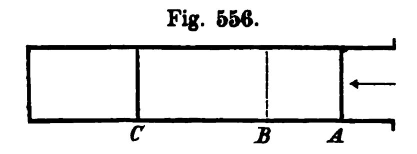
In den vorigen beiden Paragraphen wurde gezeigt, dass auch Zustands-Aenderungen, welche auf rein mechanischem Wege — d. h. ohne gleichzeitige Wärme-Zuführung — hervorgebracht werden, mit einer Vergrösserung der Entropie verbunden sein können; dass jedoch eine solche Vergrösserung der Entropie immer nur dann eintreten wird, wenn jene Zustands-Aenderungen mit B e s c h l e u n i g u n g stattfinden. Diese letztere Einschränkung fällt weg, sobald man die bis dahin gemachte Voraussetzung fallen lässt, nach welcher die Luftmasse stets ein zusammenhängendes Ganzes bilden sollte.

Das obige Beispiel zeigt nämlich: dass auch eine Reihe von g l e i c h f ö r m i g e n mechanischen Veränderungen eine Vergrösserung der Entropie zur Folge haben hann. Denn einen solchen Zustand ungleichförmiger Wärme-Vertheilung, wie derselbe oben als Anfangszustand angenommen wurde, könnte man bei einer Luftmasse von ursprünglich überall gleicher Temperatur z. B. auch

dadurch hervorbringen, dass man zuerst die eine Hälfte adiabatisch comprimirt und dieselbe nach Abgabe eines Theiles der gewonnenen inneren Wärme an die andere Hälfte nachher wiederum adiabatisch so lange sich ausdehnen lässt, bis der Druck in beiden Hälften dieselbe Grösse angenommen hat. Mit dem hiernach eintretenden Wärme-Uebergange von der wärmeren auf die kältere Hälfte wird — ebenso wie mit jenem schon früher erfolgten Wärme-Uebergange — ein Wachsen der Entropie des Ganzen verbunden sein, obwohl jene auf mechanischem Wege herbeigeführte anfängliche Compression und nachherige Expansion als gleichförmige Zustands-Aenderungen vorausgesetzt wurden.

Denkt man sich z. B. in Fig. 556 den Kolben A für Wärme undurchlässig, den Kolben C dagegen für Wärme durchlässig, so erkennt man: dass bei langsam und gleichförmig stattfindender Verschiebung des ersteren von A nach B die Entropie der in dem ganzen Cylinder enthaltenen Luftmasse resp. zunehmen oder constant bleiben wird, jenachdem der Kolben C als unbeweglich oder als beweglich vorausgesetzt wird. Im ersteren Falle wird ausschliesslich die zwischen den beiden Kolben befindliche Luftmasse eine Compression erleiden. Dieselbe wird alsdann einen Theil ihrer gewonnenen inneren Wärme an die andere Luftmasse abgeben, und mit diesem Wärme-Uebergange ist eine Zunahme der Entropie des Ganzen verbunden. Im anderen Falle dagegen wird die Luftmasse als Ganzes eine adiabatische Compression erleiden, bei welcher ihre Entropie constant bleibt.

Fig. 556.



Auch bei den im vorigen Paragraphen untersuchten Vorgängen kann als letzte Ursache der Entropie-Vergrösserung: der Wärme-Uebergang von einem wärmeren zu einem kälteren Theile der Luftmasse angesehen werden, insofern bei jener beschleunigten Bewegung des Kolbens angenommen werden darf, dass die von demselben weiter entfernten Lufttheilchen noch ihre ursprüngliche Temperatur beibehalten haben werden, während die dem Kolben zunächst liegenden Theilchen schon eine Temperatur-Aenderung erlitten haben, welche dann allmählich auch auf die ersteren sich übertragen wird.

Die Untersuchungen dieser letzteren Paragraphen führen somit zu dem Schlusse: dass bei einer allseitig von adiabatischen —

ganz oder theilweise beweglichen — Wandflächen umschlossenen Luftmasse immer nur solche Zustands-Aenderungen hervorgebracht werden können, bei welchen die Entropie entweder constant bleibt oder zunimmt. Niemals aber wird es möglich sein, durch irgend welche Manipulationen eine Zustands-Aenderung herbeizuführen, mit welcher eine Abnahme der Entropie verbunden sein würde.

§ 188.

Curven constanter specifischer Wärme.

Nach § 178 kann jede gegebene stetige Zustands-Aenderung der Luftmasse als eine Bewegung des ihren Zustand repräsentirenden Punktes in der Temperaturfläche längs einer gegebenen krummen Linie aufgefasst werden. Im Allgemeinen wird jede solche Zustands-Aenderung von einer (positiven oder negativen) Temperatur-Erhöhung und von einer (positiven oder negativen) Wärmezuführung begleitet sein. Wenn für irgend ein bestimmtes Weges-Element die Temperatur-Zunahme mit dT und die zugeführte Wärmequantität mit dQ bezeichnet wird, so kann der Quotient:

$$1) \quad \frac{dQ}{dT} = \lambda,$$

als diejenige Wärmequantität, welche unter gleichen Umständen eine Temperaturzunahme von 1 Grad hervorbringen würde, die specifische Wärme der Luft für die jenem Weges-Elemente entsprechende specielle Art der Zustands-Aenderung genannt werden.

Denkt man sich die obige Gleichung für jedes der auf einander folgenden Bahn-Elemente aufgestellt, so erkennt man, dass der Quotient λ eine Grösse ist, welche im Allgemeinen während der Bewegung stetig sich ändern wird. Je nach der Form des vorgeschriebenen Weges wird diese Aenderung der Grösse λ in einem Wachsen oder Abnehmen derselben bestehen können, und man überzeugt sich leicht, dass es für jene Bahnlinie auch solche Formen geben muss, bei welchen die Grösse λ weder zunimmt noch abnimmt. Eine solche Linie, für deren Elemente der Quotient λ überall denselben Werth annimmt, kann eine „Curve constanter specifischer Wärme“ genannt werden, und die Gleichung dieser Linie lässt sich auf folgende Weise ableiten.

Der Gleichung 1) kann man nach Substitution des in § 178 (Gleichung 9) für dT angegebenen Werthes auch die folgende Form geben:

$$2) \quad dQ = \frac{\lambda}{R}(v\,dp + p\,dv).$$

Für diejenige Wärmequantität, welche erforderlich ist, um gleichzeitig die Druckzunahme dp und die Volumenzunahme dv hervorzubringen, wurde in § 180 (Gleichung 5) der Ausdruck gefunden:

$$3) \quad dQ = \frac{c_v\,v\,dp + c_p\,p\,dv}{R}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhält man eine Gleichung, welcher man nach Substitution des Werthes: $\frac{c_p}{c_v} = k$ die folgende Form geben kann:

$$4) \quad \frac{dp}{p} = -\left(\frac{k c_v - \lambda}{c_v - \lambda}\right)\frac{dv}{v}.$$

Da die Grösse λ der Voraussetzung nach einen von den Grössen p und v unabhängigen Werth haben sollte, so ist der Quotient:

$$5) \quad \frac{k c_v - \lambda}{c_v - \lambda} = r$$

ebenfalls als eine constante Grösse zu behandeln, und man gelangt, indem man nach Substitution dieses Werthes die Integration ausführt, zu den folgenden Gleichungen:

$$6) \quad \int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = -r\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v},$$

$$7) \quad \lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -r\lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right),$$

$$8) \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^r.$$

Die Horizontalprojection der Curve, welche der den Zustand der Luftmasse repräsentirende Punkt in der Temperaturfläche durchlaufen muss, wenn die Grösse λ constant bleiben soll, entspricht also der Gleichung*):

$$9) \quad p v^r = \text{Const.} = p_1 v_1^r = p_2 v_2^r,$$

und nach Gleichung 5) hat bei dieser Art der Zustands-Aenderung die specifische Wärme der Luft den constanten Werth:

*) Vergl. Zeuner: „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie“. 2. Aufl. S. 145 und S. 213.



10) $\lambda = c_v \left(\frac{r - k}{r - 1}\right)$.

Aus dieser Gleichung ergeben sich für die beiden Grössen r und λ die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$r =$	0	1	k	∞
$\lambda =$	c_p	∞	0	c_v
	$p =$ Const.	$T =$ Const.	$\mathfrak{S} =$ Const.	$v =$ Const.

Wenn die Zustands-Aenderung dem obigen Gesetze gemäss erfolgt, so kann die zum Hervorbringen der Temperatur-Erhöhung $T_2 - T_1$ erforderliche Wärmequantität berechnet werden aus der Gleichung:

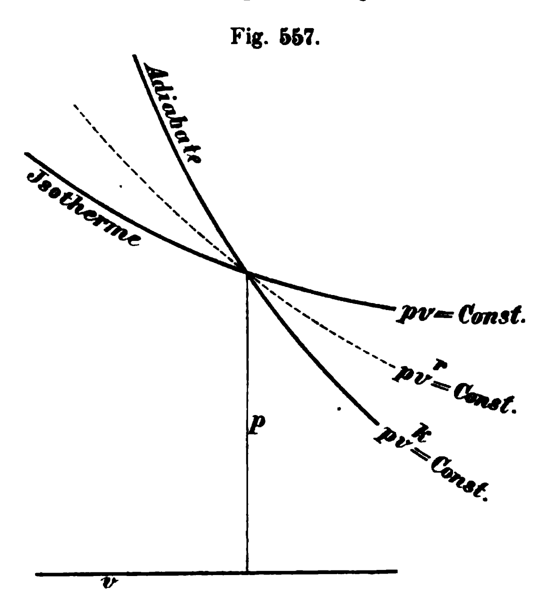
11) $Q = \lambda (T_2 - T_1)$.

Für diese Wärmequantität ergiebt sich ein negativer Werth, wenn die Grösse λ selbst negativ (und zugleich $T_2 - T_1$ positiv) ist. Nach Gleichung 10) entspricht dem Falle:

12) $r \lessgtr \begin{matrix} k \\ 1 \end{matrix}$

eine negative specifische Wärme. Wenn also die Constante r zwischen den Werthen 1 und 1,41 liegt — entsprechend dem in Fig. 557 durch die punktirte Linie dargestellten Falle — so wird eine Temperatur-Erhöhung mit einer Wärme-Entziehung verbunden sein, und eine Temperatur-Erniedrigung mit einer Wärme-Zuführung.

Fig. 557.



Nach § 182 wird durch die zugeführte Wärmequantität dQ eine Zunahme der Entropie hervorgebracht von der Grösse:

$$13)\quad d\mathfrak{E} = \frac{dQ}{T}.$$

Wenn man hierin für dQ den aus Gleichung 1) zu entnehmenden Werth einsetzt und alsdann die Integration ausführt, so erhält man die Gleichungen:

$$14)\quad \int_{\mathfrak{E}_1}^{\mathfrak{E}_2} d\mathfrak{E} = \lambda \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T},$$

$$15)\quad \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = \lambda \lg\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Bei dem Uebergange aus der Isotherme T_1 in die Isotherme T_2 wächst also die Entropie stets um dieselbe Grösse — wo auch immer dieser Uebergang stattfinden möge — vorausgesetzt, dass derselbe dem obigen Gesetze gemäss erfolgt.

Nach Substitution des Werthes: $pv = RT$ kann man der Gleichung 9) auch die folgende Form geben:

$$16)\quad Tv^{r-1} = \text{Const.} = T_1 v_1^{r-1} = T_2 v_2^{r-1},$$

und wenn man hiernach das Verhältniss der Temperatur durch das Verhältniss der Volumina ausdrückt, so erhält man die Gleichung:

$$17)\quad \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = \lambda (r-1) \lg\left(\frac{v_1}{v_2}\right),$$

welcher man mit Benutzung des in Gleichung 10) für λ angegebenen Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$18)\quad \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = c_v (k-r) \lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right).$$

Bei gegebenem Werthe von r entspricht also dem Volumen-Vergrösserungsverhältniss: $n = \frac{v_2}{v_1}$ stets dieselbe Zunahme der Entropie — wie auch immer der Anfangszustand beschaffen gewesen sein mochte. — Der Werth $r = k$ entspricht der adiabatischen Zustands-Anderung, und für diesen Fall wird $\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = 0$. Der Werth $r = 1$ entspricht dem Falle der isothermischen Zustands-Aenderung, und für diesen Fall erhält man (in Uebereinstimmung mit dem in § 183 gefundenen Resultate) die Gleichung:

$$19)\quad \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = (c_p - c_v) \lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right), \text{ oder:}$$

$$20)\quad \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = AR \lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = \frac{Q}{T}.$$

§ 189.

Ideale Gase.

Die für atmosphärische Luft gefundenen Gleichungen können auch auf die anderen sogenannten permanenten Gase angewendet werden, sobald man darin für die Constanten R, c_v, c_p die entsprechend veränderten numerischen Werthe einsetzt, welche aus der nachfolgenden Tabelle*) zu entnehmen sind.

	Atm. Luft	Stickstoff	Sauerstoff	Wasserstoff
$R =$	29,272	30,134	26,475	422,612
$c_v =$	0,168 47	0,172 73	0,155 07	2,412 26
$c_p =$	0,237 51	0,243 80	0,217 51	3,4090.

Die allgemeine Gleichung der Temperaturfläche würde hiernach z. B. für Wasserstoff die folgende Form annehmen:

$$1)\quad \frac{pv}{T} = 422,612.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für das Volumen, welches ein Kilogramm Wasserstoff bei atmosphärischem Drucke und einer Temperatur von Null Grad Celsius besitzt, der Werth:

$$2)\quad v = \frac{273\;.\;422,612}{10\,333} = 11,162 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach § 182 (Gleichung 8) hat ein Kilogramm Wasserstoff in diesem Zustande eine Entropie von der Grösse:

$$3)\quad \mathfrak{E} = 2,412\,26 \lg\left(10\,333\;.\;11,162^{1,41}\right) = 30,52.$$

In der Temperaturfläche des Wasserstoffes entspricht der Durchschnittspunkt der Isotherme: $T = 273$ mit der Adiabate (oder Isentrope): $\mathfrak{E} = 0$ den Coordinaten:

$$p_0 = 205\,630\;.\;10^{12} \quad \text{und} \quad v_0 = 0,561\;.\;10^{-12}.$$

Die Wärmemenge, welche erforderlich sein würde, um das Wasserstoffkilogramm aus der Isentrope: $\mathfrak{E} = 0$ in die Isentrope: $\mathfrak{E} = 30,52$ längs der Isotherme: $T = 273$ überzuführen, hat (nach § 183) die Grösse:

$$4)\quad Q = 273\;.\;30,52 = 8332 \text{ Wärme-Einheiten,}$$

während die Ueberführung längs der Isotherme: $T = 1°$ nur 30,52 Wärme-Einheiten beanspruchen würde.

---

*) Zeuner: „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie". 2. Auflage. Neuer Abdruck.

Die in der obigen Tabelle aufgeführten Stoffe wurden früher „permanente Gase“ genannt, insofern es bis vor Kurzem nicht gelungen war, dieselben in den tropfbar flüssigen und festen Aggregatzustand überzuführen. Nachdem jedoch die am Schlusse des Jahres 1877 von L. Cailletet und Raoul Pictet gemachten Entdeckungen gezeigt haben, dass diese Stoffe ebenfalls dem Wechsel des Aggregatzustandes unterworfen sind, erweist sich jene Benennung nicht mehr als zutreffend. Die für atmosphärische Luft als Repräsentanten der sogenannten Gase gefundenen Gleichungen sind daher nur innerhalb eines beschränkten Gebietes der Temperaturfläche als gültig zu betrachten, und bei Anwendungen auf extreme Fälle wird man nicht mehr erwarten dürfen, dass die Resultate der Rechnung mit den Resultaten der Erfahrung genau übereinstimmen. Die gefundenen Gleichungen würden vielmehr nur für ein sogenanntes „vollkommenes“ oder „ideales“ Gas in aller Strenge als gültig zu betrachten sein; d. h. für eine Gasart, welche man sich so beschaffen denkt, dass die Grössen: R, c_v, c_p für dieselbe unter allen Umständen als constant bleibend vorausgesetzt werden dürfen.

Die Gleichung 11) des § 179 zeigt: dass die Differenz der beiden specifischen Wärmen c_p und c_v jedenfalls constant sein würde, wenn die Grösse R constant wäre. Wenn also ausserdem auch das Verhältniss jener beiden Grössen als constant angenommen werden dürfte, so würde auch jede von den beiden Grössen c_p und c_v selbst als constant angesehen werden dürfen. Ein sogenanntes „vollkommenes“ oder „ideales“ Gas würde hiernach definirt werden können als ein Gas, für welches die beiden Grössen R und k unter allen Umständen constant bleiben.

§ 190.

Stabiler und labiler Gleichgewichtszustand der Atmosphäre.*)

Wenn mit γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft, und mit p der Luftdruck in der Höhe z über der Meeresfläche bezeichnet wird, so ist nach § 160:

$$1)\quad dp = -\gamma\, dz$$

zu setzen, und wenn man hierin für γ den aus der Gleichung 12)

*) Vergl. Reye: „Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre“. Hannover. Carl Rümpler. 1872.

des § 177 zu entnehmenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$2)\quad dp = -\frac{p\,dz}{RT}.$$

Da im Allgemeinen anzunehmen ist, dass die Temperatur der atmosphärischen Luft mit der Höhe über der Meeresfläche sich ändert, so ist die Grösse T als eine Function von z zu betrachten, und der Differenzialquotient $\frac{dT}{dz}$ bedeutet die Temperaturzunahme pro Längeneinheit der Höhenzunahme. Wenn in Wirklichkeit das Gesetz dieser Aenderung so beschaffen ist, dass einer Höhen-Zunahme von 1^m eine Temperatur-Abnahme von n Graden entspricht, so ist:

$$3)\quad \frac{dT}{dz} = -n$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für die Grösse dz zu entnehmenden Werthes kann man der obigen Gleichung die folgende Form geben:

$$4)\quad \frac{dT}{T} = nR \cdot \frac{dp}{p}.$$

Bei geringer Höhenzunahme darf ein gleichförmiges Abnehmen der Temperatur von unten nach oben vorausgesetzt, und demgemäss die Grösse n als eine von z unabhängige Constante behandelt werden. Indem man unter dieser Voraussetzung die obige Gleichung integrirt — auf der rechten Seite zwischen den Grenzen p_1 und p_2, auf der linken Seite zwischen den zugehörigen Grenzwerthen T_1 und T_2 — gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$5)\quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = nR \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p},$$

$$6)\quad \lg\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = nR \lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right), \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{nR}.$$

Denkt man sich ein Kilogramm atmosphärischer Luft ohne Wärmezuführung von der Höhe z_1 bis zu der grösseren Höhe z_2 aufsteigend, so erkennt man (nach § 180, Gleichung 14), dass die Temperatur dieser Luftmasse während des Aufsteigens abnehmen

wird, insofern dieselbe von dem grösseren Drucke p_1 in den kleineren Druck p_2 übergeht und in Folge dessen sich ausdehnen wird. Die neue Temperatur T_2', welche das aufgestiegene Luftkilogramm in der Höhe z_2 annehmen wird, ist nach § 180 zu berechnen aus der Gleichung:

$$8)\quad \frac{T_2'}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Wenn T_2' kleiner ist als T_2, so wird die aufgestiegene Luftmasse schwerer sein als die umgebende Luft und in Folge dessen wieder hinabsinken. Wenn dagegen T_2' grösser ist als T_2, so wird die aufgestiegene Luftmasse fortfahren zu steigen und von ihrer früheren Gleichgewichtslage noch weiter sich zu entfernen. Der Gleichgewichtszustand der Atmosphäre ist also ein stabiler oder labiler, je nachdem T_2' kleiner ist oder grösser als T_2. Der indifferente Gleichgewichtszustand entspricht dem Falle, in welchem T_2' gleich T_2 ist, und aus den oben gefundenen beiden Gleichungen ergiebt sich für diesen Fall die Bedingungsgleichung:

$$9)\quad nR = 1 - \frac{1}{k},$$

welcher man nach Substitution der numerischen Werthe für die Constanten R und k auch die folgende Form geben kann:

$$10)\quad n = \frac{1}{100{,}66}.$$

Die Atmosphäre befindet sich also im stabilen Gleichgewichtszustande, wenn einer Höhenzunahme von mehr als 100,66 Metern eine Temperatur-Abnahme von einem Grade Celsius entspricht; im labilen Gleichgewichtszustande dagegen, wenn einer Höhenzunahme von weniger als 100,66 Metern schon eine Temperatur-Abnahme von einem Grade Celsius entspricht.

Zugleich ergiebt sich aus der obigen Untersuchung, dass bei stabilem Gleichgewichtszustande der Atmosphäre eine bergan gerichtete Luftströmung als kalter Wind, eine bergab gerichtete Luftströmung dagegen als warmer Wind sich bemerkbar machen wird, während bei labilem Gleichgewichtszustande das Umgekehrte stattfinden wird.

Die oben gefundenen Gleichungen gelten für trockene atmosphärische Luft. Mit Berücksichtigung des in der Atmosphäre stets und überall vorhandenen Wasserdampfes würde man zu dem Resultate gelangen, dass unter Umständen schon bei erheblich kleineren Werthen von n der labile Gleichgewichtszustand eintreten kann.

Wenn man in Gleichung 7) für das Temperaturen-Verhältniss den in § 180 (Gleichung 12) angegebenen Ausdruck einsetzt, so erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$11)\quad \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{nR-1}.$$

In dieser Gleichung bedeutet v_1 den Rauminhalt eines Kilogrammes Luft in der Höhe z_1, und v_2 den Rauminhalt eines Kilogrammes Luft in der Höhe z_2 über der Meeresfläche. Indem man $v_2 = v_1$ setzt, findet man für n den Werth:

$$12)\quad n = \frac{1}{R} = \frac{1}{29{,}27}.$$

Hieraus folgt, dass die Atmosphäre in jeder Höhe über der Meeresfläche dieselbe Dichtigkeit besitzen würde, wenn das Gesetz der Temperatur-Aenderung so beschaffen wäre, dass einer Höhenzunahme von 29,27 Metern überall eine Temperatur-Abnahme von 1 Grad Celsius entspricht.

§ 191.

Barometrische Höhen-Bestimmungen.

Da bei kleinen Höhendifferenzen ein gleichförmiges Abnehmen der Temperatur von unten nach oben vorausgesetzt werden darf, so ist nach der im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnungsweise:

$$1)\quad n = \frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Werthes kann man der Gleichung 6) des vorigen Paragraphen auch die folgende Form geben:

$$2)\quad \lg\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = R\left(\frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}\right)\lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right), \text{ oder:}$$

$$3)\quad z_2 - z_1 = \frac{R(T_1 - T_2)\lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\lg\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}.$$

Aus dieser letzteren Gleichung kann man die Höhendifferenz zweier Punkte berechnen, sobald die atmosphärischen Drücke und die Temperaturen an diesen beiden Punkten aus directen Barometer- und Thermometer-Beobachtungen bekannt sind.

Wenn z. B. die Werthe: $T_1 = 293°$, $T_2 = 283°$ und $\frac{p_1}{p_2} = \frac{0{,}750}{0{,}600}$ beobachtet wurden, so ergiebt sich für die gesuchte Höhendifferenz der Werth:

$$4) \quad z_2 - z_1 = \frac{29{,}27\,(293 - 283)\,\lg\left(\frac{0{,}750}{0{,}600}\right)}{\lg\left(\frac{293}{283}\right)} = 1880^m{,}9.$$

Für die Temperatur T'_2, mit welcher eine von der unteren nach der oberen Station versetzte Luftmasse daselbst ankommen würde, wenn derselben unterwegs keine Wärme zugeführt wurde, erhält man aus der Gleichung 8) des vorigen Paragraphen den Werth:

$$5) \quad T'_2 = 293 \cdot \left(\frac{0{,}600}{0{,}750}\right)^{1-\frac{1}{1{,}41}} = 274°{,}6,$$

und für die Temperatur T'_1, welche eine von der oberen nach der unteren Station versetzte Luftmasse bei ihrer Ankunft an der letzteren annehmen würde, erhält man unter gleichen Voraussetzungen den Werth:

$$6) \quad T'_1 = T_2 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\frac{1}{k}}, \quad \text{oder:}$$

$$7) \quad T'_1 = 283 \cdot \left(\frac{0{,}750}{0{,}600}\right)^{1-\frac{1}{1{,}41}} = 302°.$$

Eine von unten nach oben gerichtete Luftströmung würde also an der oberen Station die Lufttemperatur um 8°,4 (Celsius) erniedrigen, und eine von oben nach unten gerichtete Luftströmung würde an der unteren Station die Lufttemperatur um 9° (Celsius) erhöhen.

Statt der Gleichung 3) würde man zur Berechnung der Höhendifferenz $z_2 - z_1$ auch die Gleichung 6) des § 160 benutzen können, indem man darin statt des Quotienten $\frac{p'}{\gamma'}$ den aus der Gleichung 12) des § 177 zu entnehmenden Ausdruck:

$$8) \quad \frac{p}{\gamma} = RT$$

einsetzt und zugleich in letzterem für T das arithmetische Mittel der beiden Temperaturen T_1 und T_2 substituirt; jene Gleichung nimmt alsdann die folgende Form an:

$$9) \quad z_2 - z_1 = R\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right)\lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Mit Beibehaltung der oben angenommenen Zahlenwerthe würde man aus dieser letzteren Gleichung den Werth: $z_2 - z_1 = 1881^m{,}0$ erhalten. Es zeigt sich also, dass bei Höhendifferenzen, welche nicht mehr als einige tausend Meter betragen, ohne Bedenken auch die letztere Berechnungsmethode ange wendet werden kann.

Die obigen Gleichungen gelten für trockene atmosphärische Luft. Bei genaueren Höhenberechnungen würde man auf den Wasserdampfgehalt der Atmosphäre Rücksicht zu nehmen haben.

§ 192.

Höhe der Atmosphäre.

Wenn mit p der Druck und mit γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft in der Tiefe x unter der Oberfläche der Atmosphäre bezeichnet wird, so entspricht (nach § 190, Gleichung 1) der Tiefenzunahme dx die Druckzunahme:

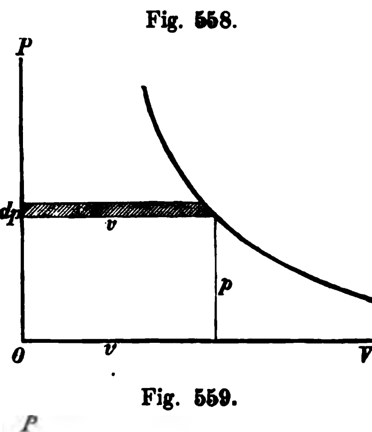
$$1)\quad dp = \gamma\, dx,$$

und wenn mit v das Volumen eines Kilogramms Luft an dieser Stelle bezeichnet wird, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$2)\quad dx = v\, dp,$$

in welcher dieselbe zeigt, dass die Tiefenzunahme dx mittelst des in Fig. 558 schraffirten Flächenstreifens geometrisch dargestellt werden kann. Wenn also mit p_0 der Druck an der Erdoberfläche bezeichnet wird, so kann die ganze Atmosphärenhöhe:

Fig. 558.



$$3)\quad H = \int_0^{p_0} v\, dp = F$$

durch die in Fig. 559 schraffirte Fläche F dargestellt werden, deren Inhalt berechnet werden kann, sobald das Gesetz gegeben ist, nach welchem der Druck p als Function von v mit letzterer Grösse sich ändert.

Fig. 559.

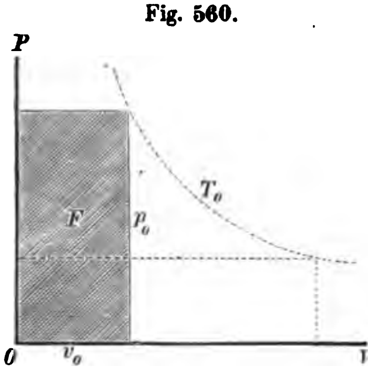
Für eine Atmosphäre von constanter Dichtigkeit würde man $v = v_0$ zu setzen haben und die Gleichung erhalten:

$$4)\quad H = v_0 \int_0^{p_0} dp = p_0 v_0 = R\, T_0,$$

welche zeigt, dass für diesen Fall die Atmosphärenhöhe durch die in Fig. 560 schraffirte Rechteckfläche geometrisch dargestellt

werden kann. Die **Isotherme** als gleichseitige Hyperbel bildet den geometrischen Ort der dem Punkte O gegenüberliegenden Eckpunkte aller Rechteckflächen von gleichem Flächeninhalte; folglich hat z. B. das in Fig. 560 punktirte Rechteck denselben Flächeninhalt wie das schraffirte Rechteck. Die Höhe der Atmosphäre hängt also in diesem Falle nur ab von der Grösse des **Productes** $p_0 v_0$, d. h. von der **Temperatur** der untersten Schicht.

Fig. 560.



Dieser letztere Satz gilt überhaupt für alle diejenigen Fälle, in denen das Gesetz, nach welchem p mit v sich ändert, dargestellt werden kann durch eine Gleichung von der Form:

$$5)\quad p v^{\varepsilon} = \text{Const.} = p_0 v_0^{\varepsilon}, \quad \text{oder:}$$

$$6)\quad p^{\frac{1}{\varepsilon}} v = p_0^{\frac{1}{\varepsilon}} v_0,$$

in welcher der Exponent ε eine beliebige zwischen den Grenzen $+1$ und $+\infty$ liegende constante Zahl bedeuten soll. Denn nach Substitution des hieraus für v zu entnehmenden Werthes erhält man nach Gleichung 2) für dx den Ausdruck:

$$7)\quad dx = p_0^{\frac{1}{\varepsilon}} v_0 \, p^{-\frac{1}{\varepsilon}} \, dp,$$

und durch Ausführung der Integration gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$8)\quad x = p_0^{\frac{1}{\varepsilon}} v_0 \int_0^p p^{-\frac{1}{\varepsilon}} \, dp,$$

$$9)\quad x = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\right) p_0^{\frac{1}{\varepsilon}} v_0 \, p^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}},$$

welcher letzteren (nach Gleichung 6) auch die folgende Form gegeben werden kann:

$$10)\quad x = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\right) p v = \frac{\varepsilon R T}{\varepsilon - 1}.$$

Dem Werthe: $T = T_0$ entspricht der Werth: $x = H$; folglich hat die ganze Atmosphärenhöhe die Grösse:

$$11)\quad H = \frac{\varepsilon R T_0}{\varepsilon - 1} = F.$$

Die Gleichung 10) zeigt zugleich, dass im vorliegenden Falle die Grösse T proportional der Tiefe x zunimmt, und dass die in § 190 mit n bezeichnete Temperaturzunahme pro Längeneinheit der Tiefenzunahme in diesem Falle den constanten Werth annimmt:

$$12)\quad n = \frac{dT}{dx} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon R}.$$

Wenn z. B. $\varepsilon = \infty$ gesetzt wird, so erhält man für eine Atmosphäre von constanter Dichtigkeit aus den obigen beiden Gleichungen die Werthe: $H = R T_0$ und $n = \frac{1}{R}$.

Für den speciellen Fall des indifferenten Gleichgewichtszustandes würde $\varepsilon = k$ zu setzen sein, und nach Gleichung 11) erhält man alsdann für die Atmosphärenhöhe den Werth:

$$13)\quad H = \frac{k R T_0}{k - 1} = F.$$

Wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten mit A multiplicirt und nachher auf der rechten Seite $AR = c_p - c_v$ setzt (§ 179), so kann man derselben auch die folgende Form geben:

$$14)\quad AH = c_p T_0.$$

Diese letztere Gleichung hätte man auch unmittelbar aus den Principien der mechanischen Wärmetheorie ableiten können mittelst der folgenden Beweisführung.

Denkt man sich an der Erdoberfläche unter dem daselbst stattfindenden Drucke p_0 ein Kilogramm Luft von der absoluten Temperatur $T = 0$ und die Forderung gestellt: dieses Luftkilogramm solle bis zur Höhe H der oberen Grenze der Atmosphäre hinaufbefördert werden, so ergeben sich zwei verschiedene Wege dieser Forderung zu genügen, ein directer und ein indirecter Weg.

Der erstere würde darin bestehen, dass man jenes Luftkilogramm direct bis zu jener Höhe emporhebt und daselbst mit der umgebenden atmosphärischen Luft sich vermischen lässt. Da der absoluten Temperatur $T = 0$ bei endlicher Grösse des Druckes das Volumen $v = 0$ entspricht, so würde der Auftrieb ebenfalls die Grösse Null haben. Die zum Emporheben erforderliche mechanische Arbeit hat also die Grösse:

$$15)\quad \mathfrak{A} = 1 \,.\, H.$$

Der zweite (indirecte) Weg würde darin bestehen, dass man dem Luftkilogramm zunächst an der Erdoberfläche so viel Wärme

zuführt, bis dasselbe die Temperatur der daselbst befindlichen Luft annimmt, und alsdann demselben eine beliebig klein zu wählende vertical aufwärts gerichtete Anfangsgeschwindigkeit ertheilt, vermöge welcher das Luftkilogramm ebenfalls bis zur oberen Grenze der Atmosphäre emporsteigen wird, weil bei der adiabatischen Ausdehnung des aufsteigenden Luftkilogramms stets der Auftrieb gleich dem Gewichte sein wird. Da jene Wärmezuführung bei constantem Drucke stattfand, so ist die erforderliche Wärmequantität zu berechnen aus der Gleichung:

16) $Q = c_p T_0$.

Da die hervorgebrachte Wirkung in beiden Fällen dieselbe war, so ergiebt sich aus den Principien der mechanischen Wärmetheorie, dass der Verbrauch von Arbeit oder Wärme ebenfalls in beiden Fällen derselbe sein muss. Wenn man demgemäss die Wärme-Quantität Q dem Wärme-Aequivalente der mechanischen Arbeit $\mathfrak{A}$ gleichsetzt, so gelangt man wiederum zu der oben gefundenen Gleichung 14), welche den folgenden Satz ausdrückt:

„Die Wärme-Quantität, welche einer bis auf den Nullpunkt der absoluten Temperatur abgekühlten Luftmasse mitgetheilt werden müsste, um dieselbe bei constantem atmosphärischen Gegendrucke in denjenigen Zustand überzuführen, in welchem die unterste Schicht der Atmosphäre sich befindet, bildet das Wärme-Aequivalent für diejenige mechanische Arbeit, welche erforderlich sein würde, um ebendieselbe Luftmasse bis zur oberen Grenze der Atmosphäre emporzuheben.“

Wenn z. B. die Temperatur an der Erdoberfläche Null Grad Celsius betrüge, so würde $T = 273$ zu setzen sein, und nach Gleichung 14) würde man unter Voraussetzung des indifferenten Gleichgewichtszustandes für die Höhe der Atmosphäre den Werth erhalten:

17) $H = 424 \,.\, 0{,}2375 \,.\, 273 = 27\,490^{\text{m}}$.

Dieselbe Höhe würde die Erdatmosphäre auch dann noch beibehalten, wenn die Masse derselben z. B. auf das Tausendfache vergrössert würde, da die Grösse H nur abhängt von der Grösse T_0 und ganz unabhängig ist von der Dichtigkeit der Atmosphäre.

Der obige Satz würde auch dann noch gültig bleiben, wenn statt der untersten Atmosphärenschicht irgend eine höher liegende, z. B. die in der Tiefe x unter der oberen Grenzfläche befindliche Schicht gewählt wurde. Unter Voraussetzung des indifferenten

Gleichgewichtszustandes würde man also die Temperatur dieser Schicht berechnen können aus der Gleichung:

$$18) \quad Ax = c_p T.$$

Nach dieser Gleichung würde man z. B. für die der Temperatur $T = 1^\circ$ entsprechende Tiefe den Werth erhalten:

$$19) \quad x = 424 \,.\, 0{,}2375 \,.\, 1 = 100^m{,}7.$$

Der indifferente Gleichgewichtszustand darf in gewissem Sinne als der natürliche oder normale Zustand der Atmosphäre bezeichnet werden, insofern bei zeitweiligem Vorhandensein des labilen Gleichgewichtszustandes stets solche Bewegungen entstehen werden, welche eine Rückkehr zu dem indifferenten Gleichgewichtszustande herbeiführen, während dem längeren Andauern des stabilen Gleichgewichtszustandes meistens die verhältnissmässig hohe Temperatur an der Erdoberfläche als Hinderniss sich entgegenstellen wird. Ueberhaupt ist der Zustand des indifferenten Gleichgewichtes als derjenige zu betrachten, welcher bei vollständigem Durcheinanderrühren der verschiedenen Luftschichten aus beliebig gegebenem Anfangszustande als jedesmaliger Endzustand hervorgehen würde. Befördert und begünstigt wird eine derartige Herbeiführung des indifferenten Gleichgewichtszustandes durch locale, von der strahlenden Sonnenwärme erzeugte labile Gleichgewichtszustände, insbesondere auch durch die Unebenheiten der Erdoberfläche, insofern durch dieselben den längs der letzteren sich verschiebenden Luftmassen stets verticale Bewegungscomponenten mitgetheilt werden.

§ 193.

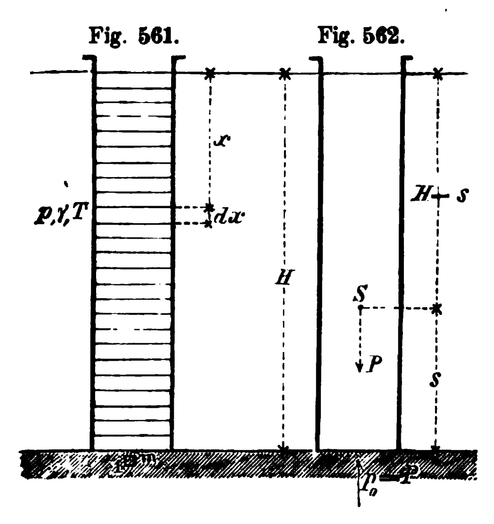
Höhe des Schwerpunktes einer verticalen Luftsäule.

Die mechanischen und thermischen Gleichgewichtsbedingungen der Atmosphäre kann man sich auf die in Fig. 561 angedeutete Weise veranschaulichen, indem man sich durch eine feste Cylinderfläche eine verticale Luftsäule aus der Atmosphäre herausgeschnitten, und diese Luftsäule durch bewegliche unendlich dünne gewichtlose Platten in unendlich viele Horizontalschichten von unendlich kleiner Höhe abgetheilt denkt. Wenn als Grundfläche dieser Säule ein Quadratmeter angenommen wird, so kann die der Tiefenzunahme dx entsprechende Druckzunahme:

$$1) \quad dp = \gamma \,.\, 1 \,.\, dx$$

als das Gewicht der zwischen zwei benachbarten Platten befindlichen Luftschicht angesehen werden.

Der Druck, welchen diese Luftschicht erleidet, ist gleich dem Gewichte des über derselben befindlichen Theiles der Luftsäule.



Dieser Druck ist vollkommen unabhängig von dem Gesetze, nach welchem die Temperatur und die Dichtigkeit mit der Höhe sich ändern, und würde auch dann noch dieselbe Grösse behalten, wenn der Luftsäule die in derselben enthaltene innere Wärme vollständig entzogen würde — in welchem Falle sämmtliche Platten nebst den zwischen denselben befindlichen (auf das Volumen Null reducirten) Luftschichten, platt auf dem Boden liegend, in der Grundfläche der Säule mit einander zusammenfallen würden.

Denkt man sich bei diesem letzteren Zustande der Luftsäule jeder einzelnen Schicht bei constantem Drucke des auf derselben lastenden Luftgewichts so viel Wärme zugeführt, bis dieselbe ihre ursprüngliche Temperatur und ihr ursprüngliches Volumen wieder erreicht hat, so ergiebt sich, dass das mechanische Aequivalent der auf solche Weise zugeführten Wärme-Quantität den ganzen in der Luftsäule enthaltenen Arbeitsvorrath repräsentirt. Dieser Arbeitsvorrath hat also die Grösse:

$$2)\quad \mathfrak{A} = \frac{c_p}{A}\int_0^{p_0} T\,dp.$$

Wenn man sich ein anderes Mal die Platten in ihrer ursprünglichen Lage unbeweglich festgehalten und wiederum der Luftsäule die ganze in derselben enthaltene innere Wärme entzogen denkt, so würde man für das mechanische Aequivalent der Wärme-Quantität, welche der Luftsäule nunmehr zugeführt werden müsste, um die ursprüngliche Temperatur überall wieder herzustellen — insofern die Wärmezuführung in diesem letzteren Falle bei constantem Volumen stattfinden würde — den folgenden Werth erhalten:

$$3)\quad U = \frac{c_v}{A} \int_0^{p_0} T\, dp.$$

Das Verhältniss der obigen beiden Arbeitsgrössen hat also den von dem Gesetze der Wärmevertheilung vollkommen unabhängigen Werth:

$$4)\quad \frac{\mathfrak{A}}{U} = \frac{c_p}{c_v} = k = 1{,}41.$$

Die Differenz der beiden Arbeitsgrössen $\mathfrak{A}$ und U ist als diejenige Arbeit anzusehen, welche zum Heben des ganzen Luftgewichtes $P = p_0$ auf die Schwerpunktshöhe s erforderlich sein würde (Fig. 562); folglich ist die Grösse:

$$5)\quad Ps = \mathfrak{A} - U = (k-1)\,U = \left(\frac{k-1}{k}\right)\mathfrak{A}$$

ebenfalls vollkommen unabhängig von dem Gesetze der Wärme-Vertheilung, oder von dem Gesetze, nach welchem die Temperatur mit der Höhe sich ändert. Durch eine Aenderung der Wärme-Vertheilung kann also niemals eine Höhen-Aenderung des Schwerpunktes hervorgebracht werden.

Ebensowenig kann bei der sich selbst überlassenen Luftsäule durch eine Aenderung der Massen-Vertheilung jemals eine bleibende Höhen-Aenderung des Schwerpunktes hervorgebracht werden. Die Annahme der Möglichkeit einer solchen Höhen-Aenderung würde vielmehr stets zu Widersprüchen führen. Denn bei dem Sinken des Schwerpunktes würde die Schwerkraft positive mechanische Arbeit verrichten, und in Folge dessen müsste die innere Wärme zunehmen, während nach Gleichung 5) mit dem Sinken des Schwerpunktes eine Abnahme der inneren Wärme verbunden sein würde. Bei dem Steigen des Schwerpunktes würde die Schwerkraft negative Arbeit verrichten, und in Folge dessen müsste die innere Wärme abnehmen, während nach Gleichung 5) mit dem Steigen des Schwerpunktes eine Zunahme der inneren Wärme verbunden sein würde. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Bei dem Uebergange der sich selbst überlassenen Luftsäule aus dem labilen (oder auch aus dem stabilen) Gleichgewichtszustande in den indifferenten Gleichgewichtszustand findet keine Höhen-Aenderung des Schwerpunktes statt, und wird daher von der Schwerkraft keine Arbeit verrichtet.

Während des Ueberganges kann ein Sinken und Steigen des Schwerpunktes stattfinden; nach vollzogenem Uebergange aber wird der Schwerpunkt wieder in derselben Höhe wie zu Anfang sich befinden.

Die Schwerpunktshöhe selbst würde man nach Gleichung 5) berechnen können, wenn eine von den beiden Grössen $\mathfrak{A}$ oder U bekannt wäre. Für den speciellen Fall einer Atmosphäre, deren Temperatur proportional der Tiefe x zunimmt, würde man nach der Gleichung 5) des vorigen Paragraphen (durch Verbindung derselben mit der Gleichung: $pv = RT$) für das Verhältniss der Temperaturen den Werth erhalten:

$$6)\quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}},$$

und wenn man nach Substitution des hieraus für T zu entnehmenden Werthes die in Gleichung 2) angedeutete Integration ausführt, so erhält man die Gleichung:

$$7)\quad \mathfrak{A} = \frac{c_p T_0 p_0}{A}^{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \int_0^{p_0} p^{\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)} dp, \quad \text{oder:}$$

$$8)\quad \mathfrak{A} = \frac{\varepsilon c_p T_0 p_0}{(2\varepsilon - 1) A}.$$

Hierin kann $p_0 = P$ gesetzt werden, und wenn man zugleich für T_0 den aus der Gleichung 11) des vorigen Paragraphen zu entnehmenden Werth einsetzt, so nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$9)\quad \mathfrak{A} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon - 1}\right) \frac{c_p}{AR} PH, \quad \text{oder:}$$

$$10)\quad \mathfrak{A} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon - 1}\right) \left(\frac{k}{k-1}\right) PH.$$

Nach Substitution dieses Ausdrucks erhält man aus Gleichung 5) für die Schwerpunktshöhe den Werth:

$$11)\quad s = \left(\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon - 1}\right) H.$$

Dem Werthe $\varepsilon = k$ entspricht der Fall des indifferenten Gleichgewichtszustandes, und für diesen Fall wird:

$$12)\quad s = \left(\frac{k-1}{2k-1}\right) H = 0{,}225 \,.\, H.$$

Nach Gleichung 17) des vorigen Paragraphen liegt also, wenn die Temperatur am unteren Ende der Luftsäule Null Grad Celsius beträgt, ihr Schwerpunkt in der Höhe:

$$13)\quad s = 0{,}225\,.\,27490 = 6190^{\text{m}}.$$

Für die obigen drei Arbeitsgrössen erhält man hiernach nach Gleichung 5), indem man $P = 10\,333$ Kil. setzt, die folgenden Werthe:

$$14)\quad Ps = 64\,000\,000^{\text{mk}},\quad \mathfrak{A} = 220\,000\,000^{\text{mk}},\quad U = 156\,000\,000^{\text{mk}}.$$

Bei einer Luftsäule von constanter Dichtigkeit würde diesen Arbeitswerthen die Höhe: $H' = 2s = 12\,380^{\text{m}}$ entsprechen, und da nach der Gleichung 12) des vorigen Paragraphen für diesen Fall $n = \frac{1}{29{,}27}$ zu setzen ist, so ergiebt sich für die Temperatur an der Basis derselben der Werth: $T_0' = 423°$ (oder + 150 Grad Celsius). Eine solche Luftsäule von constanter Dichtigkeit würde im Zustande des labilen Gleichgewichts sich befinden. Bei dem Uebergange in den indifferenten Gleichgewichtszustand würde die Höhe der ganzen Luftsäule von $12\,380^{\text{m}}$ bis auf $27\,490^{\text{m}}$ zunehmen; die Schwerpunktshöhe aber würde den Werth: $s = 6190^{\text{m}}$ unverändert beibehalten.

§ 194.

Grenzbedingungen für die Möglichkeit des Vorhandenseins einer Atmosphäre.

Die in § 192 gefundenen Gleichungen können zur Berechnung der Höhe, welche die Erdatmosphäre unter gewissen gegebenen Umständen annehmen würde, benutzt werden: so lange als die Atmosphärenhöhe H im Verhältniss zum Erdhalbmesser r sehr klein vorausgesetzt werden darf. Bei grösserer Atmosphärenhöhe würde auf die Veränderlichkeit der mit wachsendem Abstande vom Erdmittelpunkte abnehmenden Intensität der Schwerkraft Rücksicht genommen werden müssen, und für diesen Fall würde man der Gleichung 1) des § 192 die folgende Form zu geben haben:

$$1)\quad dp = -\gamma\frac{r^2}{\varrho^2}\,d\varrho.$$

Hierin bedeutet p den atmosphärischen Druck im Abstande ϱ vom Erdmittelpunkte, und γ das Gewicht, welches die Masse eines an dieser Stelle befindlichen Cubikmeters Luft gewogen an der Erdoberfläche besitzen würde. Man kann daher wieder $\gamma v = 1$ setzen, und wenn man mit Benutzung der in den Figuren 558

und 559 des § 192 angedeuteten Bezeichnungsweise: $v\,dp = -dF$ setzt, so erhält man die Gleichungen:

$$2)\quad dF = r^2 \frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

$$3)\quad F = r^2 \int_r^{r+H} \frac{d\varrho}{\varrho^2},$$

$$4)\quad F = r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+H}\right),$$

aus welcher letzteren für die Atmosphärenhöhe der folgende Werth sich ergiebt:

$$5)\quad H = \frac{F}{1 - \frac{F}{r}}.$$

Diese Gleichung gilt für die isolirt im Weltenraume schwebend gedachte Erdkugel unter der Voraussetzung, dass dieselbe keine Drehbewegung besitzt. Ausserdem ist die Gültigkeit der obigen Gleichung an die Bedingung geknüpft, dass die Masse der Atmosphäre sehr klein ist im Verhältniss zur Erdmasse, weil nur in diesem Falle die von der Atmosphäre selbst ausgeübte Gravitationswirkung gegen die von der Erdmasse ausgeübte Gravitationswirkung vernachlässigt werden darf. Im Uebrigen gilt die obige Gleichung für jede beliebig gegebene Zustandslinie der Atmosphäre und zeigt, dass die Höhe derselben unendlich gross wird, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$6)\quad F = r.$$

Für den speciellen Fall der dem indifferenten Gleichgewichtszustande entsprechenden adiabatischen Zustandslinie hat man hierin für F den in § 192 (Gleichung 13 und 14) gefundenen Ausdruck: $\frac{c_p T_0}{A}$ zu substituiren, und für diesen Fall erhält man die Bedingungsgleichung:

$$7)\quad c_p T_0 = Ar.$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck repräsentirt das Wärme-Aequivalent der mechanischen Arbeit, welche erforderlich sein würde, um 1 Kilogramm Luft von der Erdoberfläche bis zu unendlich grosser Höhe emporzuheben, und der linksseitige Ausdruck repräsentirt die Wärme-Quantität, welche diesem Luftkilogramm zugeführt werden müsste, um dasselbe bei

constantem Drucke von der absoluten Temperatur Null bis zur Temperatur der untersten Schicht zu erwärmen. Die obige Gleichung hätte daher auch direct aus dem in § 192 gefundenen Satze abgeleitet werden können.

Denkt man sich die Temperatur der Erdoberfläche allmählich zunehmend und in Folge dessen die Höhe der (aus einem idealen Gase bestehend vorausgesetzten) Atmosphäre allmählich grösser werdend, so erkennt man: dass in dem Augenblicke, wo die Oberflächentemperatur den Werth:

$$8)\quad T_0 = \frac{Ar}{c_p}$$

erreicht und überschreitet, die Möglichkeit der Existenz einer im indifferenten Gleichgewichtszustande befindlichen Atmosphäre ganz aufhören würde, insofern alsdann bei jeder, wenn auch noch so grossen, endlichen Höhe der Atmosphäre die Expansionsbewegung derselben immer noch weiter sich fortsetzen würde. Für gewöhnliche atmosphärische Luft erhält man aus der obigen Gleichung den Werth:

$$9)\quad T_0 = \frac{6\,370\,000}{0{,}2375\,.\,424} = 63\,257 \text{ Grad.}$$

Für Wasserstoff würde $c_p = 3{,}409$ zu setzen sein. Die Grenze der Oberflächentemperatur für die Möglichkeit der Existenz einer Wasserstoff-Atmosphäre entspricht daher dem Werthe:

$$10)\quad T_0 = \frac{6\,370\,000}{3{,}409\,.\,424} = 4407 \text{ Grad.}$$

Um für einen beliebigen anderen kugelförmigen Weltkörper, an dessen Oberfläche die Gravitationsbeschleunigung gleich Ng ist, und dessen Halbmesser λ-mal so gross ist als der Erdhalbmesser, die Atmosphärenhöhe zu berechnen, würde man resp. die Werthe $N\gamma$ statt γ, und λr statt r einzusetzen haben in Gleichung 1), welche alsdann die folgende Form annimmt:

$$11)\quad dp = -Ng\,\lambda^2 r^2 \frac{d\varrho}{\varrho^2}.$$

Wenn man hiernach die Rechnung auf dieselbe Weise wie oben fortsetzt, so erhält man für die Höhe der Atmosphäre die Gleichung:

$$12)\quad H = \frac{F}{N - \frac{F}{\lambda r}},$$

und für diejenige Oberflächentemperatur, bei welcher die Atmosphäre eine unendlich grosse Höhe annehmen würde, erhält man den Werth:

$$13)\quad T_0 = \frac{A N \lambda r}{c_p}.$$

Die auf solche Weise zu berechnende Grenztemperatur kann man die „Dispersionstemperatur“ des betreffenden Weltkörpers nennen, insofern beim Ueberschreiten dieser Temperaturgrenze die Gravitationskraft des Weltkörpers nicht mehr ausreichen würde, die Atmosphäre an denselben zu fesseln und eine „Zerstreuung“ derselben im unendlichen Raume zu verhindern. Wenn für eine bestimmte Gasart die Dispersionstemperatur der Erde bereits bekannt ist, so kann man, wie die obige Gleichung zeigt, für dieselbe Gasart die Dispersionstemperatur eines beliebigen anderen Weltkörpers berechnen, indem man den für die Erde gefundenen Werth mit dem Producte $N\lambda$ multiplicirt. Hiernach würde man z. B. für eine reine Wasserstoff-Atmosphäre die in der nachfolgenden Tabelle*) angegebenen Zahlenwerthe erhalten:

Weltkörper	N	λ	T_0
Erde . . .	1	1	4407
Mars . . .	0,382	0,540	909
Merkur . .	0,521	0,378	868
Mond . . .	0,164	0,273	197

Hieraus folgt: dass auf einem Weltkörper von der Grösse und Masse des Mondes die Existenz einer reinen Wasserstoff-Atmosphäre auf die Dauer nur dann möglich sein würde, wenn die Oberflächentemperatur derselben niedriger wäre als „minus 76 Grad Celsius“.

§ 195.

Temperatur der Luft im Innern des Erdkörpers.

Bei einer im indifferenten Gleichgewichtszustande befindlichen Luftsäule kann nach § 192 (Gleichung 18) die der Tiefenzunahme dx entsprechende Temperaturzunahme dT berechnet werden aus der Gleichung:

$$1)\quad c_p\, dT = A\, dx.$$

*) Der obigen Tabelle wurden die im „Annuaire du bureau des Longitudes“ vom Jahre 1879 angegebenen Zahlenwerthe zum Grunde gelegt.

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Grösse bedeutet die Wärme-Quantität, welche einem Kilogramm Luft bei constantem Drucke zugeführt werden müsste, um die Temperatur derselben von T bis $T + dT$ zu erhöhen, und die auf der rechten Seite stehende Grösse repräsentirt das Wärme-Aequivalent der mechanischen Arbeit:

$$2)\quad d\mathfrak{A} = 1 \,.\, dx,$$

welche das Gewicht des Luftkilogramms bei dem Sinken desselben von der Tiefe x bis zu der Tiefe $x + dx$ verrichten würde. Für eine Stelle, an welcher die Intensität der Schwerkraft $\mathfrak{v}$-mal so gross ist als an der Erdoberfläche, würde:

$$3)\quad d\mathfrak{A} = \mathfrak{v} \,.\, dx$$

zu setzen sein, und wenn mit ϱ der Abstand dieser Stelle vom Erdmittelpunkte bezeichnet wird, so kann man statt dessen auch setzen:

$$4)\quad d\mathfrak{A} = -\,\mathfrak{v}\, d\varrho.$$

Indem man diesen Ausdruck an die Stelle von dx setzt, erhält man für die Differenzialgleichung 1) die folgende allgemeinere Form:

$$5)\quad c_p dT = -\,A\mathfrak{v}\, d\varrho.$$

In dieser Form würde die Gleichung benutzt werden können zur Ableitung des Gesetzes, nach welchem im Inneren des Erdkörpers, z. B. in einem von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte reichenden Schachte, die Temperatur mit dem Abstande vom Mittelpunkte sich ändern würde, wenn die Wände des Schachtes für Wärme undurchdringlich wären, und wenn in demselben eine Luftsäule sich befände, welche oben an der Mündung des Schachtes mit der äusseren Atmosphäre communicirt. Wenn es zulässig wäre, die atmosphärische Luft auch in diesem Falle als ein ideales Gas zu behandeln, so würde man die dem Werthe $\varrho = 0$ entsprechende Temperatur $T = T_0$ am Boden des Schachtes (oder im Erdmittelpunkte) berechnen können aus der Gleichung:

$$6)\quad c_p \int_{T_0}^{T_1} dT = -\,A \int_0^r \mathfrak{v}\, d\varrho, \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad c_p\,(T_0 - T_1) = A \int_0^r \mathfrak{v}\, d\varrho,$$

indem man darin für T_1 die dem Werthe $\varrho = r$ entsprechende bekannte Temperatur an der Mündung des Schachtes (oder an

der Erdoberfläche) einsetzt. Die obige Gleichung enthält den folgenden Satz:

Die Wärme-Quantität, welche einem Luftkilogramm bei constantem Drucke zugeführt werden müsste, um die Temperatur desselben von der Oberflächentemperatur T_1 bis zur Mittelpunktstemperatur T_0 zu erhöhen, ist gleich dem Wärme-Aequivalente der mechanischen Arbeit, welche erforderlich sein würde, um das Luftkilogramm vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche emporzuheben.

Die Grösse dieser mechanischen Arbeit kann man auf die in Fig. 563 angedeutete Art ermitteln, indem man das Gesetz, nach welchem die Grösse:

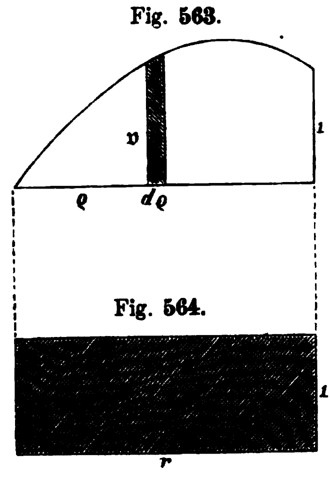


Fig. 563.

Fig. 564.

$$8)\quad \mathfrak{v} = f(\varrho)$$

mit dem Abstande ϱ sich ändert, durch eine Curve geometrisch dargestellt und den Flächeninhalt:

$$9)\quad F = \int_0^r \mathfrak{v}\, d\varrho,$$

der von dieser Curve begrenzten Fläche berechnet. Bei constanter Intensität der Schwerkraft würde diese Fläche die in Fig. 564 dargestellte Form einer Rechteckfläche vom Flächeninhalte $r \,.\, 1$ annehmen. Wenn das Verhältniss der Fläche F zu dieser Rechteckfläche mit α bezeichnet wird, so kann:

$$10)\quad F = \int_0^r \mathfrak{v}\, d\varrho = \alpha r$$

gesetzt werden, und nach Substitution dieses Ausdrucks erhält man für die Mittelpunktstemperatur die Gleichung:

$$11)\quad c_p\,(T_0 - T_1) = A \alpha r.$$

Wenn die Erde als eine homogene Kugel angesehen werden dürfte, so würde $\alpha = \frac{1}{2}$ zu setzen sein; denn für diesen Fall wird $\mathfrak{v} = \frac{\varrho}{r}$ und:

$$12)\quad F = \int_0^r \frac{\varrho}{r}\, d\varrho = \frac{r}{2}.$$

Da jedoch in Wirklichkeit die Dichtigkeit der Erdmasse von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte zunimmt, so ist $\alpha > \frac{1}{2}$, und annäherungsweise kann $\alpha = \frac{3}{4}$ gesetzt werden. Hiernach erhält man aus der obigen Gleichung, indem man zugleich $T_1 = 273°$ setzt, für die Mittelpunktstemperatur den Werth:

$$13)\quad T_0 = 47\,716 \text{ Grad.}$$

Bei dem hier vorausgesetzten indifferenten (oder adiabatischen) Gleichgewichtszustande der Luftsäule würde zur Berechnung des Druckes der Luft am Boden des Schachtes die Poisson'sche Gleichung:

$$14)\quad \frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{3,44}$$

benutzt werden können, nach welcher der obigen Temperatur ein Druck von etwa 52 Millionen Atmosphären entsprechen würde, und nach der Mariotte-Gay-Lussac'schen Gleichung: $\frac{p}{\gamma} = RT$ würde den obigen Werthen von T_0 und p_0 der Werth: $\gamma_0 = 383\,000$ Kilogramm entsprechen.

§ 196.

Gasförmige Weltkörper.

Unter Voraussetzung des adiabatischen oder indifferenten Gleichgewichtszustandes würde man den im vorigen Paragraphen gefundenen Satz zur Berechnung der Temperatur im Erdmittelpunkte auch dann noch benutzen können, wenn die Erdmasse ganz aus atmosphärischer Luft bestände. Da die absolute Temperatur an der Oberfläche einer solchen Luftkugel gleich Null sein würde, so ist für diesen Fall $T_1 = 0$ zu setzen, und die Mittelpunktstemperatur zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad c_p T_0 = A \alpha r,$$

in welcher für die im vorigen Paragraphen definirte Grösse α derjenige numerische Werth einzusetzen ist, welcher dem für den vorliegenden Fall sich ergebenden Gesetze der Dichtigkeitsänderung im Inneren der Kugel entspricht.

In der obigen Gleichung bedeutet $c_p T_0$ die bei constantem Drucke zum Hervorbringen der Temperaturerhöhung von Null bis

T_0 erforderliche Wärme-Quantität für diejenige Luftmasse, welche an der Erdoberfläche ein Kilogramm wiegen würde, und die Grösse $A\alpha r$ bedeutet das Wärme-Aequivalent derjenigen Arbeit, welche zum Emporheben dieser Masse vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche erforderlich sein würde. Wenn die Fallbeschleunigung an der Oberfläche der Kugel gleich Ng (statt gleich g) wäre, so müsste auf der rechten Seite noch der Factor N hinzugefügt werden; für diesen Fall würde also die Mittelpunktstemperatur zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$2)\quad c_p T_0 = A\alpha N r,$$

in welcher r den nunmehr beliebig zu wählenden Halbmesser der Kugel bedeutet.

Denkt man sich dieselbe Kugel ein anderes Mal in einem anderen adiabatischen Gleichgewichtszustande, welchem statt der Werthe: T_0, r, N resp. die Werthe T_0', r', N' entsprechen würden, so erhält man für diesen neuen Zustand die Gleichung:

$$3)\quad c_p T_0' = A\alpha N' r',$$

in welcher für die Grösse α genau derselbe numerische Werth einzusetzen sein wird wie bei dem vorigen Zustande, weil das Gesetz der Massenvertheilung dasselbe geblieben ist, insofern der neue Zustand ebenfalls als indifferenter oder adiabatischer Gleichgewichtszustand vorausgesetzt werden sollte. Indem man die letztere Gleichung durch die vorhergehende dividirt, gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$4)\quad \frac{T_0'}{T_0} = \frac{N' r'}{N r}.$$

Da bei Weltkörpern von gleichen Massen die Fallbeschleunigungen an den Oberflächen umgekehrt wie die Quadrate der Halbmesser sich verhalten, so kann hierin:

$$5)\quad \frac{N'}{N} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

gesetzt werden, und nach Substitution dieses Werthes nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$6)\quad \frac{T_0'}{T_0} = \frac{r}{r'}, \quad \text{oder:} \quad T_0' r' = T_0 r,$$

in welcher dieselbe den folgenden Satz ausdrückt:

Wenn in Folge von Wärme-Zuführung oder Wärme-Entziehung der Halbmesser eines gasförmigen Weltkörpers eine Aenderung erleidet, so wird die Mittel-

punktstemperatur ebenfalls eine Aenderung erleiden; aber „das Product aus dem Halbmesser in die Mittelpunktstemperatur bleibt constant“.

Da jede Wärme-Entziehung eine Volumen-Verminderung, und jede Wärme-Zuführung eine Volumen-Vergrösserung bedingt, so ergiebt sich aus obiger Gleichung zugleich der folgende Satz:

Die specifische Wärme einer kosmischen Gaskugel ist negativ.

Eine Temperatur-Erhöhung kann immer nur durch Wärme-Entziehung, und eine Temperatur-Erniedrigung immer nur durch Wärme-Zuführung hervorgebracht werden. Bei der durch Wärme-Entziehung bedingten Contraction verrichtet die Gravitationskraft eine positive mechanische Arbeit, welche sogleich in Wärme umgewandelt wird. Die erzeugte Wärme-Quantität zerlegt sich dabei in zwei Theile, von denen der eine Theil jene entzogene Wärme-Quantität bildet, während der andere Theil auf Temperatur-Erhöhung des Weltkörpers selbst verwendet wird. Bei der durch Wärme-Zuführung hervorgebrachten Expansion wird nicht nur die zugeführte Wärme-Quantität, sondern ausserdem noch ein Theil der inneren Wärme des Weltkörpers in Arbeit umgewandelt und auf die zur Ueberwindung der Gravitationskraft erforderliche Expansionsarbeit verwendet. Wenn die Sonne als eine solche im adiabatischen Gleichgewichtszustande befindliche ideale Gaskugel betrachtet werden dürfte, so würde aus dem oben gefundenen Satze zu folgern sein, dass die gegenwärtige Mittelpunktstemperatur derselben etwa das Sechstausendfache beträgt von derjenigen Mittelpunktstemperatur, welche die Sonne besass zu der Zeit, als dieselbe nach der Kant-Laplace'schen Hypothese bis zur Neptunsbahn sich erstreckte.

§ 197.

Verhältniss des Potentials zur inneren Wärme des gasförmigen Weltkörpers.

Die mechanische Arbeit, welche erforderlich sein würde, um eine Masse m von der Erdoberfläche bis zu unendlicher Höhe emporzuheben, ist eben so gross wie diejenige mechanische Arbeit, welche bei constant bleibender Schwerkraft zum Heben jener Masse auf eine dem Erdhalbmesser gleiche Höhe erforderlich sein würde*), und hat die Grösse:

*) Vergl. „Analytische Mechanik“ (2. Aufl.), § 45, Gleichung 9).



1) $\mathfrak{a} = mgr.$

Eben so gross ist auch diejenige Arbeit, welche die Gravitationskraft ihrerseits verrichten würde, wenn die Masse m aus unendlicher Höhe auf die Erdoberfläche herabsänke.

Hiernach erhält man unter Berücksichtigung des Umstandes: dass in einer aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzten Kugel irgend ein im Abstande ϱ vom Mittelpunkte befindliches Massenelement dM nur von Seiten der im Inneren der Kugel vom Halbmesser ϱ befindlichen Masse eine Anziehung erleidet, für diejenige mechanische Arbeit, welche die Gravitationskraft bei dem Uebergange der Massentheilchen der Kugel aus unendlicher Entfernung in die gegebene Lage verrichtet haben würde, oder für das Potential der Kugel bezogen auf die eigene Masse derselben, die Gleichung:

2) $$\mathfrak{A} = \int dM \cdot \mathfrak{g} \cdot \varrho,$$

in welcher $\mathfrak{g}$ die Gravitationsbeschleunigung im Abstande ϱ vom Mittelpunkte bei dem gegebenen Endzustande der Kugel bedeutet. Wenn mit θ die Dichtigkeit im Abstande ϱ vom Mittelpunkte bezeichnet wird, so kann hierin:

3) $$dM = 4\pi\varrho^2\, d\varrho \cdot \theta$$

gesetzt werden, und nach Substitution dieses Ausdrucks erhält man für das Potential die Gleichung:

4) $$\mathfrak{A} = 4\pi \int_0^r \theta\, \mathfrak{g}\, \varrho^3\, d\varrho.$$

Mit dem gegebenen Dichtigkeitsänderungsgesetze: $\theta = f(\varrho)$ ist zugleich das Gesetz gegeben, nach welchem die Grösse $\mathfrak{g}$ als Function von ϱ im Inneren der Kugel sich ändert; ebenso auch das Druckänderungsgesetz, für welches letztere die der Gleichung 1) des § 190 analog gebildete Differenzialgleichung gilt:

5) $$dp = -\theta\, \mathfrak{g}\, d\varrho,$$

und nach Substitution des hieraus für das Product $\theta\mathfrak{g}$ zu entnehmenden Werthes kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

6) $$\mathfrak{A} = -4\pi \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} \varrho^3\, dp.$$

Indem man diese Gleichung partiell integrirt, gelangt man — unter Berücksichtigung des Umstandes, dass an der Oberfläche $p = 0$ und im Mittelpunkte $\varrho = 0$ ist — zu den folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \mathfrak{A} = -4\pi\left\{\left[\varrho^3 p\right]_{\varrho=0}^{\varrho=r} - 3\int_0^r p\,\varrho^2\,d\varrho\right\},$$

$$8)\quad \mathfrak{A} = 12\pi\int_0^r p\,\varrho^2\,d\varrho.$$

Wie auch immer das gegebene Dichtigkeitsgesetz: $\theta = f(\varrho)$ beschaffen sein möge: immer kann man sich eine im Gleichgewichtszustande befindliche Gaskugel denken, deren Masse genau nach demselben Gesetze in dem Kugelraume vertheilt ist. Denn in jeder von den einzelnen concentrischen Massenschichten derselben kann man sich bei der daselbst gegebenen Dichtigkeit durch Zuführung oder Entziehung der entsprechenden Wärme-Quantität jeden beliebigen vorgeschriebenen Druck hervorgebracht denken, folglich auch denjenigen Druck, welcher den Gleichgewichtsbedingungen der Gaskugel entspricht. Die in Meterkilogrammen ausgedrückte innere Wärme, welche die oben untersuchte Kugel als Gaskugel besitzen würde, ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$9)\quad U = \frac{c_v}{A}\int dM\,g\,T = \frac{4\pi c_v}{A}\int_0^r \theta\,g\,T\varrho^2\,d\varrho,$$

in welcher T die absolute Temperatur im Abstande ϱ vom Mittelpunkte bedeutet. Nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze kann hierin: $\theta\,g\,T = \frac{p}{R}$ gesetzt werden; folglich ist:

$$10)\quad U = \frac{4\pi c_v}{AR}\int_0^r p\,\varrho^2\,d\varrho,$$

und da: $AR = c_p - c_v = c_v\,(k-1)$ ist, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$11)\quad U = \frac{4\pi}{k-1}\int_0^r p\,\varrho^2\,d\varrho.$$

Aus den beiden Gleichungen 8) und 11) erhält man nunmehr für das Verhältniss der beiden Arbeitsgrössen $\mathfrak{A}$ und U den Werth:

$$12)\quad \frac{\mathfrak{A}}{U} = 3\,(k-1).$$

Das Potential einer beliebigen aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzten Kugel ist also stets $3\,(k-1)$-mal so gross als das mechanische Aequivalent der inneren Wärme, welche jene Kugel als eine im Gleichgewichtszustande befindliche Gaskugel besitzen würde.

Hieraus folgt, dass bei dem Uebergange einer Gaskugel aus einem Gleichgewichtszustande in einen anderen Gleichgewichtszustand die Gravitationskraft nur dann Arbeit verrichten kann, wenn zugleich eine Wärme-Abgabe oder -Zuführung stattfindet. Denn ohne eine solche Wärme-Uebertragung müsste nach den Principien der mechanischen Wärmetheorie die innere Wärme der Gaskugel genau um das Wärme-Aequivalent der Gravitationsarbeit zunehmen, wobei das Verhältniss der beiden Arbeits-Grössen $\mathfrak{A}$ und U eine Aenderung erleiden würde (wenn $k > \frac{4}{3}$ ist, wie hier vorausgesetzt werden soll). Dem in § 193 gefundenen Satze kann man daher die folgende allgemeinere Form geben:

Bei dem Uebergange einer Gaskugel aus einem beliebigen Zustande des labilen (oder auch des stabilen) Gleichgewichts in den Zustand des indifferenten Gleichgewichts wird von der Gravitationskraft keine Arbeit verrichtet, wenn während des Ueberganges weder Wärme-Abgabe noch Wärme-Aufnahme stattfindet.

§ 198.

Potential des gasförmigen Weltkörpers.

Wenn mit S die ganze Masse des gasförmigen Weltkörpers, und mit Ng die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche desselben bezeichnet wird, so ist nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze die im vorigen Paragraphen mit $\mathfrak{g}$ bezeichnete Gravitationsbeschleunigung im Abstande ϱ vom Mittelpunkte zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad \frac{\mathfrak{g}}{Ng} = \frac{M}{S} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2},$$

und wenn man die Verhältnisszahl $\frac{\mathfrak{g}}{g}$ wieder mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so kann man dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$2)\quad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{g}}{g} = N \cdot \frac{M}{S} \cdot \frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Nach Substitution dieses Ausdrucks erhält man aus der Gleichung 5) des § 195 für die der Abstandszunahme $d\varrho$ entsprechende Temperaturzunahme dT den Werth:

$$3)\quad dT = -\frac{A N r^2}{c_p S} \cdot \frac{M d\varrho}{\varrho^2}.$$

Wenn als Einheit für die Massengrössen diejenige Masse gewählt wird, welche an der Erdoberfläche 1 Kilogramm wiegt, so hat das mechanische Aequivalent der inneren Wärme des gasförmigen Weltkörpers die Grösse:

$$4)\quad U = \frac{c_v}{A} \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} T\, dM.$$

Indem man diese Gleichung partiell integrirt und dabei berücksichtigt, dass sowohl für $\varrho = 0$ als auch für $\varrho = r$ das Product TM den Werth Null annimmt, gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$5)\quad U = \frac{c_v}{A} \left\{ 0 - \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} M\, dT \right\},$$

und wenn man hierin für dT den oben gefundenen Werth einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$6)\quad U = \frac{N r^2}{k S} \int_0^r \frac{M^2\, d\varrho}{\varrho^2},$$

aus welcher man durch abermalige partielle Integration die folgende Gleichung ableiten kann:

$$7)\quad U = \frac{N r^2}{k S} \left\{ -\frac{S^2}{r} + 2 \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} \frac{M\, dM}{\varrho} \right\}.$$

Für das Potential des gasförmigen Weltkörpers erhält man nach der hier gewählten Bezeichnungsweise aus der Gleichung 2) des vorigen Paragraphen den Ausdruck:

$$8)\quad \mathfrak{A} = \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} \mathfrak{v}\, \varrho\, dM,$$

welchem man nach Substitution des oben für $\mathfrak{v}$ angegebenen Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$9)\quad \mathfrak{A} = \frac{N r^2}{S} \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} \frac{M\,dM}{\varrho}.$$

Indem man den hieraus für das Integral zu entnehmenden Ausdruck in Gleichung 7) einsetzt, erhält man für U die Gleichung:

$$10)\quad U = -\frac{N r S}{k} + \frac{2\mathfrak{A}}{k},$$

und nach Substitution des aus der Gleichung 12) des vorigen Paragraphen für U zu entnehmenden Ausdrucks erhält man aus der obigen Gleichung für das Potential den Werth:

$$11)\quad \mathfrak{A} = \left(\frac{3k-3}{5k-6}\right) N r S.$$

Da der Werth des Potentials nur von dem Gesetze der Massenvertheilung abhängen kann, so ist die Gültigkeit dieser Gleichung ganz unabhängig von der dem Buchstaben k beigelegten Bedeutung. Die obige Gleichung bleibt daher auch dann noch gültig, wenn an die Stelle der constanten Grösse k irgend eine andere constante Grösse ε gesetzt wird. Das Potential einer Kugel, deren Massenvertheilungsgesetz der Gleichung: $p v^{\varepsilon} =$ Const. entspricht, kann daher immer berechnet werden mittelst der Gleichung:

$$12)\quad \frac{\mathfrak{A}}{N r S} = \frac{3\varepsilon - 3}{5\varepsilon - 6} = \beta,$$

aus welcher man für den Potentialcoefficienten β und den Exponenten ε z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe erhält:

$\varepsilon =$	∞	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	1,41	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$
$\beta =$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{7}$	1	1,17	$\frac{3}{2}$	3	∞

Nach der Gleichung 12) des vorigen Paragraphen hat die in Meterkilogrammen ausgedrückte innere Wärme die Grösse:

$$13)\quad U = \frac{\mathfrak{A}}{3k-3} = \frac{N r S}{5k-6}.$$

Für die in Wärme-Einheiten ausgedrückte innere Wärme, welche durchschnittlich in jedem Massenkilogramm enthalten ist, ergiebt sich hiernach der Werth:

$$14) \quad W = \frac{AU}{S} = \frac{ANr}{5k-6}.$$

Die ganze durch die Gravitationsarbeit während der Contraction erzeugte Wärme hat pro Massenkilogramm die Grösse:

$$15) \quad Q = \frac{A\mathfrak{A}}{S} = \left(\frac{3k-3}{5k-6}\right) ANr.$$

Die Differenz der obigen beiden Werthe repräsentirt diejenige Wärme-Quantität, welche während der Contraction nach aussen abgegeben wurde, und hat die Grösse:

$$16) \quad Q - W = \left(\frac{3k-4}{5k-6}\right) ANr.$$

Hiernach würde man z. B. für eine Gaskugel von der Grösse und Masse der Sonne, indem man $k = 1{,}41$, $A = \frac{1}{424}$, $N = 27{,}4$ und $r = 688\,000\,000^m$ setzt, die folgenden Werthe erhalten:

$Q = 52\,000\,000$, $W = 42\,000\,000$, $Q - W = 10\,000\,000$ Wärme-Einheiten.

Wenn also die Sonne selbst als eine solche im indifferenten Gleichgewichtszustande befindliche ideale Gaskugel betrachtet werden dürfte, so würde hieraus folgen: dass gegenwärtig in jedem Massenkilogramm der Sonne durchschnittlich 42 000 000 Wärme-Einheiten enthalten sind. Da der Halbmesser der Neptunsbahn etwa 6000-mal so gross ist als der gegenwärtige Sonnenhalbmesser, so würde zugleich aus dem im vorigen Paragraphen gefundenen Satze sich ergeben, dass zu der Zeit, als die Sonnenmasse bis zur Neptunsbahn sich erstreckte, jedes Massenkilogramm durchschnittlich nur den 6000-sten Theil von der gegenwärtig in demselben vorhandenen inneren Wärme enthielt, dass also seit jener Zeit die in jedem Massenkilogramm durchschnittlich enthaltene Wärme-Quantität von 7000 bis auf 42 000 000 Wärme-Einheiten zugenommen hat.

Wenn $N = N_0$ der Werth ist, welcher dem Werthe $r = r_0$ entspricht, so ist nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze:

$$17) \quad \frac{N}{N_0} = \frac{r_0^2}{r^2}$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für N zu entnehmenden Werthes kann man der Gleichung 16), indem man die Grösse $Q - W = \mathfrak{W}$ setzt, die folgende Form geben:

$$18) \quad \mathfrak{W} = \left(\frac{3k-4}{5k-6}\right) \frac{AN_0 r_0^2}{r}.$$

Indem man diese Gleichung nach der Zeit t differenziirt, erhält man für die pro Zeiteinheit — z. B. während eines Jahres — von jedem Massenkilogramm durchschnittlich abgegebene Wärmequantität den Werth:

$$19)\quad \frac{d\mathfrak{W}}{dt} = -\left(\frac{3k-4}{5k-6}\right)\frac{AN_0r_0^2}{r^2}\,\frac{dr}{dt}.$$

Wenn mit σ die jährliche Abnahme des Sonnenhalbmessers und mit $\mathfrak{w}$ die von der Sonne jährlich pro Massenkilogramm ausgestrahlte Wärme-Quantität bezeichnet wird, so ist $\sigma = -\frac{dr}{dt}$ und $\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{W}}{dt}$ zu setzen. Nach Substitution dieser Werthe kann man der obigen Gleichung, indem man zugleich für die Grösse N_0 den aus Gleichung 17) zu entnehmenden Ausdruck einsetzt, die folgende Form geben:

$$20)\quad \sigma = \left(\frac{5k-6}{3k-4}\right)\frac{\mathfrak{w}}{AN}.$$

Da nach neueren Untersuchungen $\mathfrak{w} = 2$ zu setzen ist, so würde man hieraus nach den oben gemachten Voraussetzungen für die jährliche Abnahme des Sonnenhalbmessers den folgenden Werth erhalten:

$$21)\quad \sigma = \left(\frac{5\,.\,1{,}41-6}{3\,.\,1{,}41-4}\right)\frac{2}{\frac{1}{424}\cdot 27{,}4} = 141 \text{ Meter.}$$

§ 199.

Temperatur-Erhöhung an der Vorderfläche eines in atmosphärischer Luft sich bewegenden Körpers.

Der Widerstand der Luft gegen einen mit der Geschwindigkeit u in derselben sich bewegenden Körper kann berechnet werden aus der Gleichung:

$$1)\quad W = \theta F \varphi(u),$$

in welcher F die rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung genommene grösste Querschnittsfläche des Körpers, θ die Dichtigkeit der Luft und $\varphi(u)$ eine noch näher zu bestimmende Function der Geschwindigkeit u bedeutet. Indem man die obige Gleichung durch F dividirt, erhält man für den mittleren Widerstand oder Gegendruck pro Flächeneinheit der Fläche F den Werth:

$$2)\quad p' = \frac{W}{F} = \theta\,\varphi(u).$$

Nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze ist die Dichtigkeit der Luft bei der absoluten Temperatur T und dem Drucke p zu berechnen aus der Gleichung:

$$3)\quad \theta g = \gamma = \frac{p}{RT},$$

und nach Substitution des hieraus für θ zu entnehmenden Werthes kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben

$$4)\quad \frac{p'}{p} = \frac{\varphi(u)}{g R T}.$$

Bei sehr grosser Geschwindigkeit des bewegten Körpers darf angenommen werden, dass an der Rückseite desselben der Luftdruck gleich Null ist. In obiger Gleichung bedeutet daher p' den Druck der comprimirten Luft an der Vorderfläche des bewegten Körpers, und p den Druck der nicht comprimirten Luft in der Umgebung desselben. Wenn man für die Constanten g und R ihre numerischen Werthe einsetzt, so erhält man für das Verhältniss jener beiden Drücke den Werth:

$$5)\quad \frac{p'}{p} = 0{,}003\,486 \cdot \frac{\varphi(u)}{T}.$$

Nach den Versuchen von St. Robert ist bei sehr grossen Geschwindigkeiten (für Körper von annähernd kugelförmiger Gestalt) die Geschwindigkeitsfunction:

$$6)\quad \varphi(u) = 0{,}2936 \,.\, u^2 \left\{1 + \left(\frac{u}{296}\right)^2\right\}$$

zu setzen, wenn die Geschwindigkeit u in Metern pro Secunde ausgedrückt wird, und nach Substitution dieses Ausdrucks nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$7)\quad \frac{p'}{p} = 0{,}001\,023\,5 \cdot \frac{u^2}{T} \left\{1 + \left(\frac{u}{696}\right)^2\right\}.$$

Wenn man hierin z. B. $u = 72\,000^{\mathrm{m}}$ setzt, so erhält man für das Verhältniss der beiden Drücke den Werth:

$$8)\quad \frac{p'}{p} = \frac{56\,786\,000\,000}{T}.$$

Diesem Druckverhältniss entspricht nach dem Poisson'schen Gesetze das Temperaturverhältniss:

$$9)\quad \frac{T'}{T} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{56\,786\,000\,000}{T}\right)^{\frac{1{,}41-1}{1{,}41}},$$

und für die Temperatur der Luft an der Vorderfläche des Körpers ergiebt sich hieraus der Werth:

$$10)\quad T' = 1337{,}3 \,.\, T^{\frac{1}{1{,}41}}.$$

Wenn man also z. B. annimmt, dass ein in die Erdatmosphäre eindringender Meteorit eine Stelle, an welcher die absolute Tempe-

ratur der Luft 10 Grad beträgt, mit einer Geschwindigkeit von 72 000 Metern erreicht, so erhält man für die absolute Temperatur an der Vorderfläche desselben den Werth:

$$11)\quad T' = 1337{,}3 \,.\, 10^{\frac{1}{1{,}41}} = 6850 \text{ Grad},$$

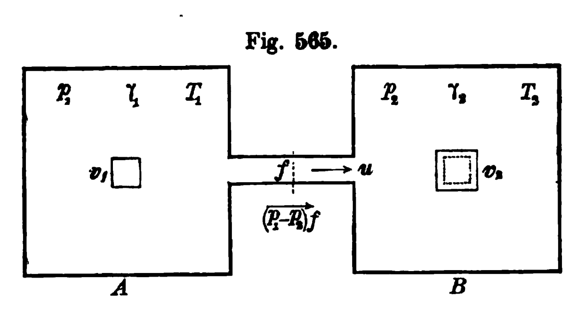
d. h. die nach dem Celsius'schen Thermometer gemessene Temperatur steigt von — 263 bis auf + 6577 Grad.

§ 200.

Ausflussgeschwindigkeit der Luft.

Wenn zwei mit Luft gefüllte Gefässe A und B durch ein Communicationsrohr mit einander verbunden sind, und der Druck p_1 in dem Gefässe A grösser ist als der Druck p_2 in dem Gefässe B, so wird ein Ausströmen der Luft von A nach B stattfinden (Fig. 565). Die Geschwindigkeit des Ausströmens kann nach dem Principe der lebendigen Kraft berechnet werden, insofern man annehmen darf, dass nach eingetretenem Beharrungszustande die ganze während des Zeittheilchens dt von den wirkenden Kräften verichtete mechanische Arbeit dazu verwendet wird, der während dieses Zeittheilchens ausfliessenden Luftmasse dM die der Ausflussgeschwindigkeit entsprechende lebendige Kraft mitzutheilen.

Fig. 565.



Wenn mit f der Querschnitt des Ausflussrohres, und mit u die dem Beharrungszustande entsprechende Ausflussgeschwindigkeit bezeichnet wird, so ist $f \,.\, u\, dt$ der Rauminhalt der während des Zeittheilchens dt ausfliessenden Luftmasse, und wenn man einstweilen annimmt, dass die Dichtigkeit der Luft bei dem Uebergange aus dem grösseren Drucke p_1 in den kleineren Druck p_2 sich nicht ändert — was bei geringer Grösse der Druckdifferenz annäherungsweise zulässig ist — so ergiebt sich für die in der Zeit dt ausfliessende Luftmasse der Werth:

$$1)\quad dM = \frac{\gamma_1 \,.\, f u\, dt}{g}.$$

Diese Luftmasse hatte in dem Gefässe A die Geschwindigkeit Null und erlangt bei dem Ausflusse in das Gefäss B die Geschwindigkeit u. Die während des Zeittheilchens dt erzeugte lebendige Kraft hat also die Grösse:

$$2)\quad \frac{dM \cdot u^2}{2} = \frac{\gamma_1 f u\, dt}{g} \cdot \frac{u^2}{2}.$$

Indem man diese lebendige Kraft der von dem Druck-Ueberschusse $(p_1 - p_2)f$ während des Zeittheilchens dt verrichteten mechanischen Arbeit gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$3)\quad \frac{\gamma_1 f u\, dt}{g} \cdot \frac{u^2}{2} = (p_1 - p_2) f \cdot u\, dt, \quad \text{oder:}$$

$$4)\quad u = \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)},$$

welcher man nach Substitution des aus § 177, Gleichung 12), für den Quotienten $\frac{p_1}{\gamma_1}$ zu entnehmenden Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$5)\quad u = \sqrt{2 g R T_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)}.$$

Wenn z. B. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{0,760}{0,880}$ gesetzt wird, und $T_1 = 295$ (entsprechend einer Temperatur von $+22^0$ Celsius), so ergiebt sich für die Ausflussgeschwindigkeit der Werth:

$$6)\quad u = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 29,27 \cdot 295 \left(1 - \frac{0,760}{0,880}\right)} = 152^{\mathrm{m}}.$$

In Gleichung 3) bedeutet der Ausdruck auf der linken Seite die während des Zeittheilchens dt erzeugte lebendige Kraft, und der Ausdruck auf der rechten Seite die während dieses Zeittheilchens von der Druckdifferenz verrichtete mechanische Arbeit. Das Gewicht der während des Zeittheilchens dt ausströmenden Luftmasse hat nach Gleichung 1) die Grösse:

$$7)\quad dM \cdot g = \gamma_1 f u\, dt.$$

Indem man jene Gleichung durch diese letztere Grösse dividirt, erhält man die Gleichung:

$$8)\quad \frac{u^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma_1},$$

in welcher nunmehr der Ausdruck für die erzeugte lebendige Kraft und der Ausdruck für die verrichtete mechanische Arbeit auf denjenigen Zeitraum sich beziehen, in welchem ein Kilogramm

Luft ausfliesst. Es wird jedoch der Ausdruck auf der rechten Seite nur dann annäherungsweise die ganze während dieses Zeitraumes von den wirkenden Kräften verrichtete mechanische Arbeit darstellen, wenn die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ so klein ist, dass die bei dem Ausflusse stattfindende Dichtigkeitsänderung des ausfliessenden Luftkilogrammes vernachlässigt werden darf. Um eine genauere Gleichung für die Ausflussgeschwindigkeit zu erhalten, hat man zu dem auf der rechten Seite stehenden Ausdrucke für die mechanische Arbeit noch eine Grösse hinzu zu addiren, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann.

Nach § 181 verrichtet ein Kilogramm Luft, wenn dasselbe ohne Wärme-Zuführung von dem Rauminhalte v_1 auf den Rauminhalt v_2 sich ausdehnt und die Temperatur desselben in Folge dieser Ausdehnung von T_1 bis auf T_2 abnimmt, die mechanische Arbeit:

$$9) \quad \mathfrak{A} = \frac{c_v}{A}(T_1 - T_2),$$

wofür man nach § 179, indem man für die Grösse A ihren Werth substituirt, auch setzen kann:

$$10) \quad \mathfrak{A} = \frac{c_v R (T_1 - T_2)}{c_p - c_v}, \quad \text{oder:}$$

$$11) \quad \mathfrak{A} = \frac{R (T_1 - T_2)}{k - 1}.$$

Diese mechanische Arbeit kann man sich in zwei Theile zerlegt denken, von denen der eine Theil:

$$12) \quad \mathfrak{A}' = p_2 (v_2 - v_1)$$

auf Ueberwindung des constanten Gegendruckes p_2 verwendet wird, während der andere Theil:

$$13) \quad \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}' = \frac{R (T_1 - T_2)}{k - 1} - p_2 (v_2 - v_1)$$

mit dazu beiträgt, die lebendige Kraft der ausfliessenden Luftmasse zu vergrössern. Da als Gewicht dieser Luftmasse 1 Kilogramm angenommen wurde, so ist: $\gamma_1 v_1 = 1 = \gamma_2 v_2$ zu setzen. Man kann daher dem obigen Ausdrucke auch die folgende Form geben:

$$14) \quad \mathfrak{A}'' = \frac{R (T_1 - T_2)}{k - 1} - p_2 \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1}\right).$$

Wenn man diese Grösse in Gleichung 8) zu dem auf der rechten Seite stehenden Ausdrucke für die mechanische Arbeit hinzufügt, so erhält man die Gleichung:

$$15) \quad \frac{u^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} + \frac{R(T_1 - T_2)}{k-1}.$$

Nach § 177 ist hierin $\frac{p_1}{\gamma_1} = RT_1$ und $\frac{p_2}{\gamma_2} = RT_2$ zu setzen; man kann daher dieser Gleichung auch die folgende Form geben:

$$16) \quad \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{k}{k-1}\right) R T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

und wenn man hierin für den Quotienten $\frac{T_2}{T_1}$ den aus § 180 zu entnehmenden Ausdruck substituirt, so ergiebt sich aus der obigen Gleichung für die Ausflussgeschwindigkeit u der Werth:

$$17) \quad u = \sqrt{2g\left(\frac{k}{k-1}\right) R T_1 \left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right\}}.$$

Mit Beibehaltung der oben angenommenen Zahlenwerthe erhält man aus dieser Gleichung für die Ausflussgeschwindigkeit den genaueren Werth:

$$18) \quad u = \sqrt{2 \, . \, 9{,}81 \cdot \left(\frac{1{,}41}{1{,}41 - 1}\right) \cdot 29{,}27 \, . \, 295 \left\{1 - \left(\frac{0{,}760}{0{,}880}\right)^{\frac{1{,}41-1}{1{,}41}}\right\}} = 156^m.$$

Bei Vergleichung desselben mit dem in Gleichung 6) gefundenen Werthe $u = 152^m$ erkennt man, dass nur bei grossen Druckdifferenzen es erforderlich ist, die bei dem Ausflusse stattfindende Dichtigkeitsänderung zu berücksichtigen, während man bei kleinen Druckdifferenzen die Ausflussgeschwindigkeit ohne Bedenken nach Gleichung 5) berechnen darf.

Für das Verhältniss der beiden absoluten Temperaturen erhält man nach § 180 die Gleichung:

$$19) \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{0{,}760}{0{,}880}\right)^{\frac{1{,}41-1}{1{,}41}} = 0{,}9583,$$

welche zeigt, dass bei dem Ausflusse der Luft die absolute Temperatur derselben von 295° bis auf 283° abnehmen wird.

§ 201.

Isothermen des Wasserdampfes.

Die Temperaturfläche der vollkommenen Gase ist — wie in § 178 in Bezug auf atmosphärische Luft erklärt wurde — eine überall stetig gekrümmte Fläche. Die Temperaturfläche des Wasserdampfes dagegen ist eine krumme Fläche mit Kanten.

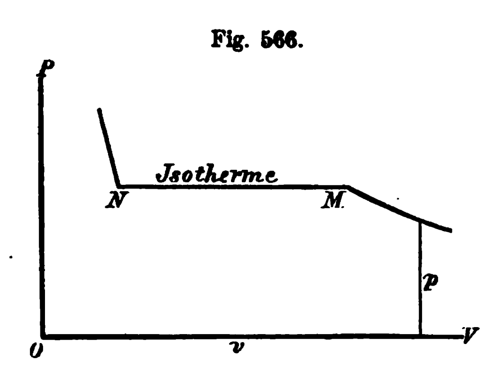
Bei abnehmender Temperatur geht der Wasserdampf über in den tropfbar flüssigen und festen Aggregatzustand. Diesen Uebergängen entsprechen Aenderungen in dem Krümmungsgesetze der

Temperaturfläche, welche demgemäss als eine aus mehreren stetig gekrümmten Flächengebieten zusammengesetzte Fläche sich darstellen wird.

Von dem Unterschiede zwischen den Dämpfen und den vollkommenen Gasen gewinnt man eine anschauliche Vorstellung, indem man sich die beiden Temperaturflächen als Gebirgsoberflächen vorstellt. In den höheren Regionen werden die Formen dieser beiden Gebirge fast vollkommen übereinstimmen, insofern bei sehr hoher Temperatur der Wasserdampf nahezu wie ein vollkommenes Gas sich verhält. Weiter unten werden jedoch erhebliche Unterschiede zwischen den beiden Gebirgsformen hervortreten, insofern bei demjenigen Gebirge, welches das Verhalten des Wassers in seinen drei Aggregatzuständen veranschaulicht, die Einförmigkeit des stetig gekrümmten Gebirgsabhanges durch scharfkantige Einschnitte und schroff vorspringende, gesimsartig überhängende Felswände unterbrochen ist, welche der unteren Gebirgsregion einen wesentlich veränderten landschaftlichen Charakter verleihen. In Folge dessen wird auch für die am Gebirgsabhange entlang laufenden Horizontalwege, welche die Isothermen darstellen, in den unteren Regionen eine von den Isothermen der vollkommenen Gase erheblich abweichende Form sich ergeben.

Wenn überhitzter Wasserdampf eine isothermische Compression erleidet, und das Gesetz, nach welchem bei allmählichem Vorrücken des Kolbens der Druck p mit dem Volumen v sich ändert (auf dieselbe Weise wie früher), durch eine Linie geometrisch dargestellt wird, so zeigt sich, dass diese Linie anfangs einen ähnlichen Verlauf nimmt wie bei atmosphärischer Luft. An derjenigen Stelle jedoch, welche dem Uebergange des Dampfes in den gesättigten Zustand entspricht, wird die Linie eine Ecke bilden (Fig. 566). Bei dieser Stellung des Kolbens beginnt die Condensation, und bei weiterem Vorrücken desselben bleibt der Druck p constant. Das folgende Stück der Isotherme wird daher eine der Abscissen-Achse parallele gerade Linie bilden. Diese gerade Linie MN erstreckt sich bis zu derjenigen Stelle, welche der Condensation des letzten Dampftheilchens entspricht. An dieser Stelle bildet die Isotherme abermals eine Ecke, insofern der Druck des Wassers bei abnehmendem Volumen ausserordentlich rasch zunimmt. Das letztfolgende Stück

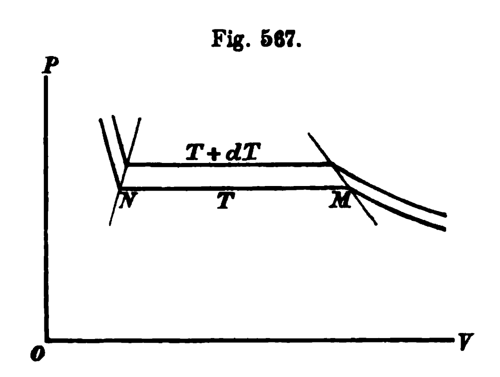
Fig. 566.



der Isotherme bildet daher eine in Bezug auf die Abscissen-Achse sehr steil ansteigende Curve.

Bei dem Uebergange von der Isotherme T zu der Isotherme $T + dT$ wird jeder von den beiden Eckpunkten M und N ein Linien-Element beschreiben, welches einer **Kante** der Temperaturfläche angehört (Fig. 567). Analoge Kantenbildungen in der Temperaturfläche werden sich an denjenigen Stellen zeigen, welche dem Uebergange aus dem tropfbarflüssigen in den festen Aggregatzustand entsprechen. Hieraus ergiebt sich, dass die Temperaturfläche des Wassers in seinen drei Aggregatzuständen **nicht** wie diejenige der vollkommenen Gase durch **eine** allgemeine Gleichung von einfacher Form dargestellt werden kann. Eine solche Gleichung wird vielmehr immer nur für ein mehr oder weniger beschränktes Gebiet der ganzen Temperaturfläche sich aufstellen lassen.

Fig. 567.



§ 202.

Clapeyron-Clausius'sches Gesetz.

Der in § 183 für atmosphärische Luft gefundene Satz, nach welchem die bei isothermischem Uebergange aus einer gegebenen Adiabate in eine zweite gegebene Adiabate aufzunehmende oder abzugebende Wärme-Quantität der absoluten Temperatur proportional ist, gilt nach den Hypothesen der mechanischen Wärmetheorie*) nicht nur für vollkommene Gase, sondern auch für beliebige andere Stoffe (zweiter Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie). Man darf daher denselben auch anwenden auf die im vorigen Paragraphen erklärten parallelen geradlinigen Isothermen, welche dem Uebergange des Wassers in gesättigten Dampf entsprechen. Wenn mit Q die bei dem Uebergange längs der Isotherme T zuzuführende Wärme-Quantität bezeichnet wird, und mit

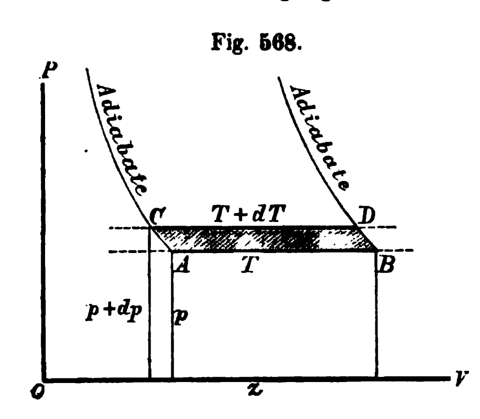
*) **Clausius**: „Mechanische Wärmetheorie". 2. Aufl. I. Band. III. Abschnitt.

$Q + dQ$ die bei dem Uebergange längs der Isotherme $T + dT$ zuzuführende Wärme-Quantität, so ist nach dem obigen Satze:

$$1)\quad \frac{Q + dQ}{T + dT} = \frac{Q}{T}.$$

Das mechanische Aequivalent der Wärme-Quantität dQ entspricht dem in Fig. 568 schraffirten horizontalen Flächenstreifen. Denn bei dem Uebergange von C nach B längs der Linie CAB würde die Wärme-Quantität Q zuzuführen sein, und bei dem Uebergange von C nach B längs der Linie CDB die Wärme-Quantität $Q + dQ$. Der Unterschied zwischen diesen beiden zuzuführenden Wärme-Quantitäten kann aber nur von der durch jene schraffirte Fläche repräsentirten Differenz der äusseren Arbeiten herrühren, da sowohl die Anfangszustände als auch die Endzustände in beiden Fällen übereinstimmen.

Fig. 568.



Wie auch immer die Formen der beiden Adiabaten AC und BD beschaffen sein mögen — die in Fig. 568 schraffirte Fläche wird immer betrachtet werden dürfen als ein unendlich schmaler Flächenstreifen von der Länge z und der unendlich kleinen Breite dp. Indem man den Flächeninhalt desselben mit dem Wärme-Aequivalente der Arbeits-Einheit multiplicirt, erhält man demnach für jene Wärme-Quantität den Ausdruck:

$$2)\quad dQ = A z\, dp.$$

Aus Gleichung 1) ergiebt sich für ebendieselbe Wärme-Quantität der Werth:

$$3)\quad dQ = \frac{Q\, dT}{T},$$

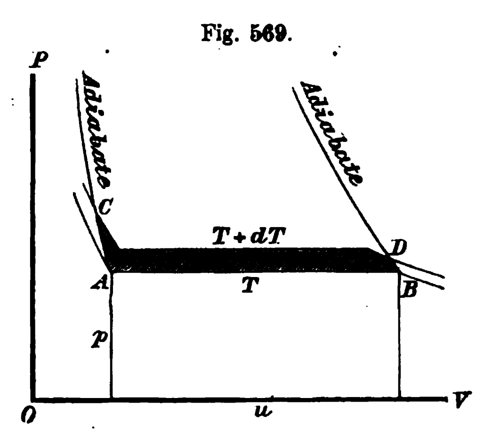
und die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke führt zu der folgenden Gleichung:

$$4)\quad A z\, dp = \frac{Q\, dT}{T}.$$

Diese Gleichung wird man auch dann noch als gültig betrachten dürfen, wenn man sich die beiden Adiabaten so weit auseinander

gerückt denkt, dass die Endpunkte der isothermischen Strecke AB mit den beiden Eckpunkten dieser unteren Isotherme zusammenfallen, insofern die an den beiden Enden der oberen Isotherme hierbei auftretenden Abweichungen von der geradlinigen Form hinsichtlich der Berechnung des schraffirten Flächenstreifens Aenderungen bedingen werden, welche als unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung unberücksichtigt bleiben dürfen (Fig. 569). Wenn man demgemäss u statt z und r statt Q setzt, so nimmt die vorige Gleichung die folgende Form an:

Fig. 569.



$$5)\quad A\,u\,dp = r\frac{dT}{T}.$$

In dieser Gleichung bedeutet nunmehr r die sogenannte „Verdampfungswärme" des Wassers*), nämlich diejenige Wärme-Quantität, welche erforderlich ist, um eine Wassermasse von 1 Kil. Gewicht bei der Temperatur T und dem zugehörigen constanten Drucke p vollständig in gesättigten Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln, während u die mit dieser Verwandlung verbundene Volumen-Zunahme bedeutet.

§ 203.

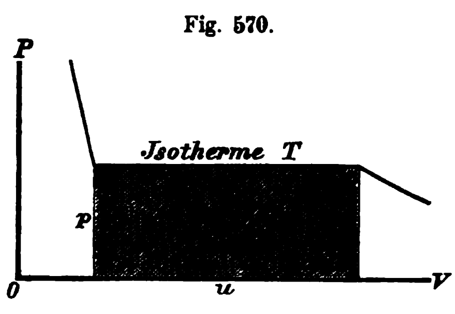
Latente Wärme.

Bei isothermischem Uebergange eines Kilogramms Wasser in gesättigten Dampf wird die ganze zugeführte Wärme-Quantität r in mechanische Arbeit umgewandelt. Der constante Druck p verrichtet bei der Volumenvergrösserung u die mechanische Arbeit: pu. Dieser in Fig. 570 durch die schraffirte Rechteckfläche dargestellten Arbeit entspricht ein Wärme-Aequivalent von der Grösse: Apu. Von der zugeführten Wärme-Quantität r wird also der Theil: Apu in äussere Arbeit umgewandelt, und dieser Theil wird die äussere latente Wärme des Wasserdampfes genannt.**)

*) Clausius: „Mechanische Wärmetheorie". 2. Aufl. I. Band. S. 130.
**) Zeuner: „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie". 2. Aufl. S. 271.

Der andere Theil der zugeführten Wärme-Quantität r wird in innere Arbeit umgewandelt, insofern derselbe dazu verwendet wird: diejenigen Widerstände zu überwinden, mit welchen die zwischen den Wassertheilchen wirkenden Anziehungskräfte einer Trennung derselben entgegen wirken. Diese in innere Arbeit umgewandelte Wärme-Quantität, welche mit ϱ bezeichnet werden soll, nennt man die innere latente Wärme des Wasserdampfes.*) Dieselbe kann demnach definirt werden als diejenige in Arbeit umgewandelte Wärme-Quantität, welche ein Kilogramm gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur T mehr enthält als ein Kilogramm Wasser von der Temperatur T. Die ganze Verdampfungswärme r ist gleich der Summe jener beiden latenten Wärmen und hat die Grösse:

Fig. 570.



$$1) \quad r = \varrho + Apu.$$

Bei isothermischer Rückkehr in den tropfbar flüssigen Zustand würde die Masse dieselbe Wärme-Quantität r abgeben und gleichzeitig die Wärme-Quantität: Apu in Form von zugeführter mechanischer Arbeit aufnehmen.

§ 204.

Specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes.

Für die Wärme-Quantität, welche einem Kilogramm Wasser von der Temperatur T zugeführt werden muss, um dasselbe vollständig in gesättigten Dampf von der Temperatur $T + dT$ zu verwandeln, wird man verschiedene Werthe erhalten je nach dem Wege, auf welchem die Masse aus ihrem Anfangszustande in den Endzustand übergeführt werden soll. Denkt man sich diesen Uebergang das eine Mal längs des Weges ABD, das andere Mal längs des Weges ACD stattfindend, so erkennt man: dass der Unterschied zwischen den beiden zuzuführenden Wärme-Quantitäten der Differenz der beiden äusseren Arbeiten entsprechen wird, insofern die Anfangszustände sowohl als die Endzustände in beiden Fällen

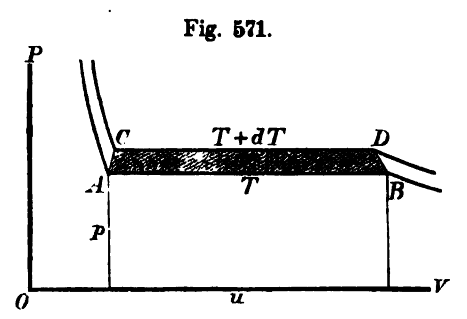
*) Zeuner: „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie". 2. Aufl. S. 271.

übereinstimmen (Fig. 571). Dieser in Fig. 571 durch die schraffirte Fläche dargestellten Arbeitsdifferenz $u\,dp$ entspricht das Wärme-Aequivalent:

1) $\varepsilon = A\,u\,dp.$

Wenn mit h die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes*) bezeichnet wird für diejenige Art der Zustands-Aenderung, bei welcher der Dampf stets im gesättigten Zustande bleibt, so ist: $h\,dT$ die Wärmequantität, welche dem Uebergange BD entspricht. Der isothermische Uebergang von A nach B erfordert die Wärmequantität: r. Für die ganze längs des Weges ABD zuzuführende Wärme-Quantität ergiebt sich demnach der Werth:

Fig. 571.



2) $Q = r + h\,dT.$

Wenn mit c die specifische Wärme des Wassers bezeichnet wird für diejenige specielle Art der Zustands-Aenderung, bei welcher der Druck des Wassers stets dem Drucke des gesättigten Dampfes von derselben Temperatur gleich bleibt, so ist: $c\,dT$ die dem Uebergange AC entsprechende Wärme-Quantität. Der isothermische Uebergang von C nach D erfordert die Wärme-Quantität: $r + dr$. Dem Uebergange längs des Weges ACD entspricht also die Wärme-Quantität:

3) $Q + \varepsilon = r + dr + c\,dT.$

Aus den letzteren beiden Gleichungen ergiebt sich für die Differenz ε der Werth:

4) $\varepsilon = c\,dT + dr - h\,dT.$

Die Gleichsetzung der obigen beiden für ε gefundenen Ausdrücke führt zu der Gleichung:

5) $A\,u\,dp = c\,dT + dr - h\,dT,$

und wenn man hierin für den auf der linken Seite stehenden Ausdruck den in § 202 gefundenen Werth: $r\frac{dT}{T}$ einsetzt, so erhält

*) Clausius: „Mechanische Wärmetheorie“. 2. Aufl. S. 131.

man für die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes die Gleichung:

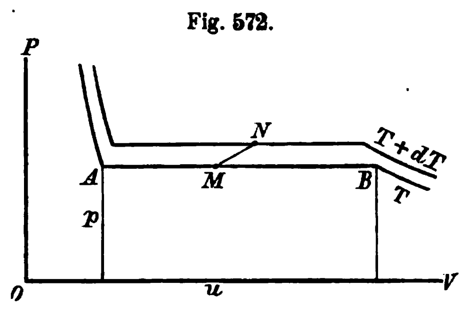
$$6)\quad h = c + \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}.$$

§ 205.

Differenzialgleichung der zugeführten Wärme.

Die geradlinige isothermische Strecke AB veranschaulicht diejenige Zustands-Aenderung, welche ein Kilogramm Wasser erleidet, während dasselbe bei der Temperatur T und dem zugehörigen constanten Drucke p vollständig in gesättigten Dampf verwandelt wird (Fig. 572). Ein zwischen den beiden Endpunkten dieser Strecke liegender Punkt M wird also irgend einen Zwischenzustand repräsentiren, in welchem die Masse sich befindet, wenn ein Theil derselben vom Gewichte x bereits in Dampf verwandelt worden ist, während der Rest von $1 - x$ Kilogrammen noch im tropfbar flüssigen Zustande sich befindet. Betrachtet man diesen durch den Punkt M repräsentirten Zustand als Anfangszustand, so erkennt man aus obiger Figur, dass dem Linien-Elemente MN eine solche Zustands-Aenderung entsprechen wird, bei welcher die Temperatur um dT und der zugehörige Druck um dp zunimmt, während zugleich ein Massentheil vom Gewichte dx aus dem tropfbar flüssigen Zustande in den dampfförmigen Zustand übergeht. Dieser durch das Linien-Element MN dargestellten Zustands-Aenderung entspricht eine zuzuführende Wärme-Quantität dQ, welche aus folgenden drei Theilen sich zusammensetzt.

Fig. 572.



Der erste Theil dQ_1 wird dazu verwendet, der Wassermasse von $1 - x$ Kilogrammen die Temperatur-Erhöhung dT zu ertheilen, und dieser Theil hat nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition die Grösse:

$$1)\quad dQ_1 = (1 - x) \,.\, c \,.\, dT.$$

Der zweite Theil dQ_2 wird dazu verwendet, der Dampfmasse von x Kilogrammen die Temperatur-Erhöhung dT zu ertheilen, und hat die Grösse:

$$2)\quad dQ_2 = x\,.\,h\,.\,dT.$$

Der dritte Theil dQ_3 wird dazu verwendet, die Wassermasse vom Gewichte dx in gesättigten Dampf zu verwandeln, und dieser Theil hat nach § 203 die Grösse:

$$3)\quad dQ_3 = r\,.\,dx.$$

Die ganze Wärme-Quantität dQ ist gleich der Summe dieser drei Theile zu setzen und hat die Grösse:

$$4)\quad dQ = c\,(1 - x)\,dT + h\,x\,dT + r\,dx.$$

Wenn man hierin für h den am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Werth einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$5)\quad dQ = c\,dT + x\,dr + r\,dx - x\,r \cdot \frac{dT}{T},$$

welcher man (nach der für das Differenziiren eines Productes geltenden Regel) auch die folgende Form geben kann:

$$6)\quad dQ = c\,dT + d(xr) - xr \cdot \frac{dT}{T}, \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad dQ = c\,dT + T\,d\left(\frac{xr}{T}\right).$$

Für ein Gemisch von x Kilogrammen Dampf und $m - x$ Kilogrammen Wasser würde man auf dieselbe Weise die folgende Gleichung erhalten:

$$8)\quad dQ = m\,c\,dT + T\,d\left(\frac{xr}{T}\right).$$

§ 206.

Zunahme der inneren Wärme.

Der Gleichung 6) des vorigen Paragraphen kann man mit Benutzung der Gleichung 1) des § 203 und der Gleichung 5) des § 202 auch die folgenden Formen geben:

$$1)\quad dQ = c\,dT + d[x\,(\varrho + A\,p\,u)] - A\,x\,u\,dp,$$

$$2)\quad dQ = c\,dT + d(x\varrho) + A\,d(xpu) - A\,x\,u\,dp,$$

$$3)\quad dQ = c\,dT + d(x\varrho) + Ap\,d(xu).$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass die zugeführte Wärme-Quantität sich zusammensetzt aus den beiden Theilen:

$$4)\quad dU = c\,dT + d(x\varrho) \quad \text{und}$$

$$5)\quad dL = Ap\,d(xu),$$

von denen der letztere als die in äussere Arbeit umgewandelte Wärme-Quantität, und der erstere als die von der Masse selbst aufgenommene Wärme-Quantität betrachtet werden darf.

Beim Beginne der Zustands-Aenderung MN hatte nach Fig. 573 das Volumen der ganzen Masse die Grösse:

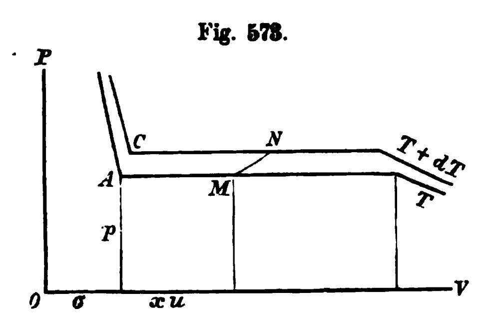
$$6)\quad v = \sigma + xu,$$

und während der Zustands-Aenderung MN nimmt das Volumen zu um die Grösse:

$$7)\quad dv = d\sigma + d(xu).$$

In dieser Gleichung bedeutet $d\sigma$ die Volumenzunahme, welche dem Uebergange von A nach C entsprechen würde, oder diejenige Grösse, um welche das Volumen von 1 Kil. Wasser zunehmen würde, wenn die Temperatur desselben von T bis $T + dT$ erhöht wird, während zugleich der Druck in demselben Maasse sich steigert, wie der Druck des gesättigten Wasserdampfes mit jener Temperaturzunahme wachsen würde. Die Vernachlässigung dieser Volumen-Aenderung hat einen so geringen Einfluss auf die aus obigen Gleichungen abzuleitenden Resultate, dass man ohne Bedenken $d\sigma = 0$ setzen und demgemäss die Grösse: $p\,d(xu)$ als die bei der Zustands-Aenderung MN verrichtete äussere Arbeit ansehen darf.

Fig. 573.



Hieraus folgt, dass die Grösse dU diejenige Wärme-Quantität darstellt, welche von der Masse selbst aufgenommen wird, und zum Theil in innere Arbeit umgewandelt, zum Theil auf Hervorbringung der Temperatur-Erhöhung dT verwendet wird. Der Theil dU kann also abkürzungsweise als Zunahme der inneren Wärme bezeichnet werden.

Der Fehler, welchen man begeht, indem man der Grösse dU die obige Deutung giebt, besteht darin, dass man die in § 204 definirte specifische Wärme c verwechselt mit der specifischen Wärme des Wassers bei constantem Volumen. Der Unterschied zwischen diesen beiden specifischen Wärmen ist aber erfahrungsgemäss so geringfügig, dass man ohne Bedenken dem Buchstaben c auch diese letztere Bedeutung beilegen darf. In diesem Falle würde das Glied: $c\,dT$ in Gleichung 4) diejenige Grösse darstellen, um welche die innere Wärme der Masse zugenommen haben würde,

wenn die ganze Masse anfangs im tropfbar flüssigen Zustande sich befunden hätte. Da in Wirklichkeit beim Beginne der Zustands-Aenderung MN bereits x Kilogramme im dampfförmigen Zustande sich befanden, so war die innere Wärme der Masse schon anfangs um $x\varrho$ grösser, als dieselbe bei tropfbar flüssigem Zustande der ganzen Masse gewesen sein würde. Bei der Wärmezuführung wächst dieser Ueberschuss um die Grösse $d(x\varrho)$ — einestheils dadurch, dass der Factor x um die Grösse dx, anderntheils dadurch, dass der Factor ϱ um die Grösse $d\varrho$ zunimmt.

§ 207.

Erfahrungsformeln und Tabellen.

Wenn man wieder: $T = 273 + t$ setzt, also mit t die nach dem Celsius'schen Thermometer gemessene Temperatur bezeichnet, so gilt für die specifische Wärme des Wassers (nach Regnault) die Gleichung:

$$1) \quad c = 1 + 0{,}000\,04 \,.\, t + 0{,}000\,000\,9 \,.\, t^2,$$

welche annäherungsweise sowohl für Temperaturänderungen bei constantem Volumen als auch für Temperaturänderungen bei constantem Drucke, sowie auch für die in § 204 behandelte Zustandsänderung als gültig betrachtet werden darf, insofern der Unterschied zwischen diesen specifischen Wärmen des Wassers als geringfügig vernachlässigt werden darf.

Da nach obiger Gleichung die Grösse c mit steigender Temperatur nur sehr langsam zunimmt, so kann man bei solchen Zustandsänderungen, welche ein nicht gar zu grosses Temperatur-Intervall umfassen, ohne Bedenken die Grösse c als eine constante Grösse behandeln, indem man für dieselbe denjenigen Werth einsetzt, welcher nach obiger Gleichung dem arithmetischen Mittel der beiden extremen Temperaturwerthe entsprechen würde — ein Verfahren, welches um so mehr gerechtfertigt erscheint, als die mathematisch genauen Werthe der Grösse c ohnehin unbekannt sind.

Die Verdampfungswärme des Wassers ist nach Regnault's Versuchen zu berechnen aus der Gleichung:

$$2) \quad r = 606{,}5 - 0{,}695 \,.\, t - 0{,}000\,02 \,.\, t^2 - 0{,}000\,000\,3 \,.\, t^3,$$

und die in § 203 mit ϱ bezeichnete innere latente Wärme des Wasserdampfes nach Zeuner aus der Gleichung:

$$3) \quad \varrho = 575{,}4 - 0{,}791 \,.\, t.$$

Aus den letzteren beiden Gleichungen ergeben sich die in nachfolgender Tabelle*) zusammengestellten Zahlenwerthe:

t	r	ϱ
0	606,500	575,40
10	599,548	567,66
20	592,590	559,83
30	585,624	551,97
40	578,649	544,06
50	571,663	536,12
60	564,663	528,15
70	557,649	520,17
80	550,618	512,19
90	543,569	504,24
100	536,500	496,29
110	529,409	488,36
120	522,294	480,44
130	515,153	472,52
140	507,985	464,61
150	500,788	456,70
160	493,559	448,80
170	486,298	440,89
180	479,002	432,99
190	471,670	425,08
200	464,300	417,17

Für Temperaturen, welche nicht zu weit von dem Werthe: $t = 100^0$ abweichen, kann man (nach Clausius) die Verdampfungswärme annäherungsweise auch berechnen nach der einfacheren Formel:

4) $r = 607 - 0{,}708 \, . \, t.$

*) Zeuner: „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie“. 2. Aufl.

t	p	$n = \frac{p}{10\,333}$	$n \,.\, 760$
— 30	5,25	0,000 508	0,386
— 20	12,6	0,001 22	0,927
— 10	28,7	0,002 75	2,093
0	62,5	0,006 05	4,600
10	124,6	0,012 06	9,165
20	236,4	0,022 88	17,391
30	428,9	0,041 51	31,548
40	746,5	0,072 24	54,906
50	1250,5	0,1210	91,980
60	2023	0,1958	148,786
70	3169	0,3067	233,082
80	4822	0,4666	354,62
90	7143	0,6913	525,39
100	10 333	1	760
110	14 621	1,415	1075,37
120	20 275	1,962	1491,28
130	27 603	2,671	2030,28
140	36 949	3,576	2717,63
150	48 690	4,712	3581,23
160	63 243	6,121	4651,62
170	81 054	7,844	5961,66
180	102 600	9,929	7546,39
190	128 382	12,42	9442,70
200	158 922	15,38	11 688,96
210	194 767	18,85	14 324,80
220	236 447	22,88	17 390,36

Das Gesetz, nach welchem der Druck des gesättigten Wasserdampfes mit der Temperatur sich ändert, lässt sich durch eine einfache Gleichung nicht darstellen.*) Man wird daher in solchen Fällen, wo für einen gegebenen Werth von t der zugehörige Werth von p bestimmt werden soll, die vorstehende (nach Regnault's Versuchen berechnete) Tabelle zu benutzen haben, in welcher p den Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter, und t die nach dem Celsius'schen Thermometer gemessene Temperatur bedeutet. Die Zahlen der dritten Vertical-Columne geben den Druck in Atmosphären an, und die Zahlen der vierten Vertical-Columne geben den Druck in Millimetern der Quecksilber-Säule an.

Nachdem für eine bestimmte Temperatur t die Werthe der Grössen: p, r, ϱ auf solche Weise gefunden sind, kann nach der Gleichung 1) des § 203 nunmehr auch die Grösse u für jede gegebene Temperatur berechnet werden.

§ 208.

Entropie des gesättigten Wasserdampfes.

Die am Schlusse des § 205 für dQ gefundene Gleichung 7) nimmt, wenn dieselbe auf beiden Seiten durch T dividirt wird, die folgende Form an:

$$1)\quad \frac{dQ}{T} = \frac{c\,dT}{T} + d\left(\frac{xr}{T}\right).$$

Der auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Quotient kann (nach § 182) als Differenzial der Entropie wie früher gleich $d\mathfrak{E}$

---

*) Annäherungsweise lässt sich die Beziehung zwischen Druck und Temperatur des gesättigten Wasserdampfes nach Rankine darstellen durch die empirische Formel:

$$\log p = 8{,}9477 - \frac{1517{,}6}{T} - \frac{122\,515}{T^2},$$

in welcher „log" den Brigg'schen Logarithmus bedeutet; nach Magnus durch die empirische Formel:

$$S = 4{,}525 \,.\, 10^{\frac{7{,}4475\,.\,t}{234{,}69 + t}},$$

in welcher S den Druck in Millimetern der Quecksilbersäule augedrückt bedeutet; nach Zeuner durch die empirische Formel:

$$T = 335{,}24 \,.\, n^{0{,}06068} + 37{,}774 \,.\, n^{0{,}25},$$

in welcher n die Zahl der Atmosphären bedeutet. Die Beziehung zwischen Druck und Volumen lässt sich nach Zeuner ausdrücken durch die Formel:

$$n \,.\, v^{1{,}0646} = 1{,}7049,$$

aus welcher für das Gewicht eines Cubikmeters der folgende Werth sich ergiebt:

$$\gamma = \frac{1}{v} = 0{,}6058 \,.\, n^{0{,}9393}.$$

gesetzt werden, und da der Factor c annäherungsweise als eine constante Grösse behandelt werden darf, so ist:

$$2)\quad d\mathfrak{E} = d\left(c \lg T + \frac{xr}{T}\right).$$

Indem man diese Gleichung integrirt, erhält man für die Entropie zunächst den folgenden Ausdruck:

$$3)\quad \mathfrak{E} = c \lg T + \frac{xr}{T} + \text{Const.}$$

Wenn mit $\mathfrak{E}_0$ derjenige Werth von $\mathfrak{E}$ bezeichnet wird, welcher den Werthen: $x = 0$ und $T = 273^\circ$ (oder $t = 0$) entspricht, so ist:

$$4)\quad \mathfrak{E}_0 = c \lg 273 + 0 + \text{Const.}$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{E}_0$ die Entropie, welche 1 Kil. Wasser bei der Temperatur von Null Grad (Celsius) besitzt, während $\mathfrak{E}$ die Entropie bedeutet, welche ein Gemisch von x Kilogrammen gesättigten Dampfes und $1 - x$ Kil. Wasser bei der absoluten Temperatur T besitzt. Die Differenz:

$$5)\quad \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = E$$

bedeutet also diejenige Grösse, um welche die Entropie der Masse zunimmt, während dieselbe aus dem ersteren in den letzteren Zustand übergeführt wird, und hat den Werth:

$$6)\quad E = c \lg\left(\frac{T}{273}\right) + \frac{xr}{T}.$$

Betrachtet man jenen ersteren Zustand — denjenigen nämlich, bei welchem die ganze Masse noch tropfbar flüssig war und die Temperatur von Null Grad (Celsius) hatte — als den ein für alle Mal gegebenen Anfangszustand, so kann man abkürzungsweise den Ausdruck „Entropie“ auch für die oben mit E bezeichnete Grösse gebrauchen. Hiernach erhält man für die Entropie, welche 1 Kilogramm gesättigten Wasserdampfes von der absoluten Temperatur T besitzt, indem man $x = 1$ setzt, den Werth:

$$7)\quad E = c \lg\left(\frac{T}{273}\right) + \frac{r}{T}.$$

Um nach dieser Gleichung die Entropie eines Kilogramms gesättigten Wasserdampfes von atmosphärischem Drucke zu berechnen, hat man: $T = 373$ (oder $t = 100$) zu setzen und für die Grösse c denjenigen Werth zu wählen, welcher der mittleren Temperatur des zwischen den Grenzen Null und hundert Grad (Celsius) liegenden Temperatur-Intervalls, nämlich dem Werthe: $t = 50$ entspricht. Nach Gleichung 1) des vorigen Paragraphen entspricht dieser mitt-

leren Temperatur der Werth: $c = 1{,}004$, und nach Substitution desselben erhält man mit Benutzung der Tabelle des vorigen Paragraphen für die Entropie den Werth:

$$8)\quad E = 1{,}004 \,.\, \lg\left(\frac{373}{273}\right) + \frac{536{,}5}{373} = 1{,}752.$$

Dem Drucke von 14 Atmosphären entsprechen die Werthe: $t = 195{,}53$ (oder $T = 468{,}53$) und: $r = 467{,}6$. Indem man: $c = 1{,}013$ setzt (entprechend der Mitteltemperatur: $t = 97{,}8$), erhält man für die Entropie, welche 1 Kil. gesättigten Wasserdampfes bei diesem Drucke besitzt, den Werth:

$$9)\quad E = 1{,}013 \,.\, \lg\left(\frac{468{,}53}{273}\right) + \frac{467{,}6}{468{,}53} = 1{,}545.$$

Hieraus ergiebt sich das bemerkenswerthe Resultat: dass die Entropie des gesättigten Wasserdampfes mit steigender Temperatur abnimmt, dass also eine Temperatur-Zunahme mit Wärme-Entziehung und eine Temperatur-Abnahme mit Wärme-Zuführung verbunden ist.

Auf dieselbe Weise wie oben erhält man nach Gleichung 7) die in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{p}{10333} = n$	t	r	E
0,006 05	0	606,5	2,222
0,1	46,21	574,3	1,956
0,5	81,71	549,4	1,812
1	100,00	536,5	1,752
2	120,60	521,9	1,694
3	133,91	512,4	1,661
4	144,00	505,1	1,638
5	152,22	499,2	1,621
6	159,22	494,1	1,607
7	165,34	489,7	1,596
8	170,81	485,7	1,586
9	175,77	482,1	1,577
10	180,31	478,8	1,569
11	184,50	475,7	1,562
12	188,41	472,8	1,556
13	192,08	470,1	1,551
14	195,53	467,6	1,545

Die erste Vertical-Columne dieser Tabelle giebt die Werthe des Druckes in Atmosphären an, und die vierte giebt an: um wie viel die Entropie eines Kilogrammes gesättigten Wasserdampfes von diesem Drucke grösser ist als die Entropie eines Kilogrammes Wasser von der Temperatur Null Grad (Celsius).

§ 209.

Entropie eines Gemisches von Dampf und Wasser.

Die Entropie einer Mischung von x Kil. Dampf und $1-x$ Kil. Wasser hat nach der Gleichung 6) des vorigen Paragraphen die Grösse:

$$1)\quad E = c \lg \left(\frac{T}{273}\right) + x \cdot \frac{r}{T}.$$

Dieselbe setzt sich zusammen aus zwei Theilen, von denen der erstere:

$$2)\quad \tau = c \lg \left(\frac{T}{273}\right)$$

die Entropie eines Kilogramms Wasser von der Temperatur T darstellt (oder denjenigen Werth von E, welcher für $x=0$ sich ergeben würde), während der andere:

$$3)\quad \xi = x \cdot \frac{r}{T}$$

die Grösse angiebt, welche zu der vorigen noch hinzukommt, wenn der Theil x auf isothermischem Wege in dampfförmigen Zustand übergeht. Hiernach kann die Entropie der Mischung bei gegebenem Werthe von x mit Hülfe der nebenstehenden Tabelle*) berechnet werden, in welcher ausserdem noch die Werthe von ϱ, sowie auch die bei der Berechnung des Volumens zu benutzenden Werthe der am Schlusse des § 202 definirten Grösse „u" angegeben sind.

Bei dem Drucke von 10 Atmosphären hat nach dieser Tabelle die Entropie eines Gemisches von x Kil. Dampf und $1-x$ Kil. Wasser die Grösse:

$$4)\quad E = 0{,}5131 + 1{,}0562 \,.\, x.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich für die Grössen x und E die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$x=$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$E=$	0,513	0,619	0,724	0,830	0,936	1,041	1,147	1,252	1,358	1,464	1,569.

*) Zeuner: „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie". 2. Aufl.

$\frac{p}{10\,333}=n$	t	τ	$\frac{r}{T}$	u	ϱ
0,006 05	0	0	2,2216	210,66	575,40
0,1	46,21	0,1566	1,7992	14,55	538,85
0,5	81,71	0,2627	1,5489	3,171	510,77
1	100,00	0,3136	1,4383	1,650	496,30
2	120,60	0,3682	1,3259	0,8588	480,00
3	133,91	0,4021	1,2591	0,5864	469,48
4	144,00	0,4271	1,2113	0,4474	461,50
5	152,22	0,4471	1,1740	0,3626	454,99
6	159,22	0,4639	1,1432	0,3054	449,46
7	165,34	0,4784	1,1171	0,2642	444,62
8	170,81	0,4912	1,0944	0,2329	440,29
9	175,77	0,5027	1,0742	0,2085	436,37
10	180,31	0,5131	1,0562	0,1887	432,77
11	184,50	0,5227	1,0398	0,1725	429,46
12	188,41	0,5315	1,0248	0,1589	426,37
13	192,08	0,5398	1,0109	0,1473	423,46
14	195,53	0,5475	0,9980	0,1373	420,74

Auf dieselbe Weise erhält man für die Entropie des Gemisches bei dem Drucke von 1 Atmosphäre die Gleichung:

$$5)\quad E = 0{,}3136 + 1{,}4383 \,.\, x,$$

aus welcher für die Grössen x und E die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe sich ergeben:

$x=$ 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$E=$ 0,314	0,457	0,601	0,745	0,889	1,033	1,177	1,320	1,464	1,608	1,752.

Die letzteren beiden Tabellen zeigen: dass z. B. bei dem Drucke von 10 Atmosphären ein Gemisch von 0,9 Kil. Dampf und 0,1 Kil. Wasser dieselbe Entropie ($E = 1{,}464$) besitzt wie bei dem Drucke von 1 Atmosphäre ein Gemisch von 0,8 Kil. Dampf und 0,2 Kil. Wasser. Man erkennt hieraus, dass der Uebergang

aus jenem ersteren in diesen letzteren Zustand mit einer partiellen Condensation verbunden sein würde, insofern bei dieser Zustandsänderung ein Massentheil von 0,1 Kil. Gewicht aus dem dampfförmigen in den tropfbar flüssigen Zustand übergeht. Eine solche Zustandsänderung, bei welcher dem Endzustande und dem Anfangszustande gleiche Werthe der Entropie entsprechen, wird z. B. dann stattfinden, wenn die Masse langsam sich ausdehnt und bei dieser Ausdehnung weder Wärme aufnimmt noch Wärme abgiebt.

Das Volumen des Gemisches kann man mit Benutzung der Tabelle berechnen aus der Gleichung:

$$6)\quad v = \sigma + x u,$$

in welcher: $\sigma = 0{,}001$ das Volumen von 1 Kil. Wasser, und u die bei der Verdampfung eintretende Volumen-Vergrösserung bedeutet.

Hiernach hatte bei dem Drucke von 10 Atmosphären das Gemisch von 0,9 Kil. Dampf und 0,1 Kil. Wasser das Volumen:

$$7)\quad v = 0{,}001 + 0{,}9 \,.\, 0{,}1887 = 0{,}1708 \text{ Cubikmeter.}$$

Bei dem nachherigen Drucke von 1 Atmosphäre hat das Gemisch von 0,8 Kil. Dampf und 0,2 Kil. Wasser das Volumen:

$$8)\quad v = 0{,}001 + 0{,}8 \,.\, 1{,}65 = 1{,}32 \text{ Cubikmeter.}$$

Mit der oben angenommenen Zustandsänderung würde also eine Ausdehnung auf das 7,73-fache des ursprünglichen Volumens verbunden sein.

§ 210.

Curven constanter Entropie.

Nach der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungsweise kann man dem Ausdrucke für die Entropie des Gemisches von x Kil. Dampf und $1 - x$ Kil. Wasser auch die folgende Form geben:

$$1)\quad E = \tau + \xi.$$

Für die Curve constanter Entropie (Isentrope oder Adiabate) ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$2)\quad \tau + \xi = \text{Const.},$$

in welcher die Constante aus dem gegebenen Anfangszustande berechnet werden kann.

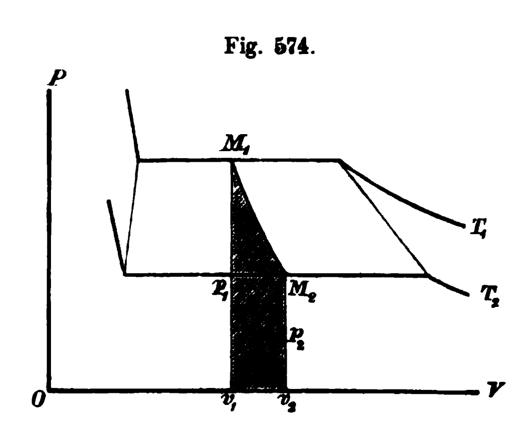
Wenn der den Anfangszustand repräsentirende Punkt M_1 in der Isotherme T_1 gegeben ist (Fig. 574), so kann man die Lage des

Durchschnittspunktes M_2, in welchem irgend eine gegebene zweite Isotherme T_2 von der Adiabate jenes Anfangspunktes geschnitten wird, berechnen mittelst der Gleichung:

$$3)\quad \tau_1 + \xi_1 = \tau_2 + \xi_2.$$

Für den adiabatischen Uebergang aus der Isotherme des Druckes von 10 Atmosphären in die Isotherme des Druckes von 1 Atmosphäre erhält man hiernach mit Benutzung der Tabelle des vorigen Paragraphen die Gleichung:

Fig. 574.



$$4)\quad 0{,}5131 + 1{,}0562 \,.\, x_1 = 0{,}3136 + 1{,}4383 \,.\, x_2,$$

und findet, indem man dieselbe für die Grösse x_2 auflöst, den folgenden Werth:

$$5)\quad x_2 = 0{,}1388 + 0{,}7343 \,.\, x_1.$$

Wenn man $x_2 = x_1$ setzt, so erhält man aus dieser Gleichung für x_1 den Werth:

$$6)\quad x_1 = 0{,}522,$$

und dieselbe zeigt, dass mit dem Uebergange von M_1 nach M_2 bei dem hier angenommenen Falle eine Verdampfung oder eine Condensation verbunden sein wird, jenachdem x_1 kleiner oder grösser als 0,522 war; denn im ersteren Falle wird $x_2 > x_1$, im letzteren wird $x_2 < x_1$.

Für die beiden Volumina erhält man nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen erklärten Methode die Gleichungen:

$$7)\quad v_1 = 0{,}001 + 0{,}1887 \,.\, x_1,$$

$$8)\quad v_2 = 0{,}001 + 1{,}65 \,.\, x_2.$$

Der letzteren kann man mit Benutzung des oben für x_2 gefundenen Werthes auch die folgende Form geben:

$$9)\quad v_2 = 0{,}22986 + 1{,}2116 \,.\, x_1.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für den hier angenommenen Fall die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

x_1	x_2	v_1	v_2	$\frac{v_2}{v_1}$
0	0,139	0,001	0,230	230
0,1	0,212	0,0199	0,351	17,66
0,2	0,286	0,0387	0,472	12,11
0,3	0,359	0,0576	0,593	10,30
0,4	0,432	0,0765	0,714	9,34
0,5	0,506	0,0954	0,836	8,76
0,6	0,579	0,1142	0,957	8,38
0,7	0,653	0,1331	1,078	8,10
0,8	0,726	0,1520	1,199	7,89
0,9	0,800	0,1708	1,320	7,73
1	0,873	0,1897	1,441	7,60

Mit Benutzung des auf solche Weise für v_2 gefundenen Werthes kann man nunmehr in Fig. 574 die Lage des Durchschnittspunktes M_2 bestimmen, in welchem die gegebene Isotherme T_2 von der Adiabate geschnitten wird, und durch Wiederholung des obigen Verfahrens in Bezug auf eine dritte, vierte ... Isotherme würde man alsdann die Construction der Adiabate weiter fortsetzen können.

Bei Ausführung dieser Rechnung würde man z. B. für den Durchschnittspunkt der Adiabate mit der Isotherme des Druckes von 5 Atmosphären die Gleichungen finden:

$$10)\quad x = 0{,}05622 + 0{,}9 \,.\, x_1,$$

$$11)\quad v = 0{,}0214 + 0{,}3263 \,.\, x_1,$$

und für den Durchschnittspunkt mit der Isotherme des Druckes von 2 Atmosphären würde man die folgenden Gleichungen erhalten:

$$12)\quad x = 0{,}1093 + 0{,}7965 \,.\, x_1,$$

$$13)\quad v = 0{,}09487 + 0{,}684 \,.\, x_1.$$

Wenn also mit n der Druck in Atmosphären bezeichnet wird, so ergeben sich für den Fall, dass anfangs die ganze Masse im tropfbar flüssigen Zustande sich befand, die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$n =$	10	5	2	1
$v =$	0,001	0,0214	0,09487	0,230

und für den Fall, dass anfangs die ganze Masse im dampfförmigen Zustande sich befand, würde man die folgenden Werthe erhalten:

$$n = \quad 10 \qquad 5 \qquad 2 \qquad 1$$

$$v = 0{,}1897 \quad 0{,}3477 \quad 0{,}7789 \quad 1{,}441.$$

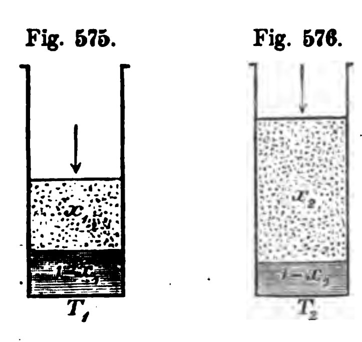
Die in diesem Paragraphen gefundenen Gleichungen und Tabellen würde man selbstverständlich auch benutzen können, um das Verhalten eines Gemisches von Wasser und Dampf bei adiabatischer Compression zu bestimmen. So z. B. zeigt die oben für die Grössen x_1 und x_2 berechnete Tabelle: dass in einem Gemische von 0,873 Kil. Dampf und 0,127 Kil. Wasser die ganze ursprünglich vorhanden gewesene Wassermasse verdampfen würde, wenn bei adiabatischer Compression der Druck von 1 Atmospäre bis zu 10 Atmosphären gesteigert wird — ferner: dass in einem Gemische von 0,139 Kil. Dampf und 0,861 Kil. Wasser unter gleichen Umständen die ganze ursprünglich vorhanden gewesene Dampfmasse in den tropfbar flüssigen Zustand übergehen würde.

§ 211.

Adiabatische Arbeit des gesättigten Wasserdampfes.

Die im vorigen Paragraphen behandelte Zustands-Aenderung kann man sich durch die beiden Figuren 575 und 576 veranschaulichen, von denen die erstere den Anfangszustand und die letztere den Endzustand darstellt. Der Voraussetzung nach sollte der Uebergang aus dem ersteren in den letzteren Zustand ohne Wärmezuführung stattfinden; folglich ist es ein Theil der inneren Wärme, welcher bei der Ausdehnung, in mechanische Arbeit umgewandelt, dazu verwendet wird, den Kolben zurückzudrängen und den äusseren Gegendruck — welcher stets gleich dem inneren Drucke vorausgesetzt wird — dabei als Widerstand zu überwinden. Um die Grösse dieser (in Figur 574 durch die schraffirte Fläche dargestellten) Arbeit zu berechnen, hat man demnach zunächst den bei der Ausdehnung stattfindenden Verlust an innerer Wärme zu bestimmen, und diese Wärme-Quantität

Fig. 575. Fig. 576.



nachher mit dem mechanischen Aequivalente der Wärme-Einheit zu multipliciren.

Für die Aenderung der inneren Wärme eines Gemisches von Dampf und Wasser wurde in § 206 (Gleichung 4) der folgende Ausdruck gefunden:

$$1)\quad dU = c\,dT + d(x\varrho).$$

Indem man diese Gleichung integrirt, erhält man für den ganzen bei obiger Zustands-Aenderung eintretenden Verlust an innerer Wärme die Gleichung:

$$2)\quad U_1 - U_2 = c(T_1 - T_2) + x_1\varrho_1 - x_2\varrho_2,$$

in welcher statt $T_1 - T_2$ auch $t_1 - t_2$ gesetzt werden kann. Für die gesuchte adiabatische Arbeit ergiebt sich hiernach der Werth:

$$3)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{A}\left\{c(t_1 - t_2) + x_1\varrho_1 - x_2\varrho_2\right\}.$$

Den Drücken von 10 Atmosphären und 1 Atmosphäre entsprechen resp. die Temperaturen $t_1 = 180^\circ{,}31$ und $t_2 = 100^\circ$. Nach § 207 (Gleichung 3) entsprechen diesen beiden Temperaturen die Werthe: $\varrho_1 = 432{,}775$ und $\varrho_2 = 496{,}3$. Für den Uebergang aus der ersteren in die letztere Temperatur kann: $c = 1{,}023$ gesetzt werden (entprechend nach § 207, Gleichung 1, der Mitteltemperatur: $\frac{t_1 + t_2}{2} = 140^\circ$). Hiernach ergiebt sich für die bei diesem Uebergange in äussere Arbeit umgewandelte innere Wärme der Werth:

$$4)\quad U_1 - U_2 = 1{,}023\,(180{,}31 - 100) + 432{,}775\,.\,x_1 - 496{,}3\,.\,x_2.$$

Wenn man hierin für x_2 den bereits im vorigen Paragraphen (Gleichung 5) für diesen Fall berechneten Werth einsetzt, so nimmt diese Gleichung die folgende Form an:

$$5)\quad U_1 - U_2 = 13{,}33 + 68{,}34\,.\,x_1.$$

Für den Fall, dass anfangs die ganze Masse im tropfbar flüssigen Zustande sich befand, würde hierin $x_1 = 0$ zu setzen sein. Hieraus folgt, dass 1 Kil. Wasser von seiner inneren Wärme: 13,33 Wärme-Einheiten abgiebt, wenn diese Wassermasse (bei partieller Verdampfung) aus der Isotherme des Druckes von 10 Atmosphären in die Isotherme des Druckes von 1 Atmosphäre übergeht. Die auf den Kolben übertragene Arbeit hat also in diesem Falle die Grösse:

$$6)\quad \mathfrak{A} = 424\,.\,13{,}33 = 5652 \text{ Meterkilogramm.}$$

Für den Fall, dass anfangs die ganze Masse im dampfförmigen

Zustande sich befand, würde: $x_1 = 1$ zu setzen sein. Ein Kilogramm Dampf würde also unter gleichen Umständen (bei partieller Condensation): 81,67 Wärme-Einheiten oder: 34 628 Meterkilogramm entwickeln.

§ 212.

Erwärmung bei constantem Volumen.

Das Volumen eines Gemisches von x Kil. Dampf und $1-x$ Kil. Wasser hat nach § 209 (Gleichung 6) die Grösse:

$$1)\quad v = \sigma + x u.$$

Da die Grösse σ annäherungsweise als eine constante Grösse behandelt werden darf, so ergiebt sich hieraus für die Unveränderlichkeit des Volumens die Bedingungsgleichung:

$$2)\quad d(xu) = 0,$$

und die in § 206 gefundene Differenzialgleichung 3) nimmt nach Substitution dieses Werthes die folgende Form an:

$$3)\quad dQ = c\,dT + d(x\varrho).$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man für die zum Hervorbringen der Temperatur-Erhöhung: $T_2 - T_1$ erforderliche Wärme-Quantität den Werth:

$$4)\quad Q = c(T_2 - T_1) + x_2\varrho_2 - x_1\varrho_1.$$

Da nach Gleichung 2) die Grösse des Productes xu bei der Erwärmung unverändert bleibt, so ist:

$$5)\quad x_1 u_1 = x_2 u_2$$

zu setzen, und mit Benutzung des hieraus für die Grösse x_2 zu entnehmenden Werthes kann man der vorhergehenden Gleichung auch die folgende Form geben:

$$6)\quad Q = c(t_2 - t_1) + x_1 u_1 \left(\frac{\varrho_2}{u_2} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right).$$

Nach § 207 und § 209 entsprechen dem Drucke von 1 Atmosphäre die Werthe: $t_1 = 100$, $\varrho_1 = 496{,}3$, $u_1 = 1{,}65$, und dem Drucke von 2 Atmosphären die Werthe: $t_2 = 120{,}6$, $\varrho_2 = 480$, $u_2 = 0{,}8588$. Indem man: $c = 1{,}0153$ setzt (entsprechend der Mitteltemperatur von 110,3 Grad), erhält man hiernach für die Wärme-Quantität, welche erforderlich ist, um ein Gemisch von 0,1 Kil. Dampf und 0,9 Kil. Wasser bei constantem Volumen so weit zu erwärmen, dass der Druck von 1 Atmosphäre bis 2 Atmosphären zunimmt, den Werth:

$$7)\quad Q = 1{,}0153\,(120{,}6 - 100) + 0{,}1\,.\,1{,}65\left(\frac{480}{0{,}858} - \frac{496{,}3}{1{,}65}\right) = 63{,}5 \text{ Wärme-Einheiten.}$$

Aus Gleichung 5) ergiebt sich für diesen Fall der Werth: $x_2 = 0{,}192$. Bei der Erwärmung werden also: 0,092 Kil. Wasser in Dampf verwandelt. Um das Gemisch aus dem letzteren Zustande in den ersteren wieder zurückzuführen, würde man demselben 63,5 Wärme-Einheiten zu entziehen haben. Das unverändert bleibende Volumen hat nach Gleichung 1) die Grösse:

$$8)\quad v = 0{,}001 + 0{,}1\,.\,1{,}65 = 0{,}166 \text{ Cubikmeter.}$$

Um denjenigen Grenzwerth zu finden, welchen der Druck in dem Augenblicke erreicht, wo bei fortgesetzter Erwärmung die ganze ursprünglich vorhanden gewesene Wassermasse von 0,9 Kil. in Dampf übergegangen ist, hat man $x_2 = 1$ zu setzen und erhält nach Gleichung 5) den Werth:

$$9)\quad u_2 = x_1 u_1 = 0{,}1\,.\,1{,}65 = 0{,}165,$$

welchem nach der Tabelle des § 209 ein Druck von 11,5 Atmosphären entspricht. Um das ursprünglich gegebene Gemisch ganz in gesättigten Dampf von diesem Drucke zu verwandeln, würde man demselben 466 Wärme-Einheiten zuführen müssen, und eben so gross ist die Wärme-Quantität, welche 1 Kilogramm gesättigten Dampfes von 11,5 Atmosphären Druck abgiebt, wenn dasselbe bei constantem Volumen bis auf 100° (Celsius) abgekühlt wird, wobei 0,9 Kil. in den tropfbar flüssigen Zustand übergehen und der Druck bis auf 1 Atmosphäre sinken würde.

§ 213.

Ausdehnung bei plötzlicher Druckverminderung.

Wenn der von aussen gegen den Kolben wirkende Druck plötzlich von p_1 bis p abnimmt und während des alsdann eintretenden beschleunigten Zurückweichens des Kolbens die constante Grösse p beibehält, so wird die mechanische Arbeit:

$$1)\quad \mathfrak{A} = p\,(v_2 - v_1)$$

auf den Kolben übertragen, während das Volumen von v_1 bis v_2 zunimmt. Mit Benutzung der Gleichung 6) des § 209 kann man dem obigen Ausdrucke auch die folgende Form geben:

$$2)\quad \mathfrak{A} = p\,(x_2 u_2 - x_1 u_1).$$

Dieser in Fig. 577 durch die schraffirte Rechteckfläche dargestellten Arbeit entspricht ein Verlust an innerer Wärme von der Grösse:

$$3)\quad U_1 - U_2 = Ap\,(x_2 u_2 - x_1 u_1).$$

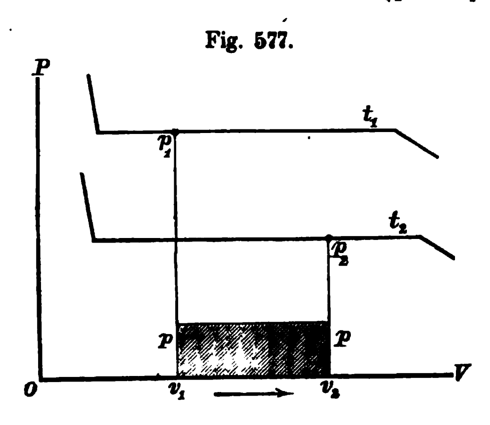
Indem man hierin für die auf der linken Seite stehende Grösse den in § 211 (Gleichung 2) gefundenen Ausdruck einsetzt, erhält man die Gleichung:

$$4)\quad c\,(t_1 - t_2) + x_1 \varrho_1 - x_2 \varrho_2 = Ap\,(x_2 u_2 - x_1 u_1),$$

in welcher t_2 die bei nachher eingetretenem Ruhezustande erreichte Endtemperatur bedeutet. Aus dieser Gleichung ergiebt sich für das Dampfgewicht x_2 der Werth:

$$5)\quad x_2 = \frac{c\,(t_1 - t_2) + x_1\,(\varrho_1 + A p u_1)}{\varrho_2 + A p u_2}.$$

Fig. 577.



Der nachherigen Temperatur t_2 entspricht ein Gleichgewichtsdruck p_2, welcher im Allgemeinen verschieden sein wird von dem vorherigen constanten Gegendrucke p. Denkt man sich die Volumen-Vergrösserung gerade so weit fortgesetzt, dass $p_2 = p$ wird, so ergiebt sich für diesen speciellen Fall die Gleichung:

$$6)\quad x_2 = \frac{c\,(t_1 - t_2) + x_1\,(\varrho_1 + A p_2 u_1)}{\varrho_2 + A p_2 u_2}.$$

Wenn z. B. der Anfangsdruck 10 Atmosphären betrug, und der äussere Druck plötzlich bis auf 1 Atmosphäre abnahm, so würde: $t_1 = 180{,}31$, $t_2 = 100$, $c = 1{,}023$, $\varrho_1 = 432{,}775$, $\varrho_2 = 496{,}3$, $u_1 = 0{,}1887$, $u_2 = 1{,}65$, $p_2 = 10\,333$ zu setzen sein, und man erhält für diesen Fall die Gleichung:

$$7)\quad x_2 = 0{,}1532 + 0{,}8152\,.\,x_1.$$

Für die beiden Volumina ergeben sich nunmehr nach den Gleichungen 7) und 8) des § 210 die Werthe:

$$8)\quad v_1 = 0{,}001 + 0{,}1887\,.\,x_1,$$

$$9)\quad v_2 = 0{,}254 + 1{,}345\,.\,x_1.$$

Hiernach würde man z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe erhalten:

$x_1 = 0$	0,1	0,5	0,829	1
$x_2 = 0,153$	0,235	0,561	0,829	0,968
$v_1 = 0,001$	0,01987	0,09535	0,1574	0,1897
$v_2 = 0,254$	0,3885	0,9265	1,115	1,599.

Diese Tabelle zeigt: dass eine Verdampfung eintritt, wenn x_1 kleiner als 0,829 war; eine Condensation dagegen, wenn x_1 grösser als 0,829 war.

Denkt man sich einen Dampfkessel ganz mit Wasser gefüllt, dessen Temperatur (dem Drucke von 10 Atmosphären entsprechend) 180°,31 Celsius beträgt, so ergiebt sich aus obiger Tabelle, dass bei dem Ausströmen des Wassers in den äusseren mit atmosphärischer Luft erfüllten Raum: 15,3 Procent der ganzen Wassermasse verdampfen würden, womit eine 254-fache Vergrösserung des Volumens verbunden sein würde. Wenn dagegen der Kessel ganz mit gesättigtem Dampfe von 10 Atmosphären gefüllt war, so werden: 3,2 Procent der ganzen Dampfmasse condensirt, und es findet eine 8,43-fache Vergrösserung des Volumens statt.

Die Gleichung 5) kann auch auf den Fall des Ausflusses in einen luftleeren Raum vom Volumen $v_2 - v_1$ angewendet werden. Man erhält für diesen Fall, indem man $p = 0$ setzt, die Gleichung:

$$10) \quad x_2 = \frac{c\,(t_1 - t_2) + x_1\,\varrho_1}{\varrho_2},$$

welche nach Substitution der oben beispielsweise gewählten Zahlenwerthe die folgende Form annimmt:

$$11) \quad x_2 = 0{,}16566 + 0{,}872\,.\,x_1.$$

Nach § 210 (Gleichung 8) entspricht diesem Dampfgewichte das Volumen:

$$12) \quad v_2 = 0{,}2743 + 1{,}4388\,.\,x_1.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für den hier als Beispiel gewählten Fall die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$x_1 = 0$	0,1	0,5	0,9568
$x_2 = 0,166$	0,253	0,602	1
$v_1 = 0,001$	0,01987	0,09535	0,18145
$v_2 = 0,274$	0,418	0,994	1,651.

Für einen Werth von x_1, welcher grösser ist als 0,9568, würde man aus Gleichung 11) für x_2 einen Werth erhalten, welcher

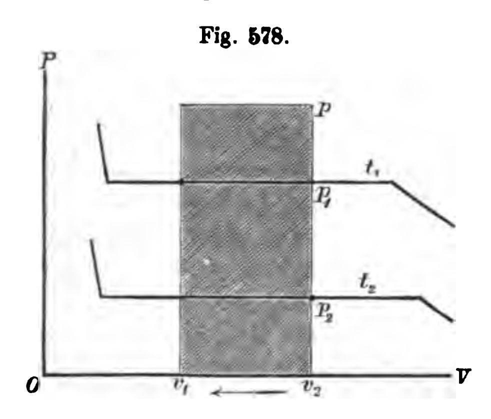
grösser ist als „Eins“, woraus zu schliessen ist, dass in diesem Falle der Dampf in den überhitzten Zustand übergehen würde. Die Gültigkeit der Gleichung 11) ist daher an die Bedingung geknüpft: dass $x_1 \leqq 0{,}9568$ war.

§ 214.

Compression bei plötzlicher Druck-Zunahme.

Die Gleichung 4) des vorigen Paragraphen kann auch auf den in Fig. 578 dargestellten Fall angewendet werden, bei welchem angenommen ist: dass der äussere Druck plötzlich von p_2 bis p zunahm und während des hierauf erfolgenden beschleunigten Vorrückens des Kolbens die constante Grösse p beibehielt. Während bei dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle die innere Wärme abnahm, findet hier eine Zunahme der inneren Wärme statt — und zwar um das Aequivalent der durch die schraffirte Rechteckfläche dargestellten Arbeit. Aus der Gleichung 4) des vorigen Paragraphen erhält man für das Dampfgewicht am Ende der Compression den Werth:

Fig. 578.



$$1)\quad x_1 = \frac{-c(t_1 - t_2) + x_2(\varrho_2 + A p u_2)}{\varrho_1 + A p u_1}.$$

Denkt man sich die Compression gerade so weit fortgesetzt, dass der nachherige Gleichgewichtsdruck p_1 gleich p wird, so ergiebt sich für diesen speciellen Fall die Gleichung:

$$2)\quad x_1 = \frac{-c(t_1 - t_2) + x_2(\varrho_2 + A p_1 u_2)}{\varrho_1 + A p_1 u_1}.$$

Wenn z. B. der äussere Druck plötzlich von 1 Atmosphäre bis auf 10 Atmosphären vergrössert wurde, und die Compression alsdann gerade so weit fortgesetzt wird, dass der nachherige Gleichgewichtsdruck ebenfalls 10 Atmosphären beträgt, so erhält man nach Substitution der im vorigen Paragraphen angegebenen

Werthe — indem man zugleich: $p_1 = 103\,330$ setzt — die Gleichung:

$$3)\quad x_1 = -0{,}1717 + 1{,}8762 \, . \, x_2 .$$

Für die beiden Volumina findet man auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen die Werthe:

$$4)\quad v_2 = 0{,}001 + 1{,}65 \, . \, x_2 ,$$

$$5)\quad v_1 = -0{,}0314 + 0{,}354 \, . \, x_2 .$$

Aus den letzteren drei Gleichungen ergeben sich die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$x_2 =$	0,625	0,5	0,196	0,1	0,0915
$x_1 =$	1	0,766	0,196	0,0159	0
$v_2 =$	1,03	0,826	0,324	0,166	0,151
$v_1 =$	0,19	0,146	0,038	0,004	0,001.

Diese Tabelle zeigt: dass mit der Compression eine Verdampfung verbunden sein wird, wenn x_2 grösser als 0,196 war, eine Condensation dagegen, wenn x_2 kleiner als 0,196 war. Dieselbe zeigt ferner — da x_1 weder grösser als 1, noch kleiner als 0 werden kann — dass die obigen Gleichungen nicht mehr als gültig zu betrachten sind, wenn x_2 entweder grösser als 0,625 oder kleiner als 0,0915 war. Im ersteren Falle würde die ganze Masse schon vor Beendigung der Compression im Zustande des überhitzten Dampfes sich befinden; im letzteren den tropfbar flüssigen Aggregat-Zustand angenommen haben.

Für diejenige Grösse x, welche das anfängliche Dampfgewicht x_2 haben musste, wenn bei der Compression weder Verdampfung noch Condensation stattfinden soll, erhält man aus Gleichung 2), indem man darin: $x_1 = x_2 = x$ setzt, den Werth:

$$6)\quad x = \frac{c\,(t_1 - t_2)}{\varrho_2 + A p_1 u_2 - (\varrho_1 + A p_1 u_1)} .$$

Nach § 203 (Gleichung 1) kann man diesem Ausdrucke, indem man zugleich: $\frac{p_1}{p_2} = n$ setzt, auch die folgende Form geben:

$$7)\quad x = \frac{c\,(t_1 - t_2)}{n\,(r_2 - \varrho_2) + \varrho_2 - r_1} .$$

Wenn der anfängliche Druck wieder gleich 1 Atmosphäre angenommen wird, so ist: $t_2 = 100$, $\varrho_2 = 496{,}3$, $r_2 = 536{,}5$ zu setzen, und für diesen Fall wird:

$$8)\quad x = \frac{c\,(t_1 - 100)}{n \, . \, 40{,}2 + 496{,}3 - r_1} .$$

Mit Benutzung der Tabelle des § 208 erhält man aus dieser Gleichung z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$$n = \quad 2 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 14$$
$$x = 0{,}381 \quad 0{,}27 \quad 0{,}196 \quad 0{,}166.$$

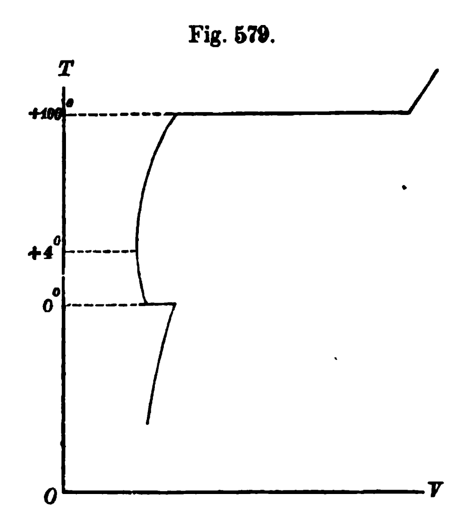
Wenn die anfängliche Dampfmenge grösser war, so findet Verdampfung statt; wenn dieselbe kleiner war, so findet Condensation statt. Dem Grenzfalle, in welchem weder Verdampfung noch Condensation stattfindet, entspricht — wie die obigen Zahlenwerthe zeigen — eine um so kleinere anfängliche Dampfmenge, je grösser die nachher erfolgende plötzliche Drucksteigerung ist.

§ 215.

Isobaren und Isothermen des Eisgebietes.

Wenn man durch die Temperaturfläche eine Ebene legt: parallel zur verticalen Temperatur-Achse und zur horizontalen Volumen-Achse (also rechtwinkelig zur horizontalen Druck-Achse), so erhält man als Durchschnittslinie der Temperaturfläche mit dieser Vertical-Ebene eine „Isobare" oder „Linie constanten Druckes". Eine solche Isobare enthält im Allgemeinen zwei geradlinige horizontale Strecken, von denen die obere dem Verdampfen, die untere dem Gefrieren des Wassers entspricht. Da die Horizontalcurven der Temperaturfläche die Isothermen darstellen, so ist von jenen beiden Horizontalstrecken eine jede zugleich eine isothermische Strecke. So z. B. fällt bei derjenigen Isobare, welche dem constanten Drucke von 1 Atmosphäre entspricht, die obere Horizontalstrecke mit der Isotherme von + 100°, die untere mit der Isotherme von Null Grad (Celsius) zusammen (Fig. 579). Die Länge der oberen Horizontalstrecke repräsentirt die beim Verdampfen eintretende (ungefähr 1650-fache) Volumen-Vergrösserung; die Länge der unteren Horizontalstrecke repräsentirt die beim Gefrieren

Fig. 579.



des Wassers stattfindende Volumen-Vergrösserung, welche letztere ungefähr 9 Procent beträgt. Denkt man sich durch einen Punkt der unteren Horizontalstrecke eine Verticale gelegt, so erkennt man: dass bei gegebenem Drucke einem und demselben Werthe des Volumens unter gewissen Umständen drei verschiedene Temperaturen entsprechen können, insofern die Linie constanten Druckes von jener Verticalen dreimal geschnitten wird.

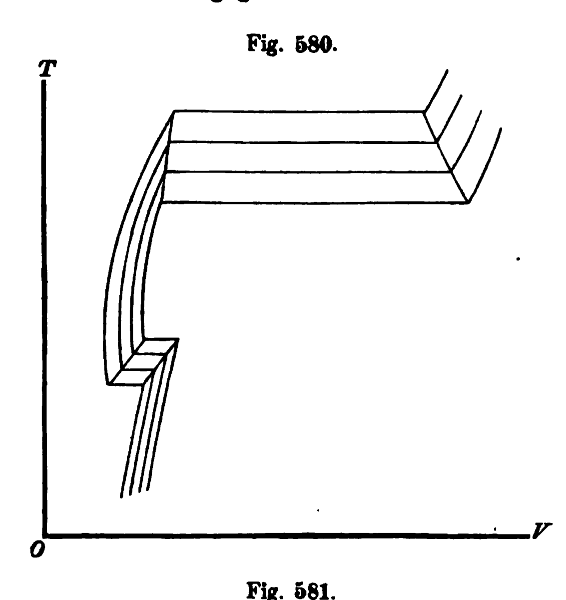


Fig. 580.

Fig. 581.

P
K L
J
N M
O V

Mit dem Wachsen des Druckes ist eine Zunahme der Temperatur des gesättigten Dampfes und eine Abnahme der Temperatur des schmelzenden Eises verbunden. In einer Linie von constantem Drucke, welcher mehr als 1 Atmosphäre beträgt, wird daher die obere Horizontalstrecke eine höhere, die untere dagegen eine tiefere Lage annehmen. Wenn man die Temperaturfläche wiederum als eine Gebirgsoberfläche sich vorstellen wollte, so würde der den Uebergang aus dem tropfbar flüssigen in den festen Aggregatzustand repräsentirende Theil des Gebirges als eine gesimsartig vorspringende und überhängende Felswand sich darstellen (Fig. 580).

Denkt man sich durch den unteren Theil dieses Temperatur-Gebirges eine horizontale Ebene gelegt, so erhält man als Durchschnittslinie derselben mit der Temperaturfläche eine Isotherme, welche ungefähr die in Fig. 581 dargestellte Form hat. Diese Isotherme hat — ebenso wie die Linie constanten Druckes — 4 Eckpunkte und zwei geradlinige Strecken, von deren Bedeutung man eine klare Vorstellung gewinnt, indem man sich die Wassermasse aus dem Zustande des überhitzten Dampfes durch isothermische Compression allmählich in den festen, und hernach in den tropfbar flüssigen Aggregatzustand übergeführt denkt. Der Eckpunkt M entspricht dem Uebergange des Dampfes aus dem überhitzten in den gesättigten Zustand. Die geradlinige Strecke MN veranschaulicht den allmählichen Uebergang aus dem dampfförmigen in den festen Aggregatzustand (Schneebildung). Der Eckpunkt L bezeichnet den Beginn des erst bei höherem Drucke eintretenden Schmelzens, und die geradlinige Strecke LK veranschaulicht den allmählichen Uebergang aus dem festen in den tropfbar flüssigen Aggregatzustand.

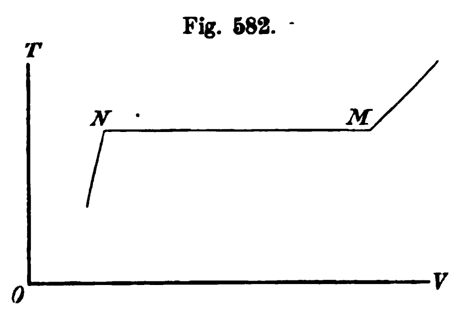
Die Isothermen des Eises unterscheiden sich also von den in Fig. 581 durch die punktirte Linie repäsentirten Isothermen der höheren Temperaturen dadurch: dass an der Stelle des einen Eckpunktes J bei den ersteren die drei Eckpunkte N, L, K auftreten. Den Uebergang von der ersteren zur letzteren Gruppe bildet eine bestimmte Isotherme, welche (wie in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll) um 0,007 44 Grad oberhalb der Isotherme von Null Grad (Celsius) liegt. Die letztere selbst ist also noch zu der Gruppe der Isothermen des Eises zu zählen. Jene Uebergangs-Isotherme von + 0,007 44 Grad entspricht derjenigen Temperatur, bei welcher eine Wassermasse gefrieren (oder eine Eismasse schmelzen) würde, wenn dieselbe unter dem Drucke des bei dieser Temperatur gebildeten Dampfes sich befände.

Während die Isothermen im Allgemeinen mit horizontalen Fusswegen auf der Oberfläche eines Gebirges verglichen werden konnten, erscheint dieser Vergleich hinsichtlich der Isothermen des Eises insofern nicht zutreffend: als die letzteren streckenweise an der Unterfläche einer überhängenden Felswand entlang laufen.

Der Temperatur von + 0,007 44 Grad (Celsius) entspricht ein Dampfdruck von 0,006 Atmosphären. Wenn man die in Fig. 580 angedeutete Construction der Linien constanten Druckes nach der Seite der kleineren Drücke weiter fortsetzte, so würde sich ergeben,

dass bei dem Drucke von 0,006 Atmosphären die beiden Horizontalstrecken zusammenfallen, insofern eine jede von beiden in die geradlinige Strecke der Isotherme von + 0,007 44 Grad hineinfällt. Bei noch kleinerem Drucke nimmt die Linie constanten Druckes die in Fig. 582 dargestellte Form an. Diese Linie enthält nur eine geradlinige horizontale Strecke MN, entsprechend dem directen Uebergange aus dem dampfförmigen in den festen Aggregatzustand.

Fig. 582.

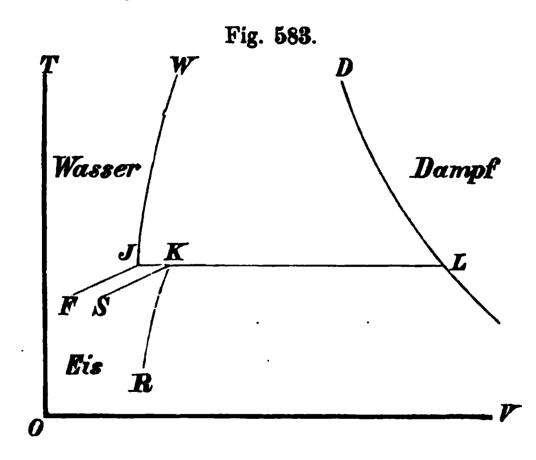


§ 216.

Kanten der Temperaturfläche des Wassers.

Denkt man sich in Fig. 580 die Construction der Isobaren, oder in Fig. 581 die Construction der Isothermen weiter fortgesetzt, so erkennt man: dass den Eckpunkten jener Linien die Kanten der Temperaturfläche entsprechen. Diese Kanten bilden zugleich die Grenzlinien für die drei Flächengebiete, welche den drei verschiedenen Aggregatzuständen entsprechen. Diese drei Gebiete grenzen jedoch nicht unmittelbar an einander; sondern dieselben sind durch drei Uebergangsgebiete von einander getrennt (Fig. 583). Jedes dieser drei Uebergangsgebiete hat die Form einer cylindrisch gekrümmten Fläche, deren erzeugende gerade Linie der Volumen-Achse parallel ist, erscheint also in der Richtung der letzteren gesehen als eine Linie. In Bezug auf die Wasserkante JW und die Dampfkante LD darf man annehmen: dass dieselben in einer bestimmten Höhe — entweder in einander

Fig. 583.



übergehen oder in der Fläche verlaufen; insofern bei sehr hohen Temperaturen höchst wahrscheinlich ein Unterschied zwischen tropfbar flüssigem und dampfförmigem Aggregatzustande überhaupt nicht mehr existirt.

Jedem bestimmten Punkte der Temperaturfläche entspricht ein bestimmtes Werthen-System der drei Coordinaten: p, v, T, und durch diese drei Werthe ist im Allgemeinen auch der Zustand der ganzen Masse eindeutig bestimmt. Einen bemerkenswerthen Ausnahmefall jedoch bildet die Gesammtheit derjenigen Punkte, welche in der geradlinigen Strecke JKL der Isotherme von + 0,007 44 Grad (oder der Isobare von 0,006 Atmosphären) liegen. Die in dieser geradlinigen Strecke liegenden Punkte entsprechen denjenigen Werthen des Druckes und der Temperatur, bei welchen das Wasser in allen drei Aggregatzuständen gleichzeitig existiren kann. Wenn zwar durch irgend einen gegebenen Punkt dieser Strecke auch: Druck, Temperatur und Volumen der ganzen Masse gegeben sind, so ist doch der innere Zustand derselben hierdurch noch keineswegs genügend bestimmt, insofern die Kenntniss des Gesammtvolumens noch nicht ausreicht zur Bestimmung des Verhältnisses, in welchem: Dampf, Wasser und Eis mit einander gemischt sind. Da die innere Wärme des Dampfes aber beträchtlich grösser ist als die des Wassers, und die des letzteren wiederum grösser als die des Eises, so ist mit der Lage jenes Punktes die innere Wärme des Gemisches noch keineswegs gegeben; vielmehr werden einem und demselben Punkte dieser Strecke unendlich viele verschiedene Werthe der inneren Wärme entsprechen können.

So würde z. B. der Punkt K dieser Strecke ebensowohl denjenigen Zustand bezeichnen können, in welchem eine Wassermasse von 1 Kil. Gewicht sich befindet, wenn in Folge des Gefrierens der ganzen Masse ihr Volumen um 9 Procent zugenommen hat, als auch denjenigen Zustand, in welchem diese Wassermasse sich befinden würde, wenn in Folge partieller Verdampfung ihr Volumen um 9 Procent sich vergrössert hätte. Im letzteren Zustande aber würde die Masse an innerer Wärme ungefähr 80 Wärme-Einheiten mehr enthalten als im ersteren Zustande.

Diese geradlinige isothermische und isobarische Strecke JKL (Fig. 583) bildet in ihrer ganzen Längen-Ausdehnung zugleich eine Kante der Temperaturfläche, und da diese Kante vor allen übrigen Linien und Kanten der Temperaturfläche durch die oben ge-

nannten bemerkenswerthen Eigenschaften sich auszeichnet, so soll dieselbe im Folgenden: „die Hauptkante der Temperaturfläche" genannt werden.

Die Dampfkante LD könnte man auch die „Nebelkante" nennen, insofern die beginnende Condensation durch Nebelbildung sich charakterisirt, und die Wasserkante JW könnte man die „Regenkante" oder die „Thaukante" nennen, insofern das Product der vollendeten Condensation als Regen oder Thau sich darstellt. Die Kante FJ kann aufgefasst werden als diejenige Linie, in welcher das Gefrieren des Wassers beginnt, und aus diesem Grunde die „Frostkante" genannt werden. Die Kante SK kann aufgefasst werden als diejenige Linie, in welcher das Schmelzen des Eises beginnt, und aus diesem Grunde die „Schmelzkante" genannt werden. Die Kante RK kann die „Reifkante" oder „Schneekante" genannt werden, insofern das Product des directen Ueberganges aus dem dampfförmigen in den festen Aggregatzustand als Reif oder Schnee sich darstellen würde.

§ 217.

Flächenwinkel an der Hauptkante.

Nach dem Clapeyron-Clausius'schen Gesetze (§ 202, Gleichung 5) kann die Beziehung zwischen Druck und Temperatur des gesättigten Wasserdampfes ausgedrückt werden durch die Differenzialgleichung:

$$1) \quad \frac{dp}{dT} = \frac{r}{A u T}.$$

Dem Werthe $T = 273$ (oder $t = 0$) entsprechen nach den Tabellen des § 208 und des § 209 die Werthe: $r = 606{,}5$ und $u = 210{,}66$. In der Isotherme von Null Grad (Celsius) nimmt also der obige Differenzialquotient den folgenden Werth an:

$$2) \quad \frac{dp}{dT} = \frac{424 \,.\, 606{,}5}{210{,}66 \,.\, 273} = 4{,}4715,$$

von welchem der für die Isotherme $+ 0{,}00744$ Grad zu berechnende Werth desselben nur um eine verschwindend geringe Grösse verschieden ist.

Die in § 202 für den Uebergang aus dem tropfbar flüssigen in den dampfförmigen Aggregatzustand gefundene Gleichung 5) darf auch für den Uebergang aus dem festen in den tropfbar flüssigen Aggregatzustand als gültig betrachtet werden, sobald darin

statt „u“: die beim Schmelzen eintretende (negative) Volumen-Vergrösserung und statt „r“: die Schmelzwärme des Eises substituirt wird.

Bei atmosphärischem Drucke und der diesem Drucke entsprechenden Schmelztemperatur von Null Grad (Celsius) hat die Schmelzwärme des Eises die Grösse:

$$3) \quad l = 80,$$

d. h. es würde bei diesem Drucke eine Zuführung von 80 Wärme-Einheiten erforderlich sein, um 1 Kilogramm Eis von der Temperatur Null Grad (Celsius) in Wasser von der Temperatur Null Grad zu verwandeln. Beim Schmelzen vermindert sich das Volumen der Masse um die Grösse:

$$4) \quad \mathfrak{u} = 0{,}001\,09 - 0{,}001 = 0{,}000\,09 \text{ Cubikmeter},$$

und der auf die Raumverminderung fördernd einwirkende atmosphärische Druck verrichtet hierbei die mechanische Arbeit:

$$5) \quad \mathfrak{A} = 10\,333 \,.\, 0{,}000\,09 = 0{,}93 \text{ Meterkilogramm}.$$

Diese mechanische Arbeit liefert — in Wärme verwandelt — einen Beitrag von 0,002 2 Wärme-Einheiten zu derjenigen Wärme-Quantität, welche von der schmelzenden Masse als innere Wärme aufgenommen wird. Da dieser Beitrag einen verschwindend kleinen Bruchtheil von dem ganzen Zuwachse der inneren Wärme bildet, so darf man ohne Bedenken jene äussere Arbeit ganz unberücksichtigt lassen und annehmen: dass bei der Temperatur von Null Grad ein Kilogramm Wasser l Wärme-Einheiten mehr enthält als ein Kilogramm Eis, oder dass die innere latente Wärme des Wassers dieselbe Grösse hat wie die Schmelzwärme des Eises.

Wenn man in der Gleichung 1) nunmehr „$-\mathfrak{u}$“ an die Stelle von „$+u$“ und „l“ statt „r“ setzt, so erhält man für die Beziehung zwischen „Druck“ und „Schmelztemperatur“ die folgende Differenzialgleichung:

$$6) \quad \frac{dp}{dT} = -\frac{l}{A\mathfrak{u}T},$$

in welcher die Grössen l und $\mathfrak{u}$ als Functionen von T zu betrachten sind. Der Temperatur $T = 273^\circ$ entsprechen die in den Gleichungen 3) und 4) angegebenen Werthe, und nach Substitution derselben erhält man für den obigen Differenzialquotienten den Werth:

$$7) \quad \frac{dp}{dT} = -\frac{424 \,.\, 80}{0{,}000\,09 \,.\, 273} = -1\,380\,545.$$

Einer Druck-Vergrösserung um 1 380 545 Kil. (oder 133,6 Atmosphären) würde hiernach eine Erniedrigung der Schmelztemperatur um 1 Grad (Celsius) entsprechen, wenn angenommen werden dürfte, dass der Differenzialquotient $\frac{dp}{dT}$ bei dieser Temperatur-Aenderung den obigen constanten Werth beibehält. In Bezug auf den zwischen der Frostkante und der Schmelzkante liegenden Flächenstreifen, welcher das Gemisch von Eis und Wasser repräsentirt (Fig. 583), ergiebt sich hieraus, dass derselbe in der Nähe der Hauptkante um einen sehr kleinen Neigungswinkel von der Horizontal-Ebene abweicht, insofern einer sehr beträchtlichen Druck-Vergrösserung eine äusserst geringe Senkung der Isotherme des Schmelzpunktes entspricht.

Einer Druck-Verminderung um 1 Kil. würde nach Gleichung 7) eine Erhöhung der Schmelztemperatur um $\frac{1}{1\,380\,545}$ Grad entsprechen. Wenn also der Druck von der Grösse: $p = 10\,333$ Kil. abnimmt bis zu der Grösse: $p = 62{,}58$ Kil., so steigt der Schmelzpunkt von der Isotherme: $t =$ Null Grad bis zu der Isotherme:

$$8)\quad t = \frac{10\,333 - 62{,}58}{1\,380\,545} = +\,0{,}007\,44.$$

Da bei dieser Temperatur der Druck des gesättigten Wasserdampfes ebenfalls: 62,58 Kil. (oder 0,006 Atmosphären) beträgt, so ergiebt sich hieraus in Bezug auf die Lage der Hauptkante: dass dieselbe — wie oben behauptet wurde — zusammenfällt mit der geradlinigen Strecke der Isotherme von + 0,007 44 Grad und der Isobare von 0,006 Atmosphären.

Die Reifkante RK (Fig. 583) kann aufgefasst werden als diejenige Linie, in welcher der directe Uebergang des Eises in den dampfförmigen Zustand beginnt. Um die Gleichung 5) des § 202 auf die Verdampfung des Eises anzuwenden, hat man „$r + l$" an die Stelle von „r" zu setzen, und „$u - \mathfrak{u}$" an die Stelle von „u" zu setzen; man erhält dann für die Beziehung zwischen Druck und Verdampfungstemperatur des Eises die Differenzialgleichung:

$$9)\quad \frac{dp}{dT} = \frac{r + l}{A\,(u - \mathfrak{u})\,T}.$$

In der Isotherme von Null Grad (Celsius) nimmt dieser Differenzialquotient den folgenden Werth an:

$$10)\quad \frac{dp}{dT} = \frac{424\,(606{,}5 + 80)}{(210{,}66 - 0{,}000\,09)\,273} = 5{,}06,$$

von welchem der für die Isotherme von + 0,007 44 Grad zu berechnende Werth desselben nur um eine verschwindend kleine Grösse verschieden ist. Die Vergleichung dieses Werthes mit dem in Gleichung 2) für diesen Differenzialquotienten gefundenen Werthe zeigt, dass die Hauptkante JKL (Fig. 583) in dem Theile KL eine einspringende Kante bildet, während dieselbe in dem Theile JK eine vorspringende Kante bildet.

§ 218.

Discontinuität beim Ueberschreiten der Hauptkante.

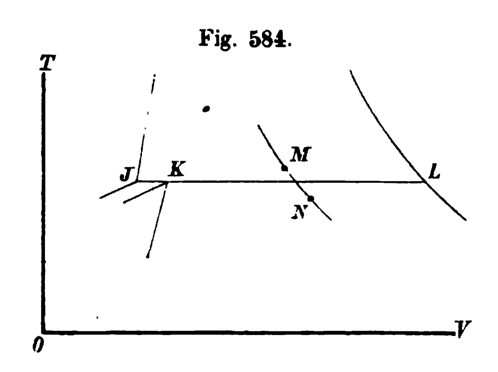
Im Allgemeinen wird eine gegebene Zustands-Aenderung stets aufgefasst werden können als Bewegung eines Punktes längs einer bestimmten Linie in der Temperaturfläche. In der Form dieser Bahnlinie prägt sich das Gesetz aus, nach welchem die Zustands-Aenderung erfolgt.

Wenn in jedem Punkte der Temperaturfläche durch die zugehörigen Werthe der drei Coordinaten mit der Lage des Punktes zugleich auch der Zustand der Masse eindeutig bestimmt wäre, so könnte eine jede zusammenhängende Linie in der Temperaturfläche als Repräsentant einer stetigen Zustands-Aenderung betrachtet werden, insofern der Zurücklegung eines unendlich kleinen Weges-Elementes immer nur unendlich kleine Aenderungen aller derjenigen Grössen entsprechen würden, welche den Zustand der Masse charakterisiren. Auch an solchen Stellen, wo jene Linie etwa eine Kante der Temperaturfläche durchschneidet, würde dieselbe immer noch als Darstellung einer stetigen Zustands-Aenderung gelten können, obwohl das Gesetz derselben beim Ueberschreiten der Kante im Allgemeinen eine plötzliche Aenderung erleiden wird.

Nach § 216 repräsentirt die Hauptkante in ihrer ganzen Längen-Ausdehnung von J bis L den singulären Ausnahmefall, in welchem die oben erwähnte Vorbedingung nicht erfüllt ist. Jedem bestimmten gegebenen Punkte der Hauptkante entspricht zwar ein bestimmtes Werthen-System der drei Coordinaten: p, v, T; aber jedem von diesen Werthen-Systemen können unendlich viele verschiedene Werthe der inneren Wärme U entsprechen. Es kann also hier eine Zustands-Aenderung stattfinden, ohne von gleichzeitiger Aenderung der Coordinaten begleitet zu sein.

Wenn man das die Hauptkante durchschneidende unendlich kleine Linienstück MN als Bahn-Element des in der Temperaturfläche sich bewegenden Zustandspunktes betrachtet, so ergiebt sich, dass bei dem Uebergange von M nach N die Grösse U sprungweise aus einem grösseren in einen kleineren Werth übergeht, während Druck, Volumen und Temperatur gleichzeitig nur unendlich kleine Aenderungen erleiden (Fig. 584). Der unmittelbar oberhalb der Hauptkante liegende Anfangspunkt M repräsentirt ein Gemisch von Wasser und Dampf; der unmittelbar unterhalb derselben liegende Endpunkt N repräsentirt ein Gemisch von Eis und Dampf. Jedem dieser beiden Punkte entspricht ein bestimmter Werth von U, und diese beiden Werthe sind um eine endliche Grösse von einander verschieden, welche einen Maximalwerth von mehr als 80 Wärme-Einheiten erreicht, wenn die Uebergangsstelle nach dem Punkte K hin verlegt wird. Einer stetigen Aenderung der Grösse U würde eine discontinuirliche Bewegung des Zustandspunktes entsprechen. Derselbe würde bei seiner Ankunft an der Uebergangsstelle plötzlich zum Stillstande gelangen, um an dieser Stelle so lange zu verweilen, bis jene Aenderung der Grösse U sich vollzogen hat, und erst nach Beendigung derselben seine Bewegung längs des unterhalb der Hauptkante liegenden Theiles der Bahnlinie weiter fortsetzen.

Fig. 584.



Zur Veranschaulichung dieser Discontinuität könnte man sich die Temperaturfläche längs der ganzen Länge der Hauptkante aufgeschnitten denken und die letztere als eine aus zwei unendlich nahe bei einander liegenden Parallelkanten zusammengesetzte Doppelkante auffassen.*) Die zwei Parallelkanten kann man sich durch eine Kluft getrennt denken, deren Tiefe an der Stelle K ein Maximum erreicht und von da nach beiden Seiten hin bis Null abnimmt — wobei jedoch der Ausdruck „Tiefe" nicht im räumlichen, sondern im figürlichen Sinne zu deuten sein würde.

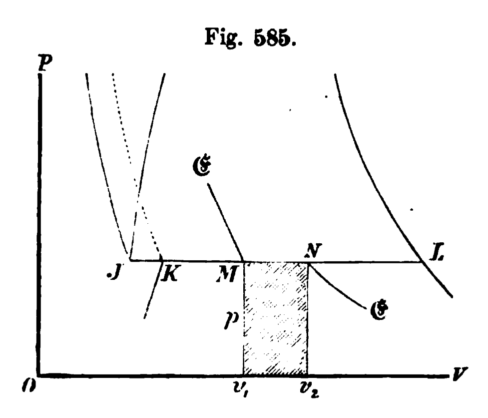
*) Vergl. C. Neumann: „Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme". S. 159.

§ 219.

Adiabatische Ueberschreitung der Hauptkante.

Bei adiabatischer Ausdehnung eines Gemisches von Wasser und Dampf nehmen Temperatur und Druck stetig ab bis zu dem Augenblicke, in welchem die sinkende Temperatur den Werth + 0,007 44 Grad (Celsius) erreicht. In diesem Augenblicke beginnt das Wasser zu gefrieren, und die hierbei frei werdende Wärme wird ein ferneres Sinken der Temperatur so lange verhindern, als noch ein Theil der Masse im tropfbar flüssigen Zustande sich befindet. Die Adiabate 𝔈𝔈 wird daher an der Stelle M, wo dieselbe die Hauptkante erreicht, einen Eckpunkt bilden, und das nun folgende Stück der Adiabate wird als geradlinige horizontale Strecke mit der Hauptkante selbst zusammenfallen (Fig. 585). Nachdem das Gemisch von Wasser und Dampf in ein Gemisch von Eis und Dampf sich verwandelt hat, beginnen Druck und Temperatur von Neuem zu sinken. Der Endpunkt der horizontalen Strecke MN bildet daher einen zweiten Eckpunkt der Adiabate.

Fig. 585.



Die Bewegung des Zustandspunktes längs der horizontalen Strecke MN repräsentirt eine Zustands-Aenderung, bei welcher ein Theil des Wassers gefriert, während gleichzeitig der andere Theil in Dampf verwandelt wird. Die beim Gefrieren des ersteren frei werdende Wärme-Quantität wird zur Verdampfung des letzteren in Anspruch genommen. Wenn mit x_1 das dem Anfangspunkte M entsprechende Dampfgewicht bezeichnet wird, und mit x_2 die Grösse, welche das Dampfgewicht am Ende jener Zustands-Aenderung erreicht hat, so ist $1 - x_2$ das Gewicht des gefrierenden Theiles, und $x_2 - x_1$ das Gewicht des verdampfenden Theiles der ursprünglich vorhanden gewesenen Wassermasse. Die Verdampfung des letzteren Theiles erfordert die Wärme-Quantität:

$$1)\quad Q = r(x_2 - x_1),$$

und die beim Gefrieren des ersteren Theiles frei werdende Wärme-Quantität hat eben dieselbe Grösse:

2) $Q = l(1 - x_2)$.

Durch Gleichsetzung der obigen beiden Werthe erhält man eine Gleichung, welche für x_2 aufgelöst die folgende Form annimmt:

3) $x_2 = \frac{l + r x_1}{l + r}$.

Der Verwandlung von $x_2 - x_1$ Kil. Wasser in Dampf entspricht eine Volumen-Zunahme von der Grösse:

4) $v_2 - v_1 = u(x_2 - x_1)$,

und die hierbei von dem Dampfdrucke verrichtete mechanische Arbeit hat die Grösse:

5) $\mathfrak{A} = p u (x_2 - x_1)$.

Dieser in Fig. 585 durch die schraffirte Rechteckfläche dargestellten Arbeit entspricht die Wärme-Quantität:

6) $q = A p u (x_2 - x_1)$.

Der Temperatur: $t = +0{,}007\,44$ entsprechen die Werthe: $r = 606{,}5$, $l = 80$, $p = 62{,}58$, $u = 210$; und nach Substitution dieser Werthe kann man den obigen Gleichungen auch die folgenden Formen geben:

7) $x_2 = 0{,}1165 + 0{,}8835 \,.\, x_1$,

8) $v_2 - v_1 = 24{,}5\,(1 - x_1)$,

9) $q = 3{,}61\,(1 - x_1)$.

Wenn anfangs die ganze Masse im tropfbar flüssigen Zustande sich befand, so ist $x_1 = 0$ zu setzen, und man erhält für diesen Fall die Werthe: $x_2 = 0{,}1165$, $v_2 - v_1 = 24{,}5$, $q = 3{,}61$. Bei adiabatischem Uebergange eines Kilogramms Wasser in ein Gemisch von Eis und Dampf werden also 0,1165 Kil. verdampfen und 0,8835 Kil. gefrieren. Das Volumen wächst hierbei um 24,5 Cubikmeter, und von der inneren Wärme werden 3,61 Wärme-Einheiten in äussere Arbeit umgewandelt.

§ 220.

Zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie.

In § 202 wurde für die isothermische Zustands-Aenderung eines Gemisches von Wasser und Dampf aus dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie die Gleichung abgeleitet:

1) $A \varkappa \, dp = \frac{Q \, dT}{T}$.

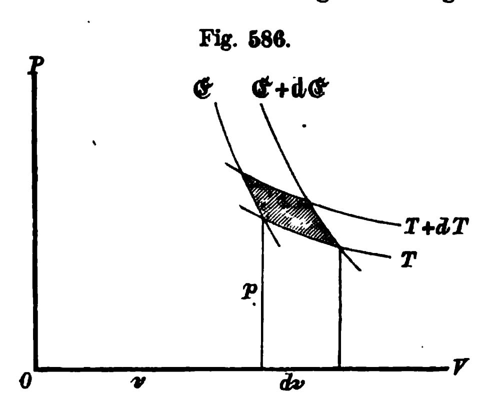
In dieser Gleichung bedeutete Q die zum Hervorbringen der isothermischen Volumen-Vergrösserung z erforderliche Wärme-Quantität, und der Ausdruck auf der linken Seite bedeutete das Wärme-Aequivalent der in Fig. 568 durch den schraffirten Flächenstreifen geometrisch dargestellten Arbeitsgrösse. Der Flächeninhalt dieses Streifens konnte berechnet werden wie die Fläche eines Rechtecks von der Höhe $\frac{dp}{dT}dT$ und der Grundlinie z.

Für den Fall einer unendlich kleinen Volumen-Vergrösserung würde man dv statt z und demgemäss dQ statt Q zu setzen haben; man erhält dann die Gleichung:

$$2)\quad A\,dv\frac{dp}{dT}dT = \frac{dQ\,dT}{T}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung in dieser letzteren Form nicht nur für den in Fig. 568 dargestellten Fall der geradlinigen Isothermen des Gemisches von Wasser und Dampf, sondern auch für den in Fig. 586 dargestellten Fall der krummlinigen Isothermen eines beliebigen anderen Körpers ihre Gültigkeit behält, insofern auch hier der Inhalt der schraffirten Viereckfläche berechnet werden kann wie der Inhalt eines Rechtecks von der Höhe $\frac{dp}{dT}dT$ und der Grundlinie dv. Für die zum Hervorbringen der unendlich kleinen isothermischen Volumen-Vergrösserung dv erforderliche Wärme-Quantität ergiebt sich aus obiger Gleichung der Werth:

Fig. 586.



$$3)\quad dQ = A\,T\left(\frac{dp}{dT}\right)dv.$$

Einen anderen Ausdruck für diese Wärme-Quantität kann man aus der Gleichung 5) des § 180 ableiten, indem man dieselbe auf den speciellen Fall der isothermischen Zustands-Aenderung anwendet und demgemäss für die Grösse dp den aus der Gleichung:

$$4)\quad 0 = \left(\frac{dT}{dp}\right)dp + \left(\frac{dT}{dv}\right)dv$$

zu entnehmenden Werth in jener Gleichung substituirt; man erhält dann die Gleichung:

$$5)\quad dQ = (c_p - c_v)\left(\frac{dT}{dv}\right) dv,$$

in welcher c_p die specifische Wärme bei constantem Drucke, und c_v die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet. Die Gleichsetzung der obigen beiden Ausdrücke für dQ führt alsdann zu einer Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$6)\quad AT = (c_p - c_v)\left(\frac{dT}{dp}\right)\left(\frac{dT}{dv}\right).^{*)}$$

Diese Gleichung zeigt: dass von den beiden Grössen c_p und c_v die eine allemal aus der anderen berechnet werden kann, sobald die Gleichung der Temperaturfläche für den betreffenden Körper gegeben ist.

So z. B. würde für die atmosphärische Luft: $pv = RT$, folglich: $\frac{dT}{dp} = \frac{v}{R}$ und $\frac{dT}{dv} = \frac{p}{R}$ zu setzen sein. Für die beiden specifischen Wärmen der Luft erhält man alsdann die früher bereits mehrfach angewendete Gleichung (§ 179, Gleichung 11): $AR = c_p - c_v$, welche man benutzen könnte, um die eine von diesen beiden Grössen auf dem Wege der Rechnung zu bestimmen, nachdem die andere direct auf experimentellem Wege gefunden war.

Wenn man nunmehr die Gleichung 9)' des § 178 und die Gleichung 5) des § 180 auf die Weise mit einander verbindet: dass man in der letzteren das eine Mal für dp, das andere Mal für dv den aus der ersteren zu entnehmenden Ausdruck substituirt, so erhält man die Gleichungen:

$$7)\quad dQ = c_v\, dT + (c_p - c_v)\left(\frac{dT}{dv}\right) dv,$$

$$8)\quad dQ = c_p\, dT - (c_p - c_v)\left(\frac{dT}{dp}\right) dp,$$

welchen man mit Benutzung des aus Gleichung 6) für die Grösse $c_p - c_v$ zu entnehmenden Werthes auch die folgenden Formen geben kann:

$$9)\quad dQ = c_v\, dT + \frac{AT}{\left(\frac{dT}{dp}\right)} dv,$$

$$10)\quad dQ = c_p\, dT - \frac{AT}{\left(\frac{dT}{dv}\right)} dp.$$

---

*) Clausius: „Mechanische Wärmetheorie". 2. Aufl. I. Band. S. 188.

§ 221.

Gemisch von zwei verschiedenen Gasarten.*)

Wenn in einem und demselben Raume zwei verschiedene Gasarten eingeschlossen sind, deren jede für sich allein bestehend dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze gemäss sich verhalten würde, so darf man annehmen, dass auch nach eingetretener Mischung der beiden Gase jenes Gesetz seine Gültigkeit behält — nicht nur für das Gemisch im Ganzen, sondern auch für jeden der beiden Bestandtheile einzeln genommen. Als Beispiel kann die reine atmosphärische Luft gelten, welche aus einem Gemisch von Sauerstoff und Stickstoff besteht. Den Werth, welchen die Constante des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes für ein solches Gemisch annimmt, kann man — sobald die Werthe dieser Constanten für die beiden Bestandtheile bekannt sind — auf folgende Weise berechnen.

Wenn mit γ das Gewicht der Cubikeinheit und mit v das Volumen der Gewichtseinheit bezeichnet wird, so ist: $\gamma v = 1$ zu setzen; man kann daher der Mariotte-Gay-Lussac'schen Gleichung, indem man dieselbe zunächst auf das Gemisch im Ganzen anwendet, auch die folgende Form geben:

$$1)\quad \frac{p}{\gamma T} = R.$$

In gleicher Weise gelten für die beiden Bestandtheile resp. die Gleichungen:

$$2)\quad \frac{p_1}{\gamma_1 T_1} = R_1, \qquad 3)\quad \frac{p_2}{\gamma_2 T_2} = R_2.$$

Da jede von den beiden Gasmassen den Raum gerade so erfüllt, auch gegen die Gefässwände auf dieselbe Weise drückt, wie wenn die andere nicht vorhanden wäre, so ist ferner:

$$4)\quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$5)\quad p = p_1 + p_2$$

zu setzen, und nach Substitution dieser Werthe nimmt Gleichung 1) die folgende Form an:

---

*) Bei den nachstehenden Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf die Vorgänge in der Erd-Atmosphäre wurden die folgenden Werke als Grundlage benutzt: Reye: „Die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erd-Atmosphäre". Hannover. Carl Rümpler. 1872. Mohn und Guldberg: „Études sur les mouvements de l'atmosphère". Christiania. W. Brögger. 1876.

$$6)\quad \frac{p_1 + p_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)\, T} = R.$$

Da überall gleiche Temperatur vorausgesetzt wird, so ist: $T_1 = T_2 = T$ zu setzen. Aus den beiden Gleichungen 2) und 6) erhält man demnach, indem man letztere durch erstere dividirt, die folgende Gleichung:

$$7)\quad \frac{1 + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = \frac{R}{R_1}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich für das Verhältniss der beiden Einzeldrücke aus den Gleichungen 2) und 3) der Werth:

$$8)\quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{R_2}{R_1},$$

und nach Substitution desselben nimmt die vorige Gleichung die folgende Form an:

$$9)\quad \frac{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = \frac{R}{R_1}.$$

Wenn also abkürzungsweise: $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = x$ und $\frac{R_2}{R_1} = \varepsilon$ gesetzt wird, so ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$10)\quad \frac{R}{R_1} = \frac{1 + \varepsilon x}{1 + x}.$$

Die Grösse x kann als das Verhältniss der absoluten Gewichte, die Grösse ε als das Verhältniss der specifischen Volumina (oder als das umgekehrte Verhältniss der specifischen Gewichte) der beiden Bestandtheile aufgefasst werden. Die Bedeutung der ersteren Grösse ergiebt sich aus der Gleichung:

$$11)\quad x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\gamma_2 v}{\gamma_1 v} = \frac{G_2}{G_1},$$

in welcher mit G_1 und G_2 resp. die absoluten Gewichte der beiden Bestandtheile bezeichnet sind. Die Bedeutung der Grösse ε ergiebt sich aus der Gleichung:

$$12)\quad \varepsilon = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{p_2}{\gamma_2 T_2}}{\frac{p_1}{\gamma_1 T_1}},$$

welche zeigt, dass die Grösse ε das umgekehrte Verhältniss der beiden Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte darstellen würde, wenn ausser den Temperaturen auch die Drücke in beiden Gasarten dieselben wären. Da bei Vergleichung der specifischen Gewichte zweier Gasarten stets gleiche Drücke und gleiche Temperaturen vorausgesetzt werden, so kann die Grösse ε als das umgekehrte Verhältniss der specifischen Gewichte der beiden Gasarten definirt werden.

Wenn mit c die specifische Wärme des Gemisches bezeichnet wird (für constanten Druck), so ist:

$$13)\quad c\gamma = c(\gamma_1 + \gamma_2)$$

die Wärme-Quantität, welche der Cubikeinheit des Gemisches eine Temperaturerhöhung von 1 Grad Celsius ertheilen würde. Diese Wärme-Quantität ist gleich der Summe der beiden Wärme-Quantitäten, welche auf gleiche Weise für jede einzelne der beiden Gasarten sich ergiebt; folglich ist:

$$14)\quad c(\gamma_1 + \gamma_2) = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2, \quad \text{oder:}$$

$$15)\quad c\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) = c_1\left(1 + \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right).$$

Wenn man also abkürzungsweise das Verhältniss $\frac{c_2}{c_1}$ mit η bezeichnet, so erhält man mit Benutzung der in Gleichung 11) eingeführten Bezeichnung für die specifische Wärme des Gemisches die Gleichung:

$$16)\quad \frac{c}{c_1} = \frac{1 + \eta x}{1 + x}.$$

§ 222.

Gemisch von atmosphärischer Luft und überhitztem Wasserdampf.

Das Gewicht des in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampfes bildet unter gewöhnlichen Umständen einen verhältnissmässig so kleinen Bruchtheil vom Gewichte der Luft — und überdies sind es verhältnissmässig so niedrige Temperaturen, welche hier in Betracht kommen — dass man im vorliegenden Falle ohne Bedenken den Wasserdampf, so lange derselbe im überhitzten Zustande sich befindet, wie ein vollkommenes Gas behandeln darf. Sowohl für das Gemisch im Ganzen, als auch für jeden der beiden Bestandtheile einzeln genommen, darf man demgemäss das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz als gültig betrachten.

Da die specifische Wärme der vollkommenen Gase einen constanten Werth hat, so wird durch die obige Behandlungsweise die Annahme eines passenden Mittelwerthes für die (in Wirklichkeit veränderliche) specifische Wärme des Wasserdampfes bedingt. Obwohl der von Regnault gefundene Mittelwerth:

$$1)\quad c_p = 0{,}48$$

streng genommen nur für Wasserdampf von atmosphärischem Drucke bei Temperaturen zwischen + 122,7 und + 316 Grad (Celsius) als gültig betrachtet werden dürfte, so wird man doch in Ermangelung anderer Versuchsresultate genöthigt sein, den obigen Werth einstweilen auch für solche Temperaturen und Drücke, wie sie bei dem atmosphärischen Wasserdampfe vorkommen, als Mittelwerth zu benutzen. Die im vorigen Paragraphen mit η bezeichnete Verhältnisszahl nimmt also für den vorliegenden Fall den folgenden Werth an:

$$2)\quad \eta = \frac{c_2}{c_1} = \frac{0{,}48}{0{,}2375} = 2{,}023,$$

und nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung erhält man für die specifische Wärme des Gemisches von Luft und Dampf den Werth:

$$3)\quad c = 0{,}2375\left(\frac{1 + 2{,}023 \,.\, x}{1 + x}\right).$$

Das Verhältniss des specifischen Gewichtes der trockenen Luft zum specifischen Gewichte des Wasserdampfes hat die Grösse:

$$4)\quad \varepsilon = \frac{1}{0{,}622} = 1{,}608.$$

Nach Gleichung 10) des vorigen Paragraphen hat also für ein Gemisch von 1 Kil. atmosphärischer Luft und x Kil. Wasserdampf die Constante des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes die Grösse:

$$5)\quad R = 29{,}27\left(\frac{1 + 1{,}608 \,.\, x}{1 + x}\right).$$

Für den Fall, dass die Grösse x nicht direct gegeben ist, kann man dieselbe aus dem gegebenen Dampfdrucke p_2 und dem gleichfalls gegebenen Totaldrucke p auch auf folgende Weise berechnen. Nach der Gleichung 8) des vorigen Paragraphen ist:

$$6)\quad \frac{p_2}{p_1} = \varepsilon x$$

zu setzen, und mit Benutzung dieses Werthes erhält man für das

Verhältniss: $\frac{p_2}{p}$, welches abkürzungsweise mit ω bezeichnet werden soll, die Gleichung:

$$7)\quad \omega = \frac{p_2}{p_1 + p_2} = \frac{\varepsilon x}{1 + \varepsilon x},$$

welche für die Grösse x aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$8)\quad x = \frac{\omega}{\varepsilon(1 - \omega)} = \frac{0{,}622 \,.\, \omega}{1 - \omega}.$$

In dieser Gleichung bedeutet ω das Verhältniss des vom Hygrometer angezeigten Dampfdruckes zu dem vom Barometer angezeigten Totaldrucke der dampfhaltigen atmosphärischen Luft.

Die Grössen x und ω erreichen ihre relativen Maximalwerthe, wenn die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist, für welchen Fall die Grösse p_2, als Druck des gesättigten Wasserdampfes bei gegebener Temperatur, nach der Tabelle des § 207 bestimmt werden kann. Hiernach erhält man z. B. für den Barometerstand von 760^{mm} (entsprechend dem Totaldrucke: $p = 10\,333$ Kil.) die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe:

T =	243	253	263	273	283	293	303
$\omega_{(max)}$ =	0,000 508	0,001 22	0,002 75	0,006 05	0,012 06	0,022 88	0,041 51
$x_{(max)}$ =	0,000 316	0,000 76	0,001 72	0,003 79	0,007 59	0,014 57	0,026 94.

Die absoluten Werthe der Grössen x und ω können um so grösser werden, je kleiner der Totaldruck ist. So z. B. würden für den Barometerstand von 76 Millimetern (entsprechend dem Totaldrucke: $p = 1033{,}3$ Kil.) die folgenden Maximalwerthe sich ergeben:

T =	243	273	303
$\omega_{(max)}$ =	0,005 08	0,0605	0,4151
$x_{(max)}$ =	0,003 176	0,040	0,4414.

Nach Substitution des aus Gleichung 8) für x zu entnehmenden Werthes kann man dem in Gleichung 5) für die Constante R gefundenen Ausdrucke auch die folgende Form geben:

$$9)\quad R = \frac{29{,}27}{1 - 0{,}378 \,.\, \omega}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man für die Grössen ω und R z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

ω =	0	0,006 05	0,012 06	0,022 88	0,041 51
R =	29,27	29,34	29,40	29,53	29,74.

Mit Benutzung des auf solche Weise für die Constante R zu berechnenden Werthes kann man nunmehr die Mariotte-Gay-Lussac'sche Gleichung:

$$10)\quad \frac{p}{\gamma T} = R$$

auch auf die Zustandsänderungen der dampfhaltigen Luft anwenden — vorausgesetzt, dass bei diesen Zustandsänderungen keine Condensation eintritt.

§ 223.

Adiabatische Zustandsänderung der dampfhaltigen Luft.

Nach dem Poisson'schen Gesetze kann bei adiabatischer Zustandsänderung eines vollkommenen Gases die Beziehung zwischen Druck und Temperatur dargestellt werden durch die Gleichung:

$$1)\quad \frac{p}{T^{\mu}} = \text{Const.} = \frac{p_0}{T_0^{\mu}}.$$

Hierin bedeutet μ eine Constante, für welche (nach § 180 und § 179) der folgende Werth einzusetzen ist:

$$2)\quad \mu = \frac{k}{k-1} = \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{c_p}{AR}.$$

Nach der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungsweise hat man also für dampfhaltige Luft den Exponenten μ zu berechnen aus der Gleichung:

$$3)\quad \mu = \frac{c}{AR},$$

indem man darin für c und R resp. die in den Gleichungen 3) und 5) des vorigen Paragraphen gefundenen Werthe einsetzt; man erhält dann, indem man zugleich: $A = \frac{1}{424}$ setzt, die Gleichung:

$$4)\quad \mu = 3{,}44\left(\frac{1 + 2{,}023 \,.\, x}{1 + 1{,}608 \,.\, x}\right),$$

welcher man nach Substitution des in Gleichung 8) des vorigen Paragraphen für die Grösse x gefundenen Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$5)\quad \mu = 3{,}44\,(1 + 0{,}2583 \,.\, \omega).$$

Wenn z. B. der anfängliche Totaldruck die Grösse: $p_0 = 10\,333$ Kil. und der anfängliche Dampfdruck die Grösse: $f_0 = 236{,}4$ Kil. hatte, so ist:

$$6)\quad \omega = \frac{236{,}4}{10\,333} = 0{,}022\,88$$

zu setzen. Diesem Werthe von ω entspricht nach der Gleichung 8) des vorigen Paragraphen der Werth: $x = 0{,}014\,57$ und nach Gleichung 5) wird für diesen Fall:

$$7)\quad \mu = 3{,}44\,(1 + 0{,}2583\,.\,0{,}022\,88) = 3{,}46.$$

Nach der ersten Tabelle des vorigen Paragraphen würde den obigen Werthen von ω und p_0 die Sättigungstemperatur von 293° entsprechen. Wenn also die wirkliche Anfangstemperatur des Gemisches die Grösse: $T_0 = 303°$ hatte, so befand sich der Dampf anfangs im überhitzten Zustande, und wird derselbe erst später, nachdem bei adiabatischer Ausdehnung die Temperatur um eine gewisse Grösse gesunken ist, in den gesättigten Zustand übergehen.

So lange der Dampf noch im überhitzten Zustande sich befindet, bleibt ω constant und gilt für die Beziehung zwischen Druck und Temperatur die Gleichung 1), welcher man auch die folgende Form geben kann:

$$8)\quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\mu}.$$

Nach dieser Gleichung würde z. B. der Temperatur: $T = 293°$ der Totaldruck: $p = 9200$ Kil. und der Dampfdruck:

$$9)\quad f = 0{,}022\,88\,.\,9200 = 210{,}5 \text{ Kil.}$$

entsprechen. Da bei der Temperatur von 293° (nach § 207) der Druck des gesättigten Dampfes: 236,4 Kil. beträgt, so befindet sich auch bei dieser Temperatur der Dampf noch immer im überhitzten Zustande.

Indem man nunmehr für T einen noch kleineren Werth substituirt und wiederum den wie oben zu berechnenden Werth von f vergleicht mit dem Drucke des gesättigten Dampfes bei dieser Temperatur: findet man durch wiederholtes Probiren, dass erst bei der Temperatur: $T = 290°{,}7$, welcher der Totaldruck: $p = 8950$ Kil. und der Dampfdruck: $f = 205$ Kil. entspricht, der Dampf in den gesättigten Zustand übergeht; denn bei der Temperatur von 290°,7 beträgt der Druck des gesättigten Dampfes ebenfalls 205 Kil.

Bei adiabatischer Ausdehnung eines Gemisches von 1 Kil. Luft und: 0,014 57 Kil. Wasserdampf wird also die Condensation in dem Augenblicke beginnen, wo die Temperatur gesunken ist von + 30° (Celsius) bis auf + 17°,7 (Celsius), und der Druck abgenommen hat von 10 333 Kil. bis auf 8950 Kil. Bei noch weiter fortgesetzter adiabatischer Ausdehnung würde für das Gesetz der Druckänderung die Gleichung 8) nicht mehr als gültig zu betrachten sein, insofern

durch die nunmehr eintretende Condensation eine wesentliche Aenderung jenes Gesetzes bedingt wird.

§ 224.

Adiabatische Ausdehnung eines Gemisches von Luft, Dampf und Wasser.

Wenn mit f der Dampfdruck und mit p der Totaldruck bezeichnet wird, so ist nach § 222 der Druck $\mathfrak{p}$, welchen die trockene Luft für sich allein ausübt, zu berechnen aus der Gleichung:

$$1)\quad \mathfrak{p} = p - f = \frac{f(1-\omega)}{\omega} = \frac{f}{\varepsilon x}.$$

Die Wärme-Quantität dQ, welche erforderlich ist, um in einer Mischung von 1 Kilogr. Luft mit x Kilogr. Wasserdampf und $m - x$ Kilogr. Wasser gleichzeitig die Temperaturerhöhung dT und die Druckzunahme dp hervorzubringen, setzt sich zusammen aus derjenigen Wärme-Quantität dQ_1, welche die Luftmasse aufnimmt, und derjenigen Wärme-Quantität dQ_2, welche das Gemisch von Dampf und Wasser aufnimmt. Für die erstere ergiebt sich aus der Gleichung 2) des § 184 der Werth:

$$2)\quad dQ_1 = \mathfrak{c}\, dT - A\mathfrak{R}\, T \frac{d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}.$$

In dieser Gleichung bedeutet: $\mathfrak{c} = 0{,}2375$ die specifische Wärme der trockenen Luft (bei constantem Drucke) und $\mathfrak{R} = 29{,}27$ die Constante des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes für trockene Luft.

Die Wärme-Quantität dQ_2, welche von der Dampf- und Wassermasse aufgenommen wird, kann unmittelbar nach der Gleichung 8) des § 205 berechnet werden und hat die Grösse:

$$3)\quad dQ_2 = mc\, dT + T\, d\left(\frac{xr}{T}\right).$$

Wenn die Zustandsänderung der ganzen Masse ohne Wärmezuführung stattfindet, so ist die Summe der obigen beiden Wärme-Quantitäten gleich Null zu setzen. Für die adiabatische Ausdehnung des Ganzen erhält man hiernach die Gleichung:

$$4)\quad 0 = \mathfrak{c}\, dT - A\mathfrak{R}\, T \frac{d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} + mc\, dT + T\, d\left(\frac{xr}{T}\right), \quad \text{oder:}$$

$$5)\quad A\mathfrak{R} \frac{d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{c} + mc) \frac{dT}{T} + d\left(\frac{xr}{T}\right).$$

Indem man diese Gleichung integrirt und mit dem Index „Null" die Anfangswerthe bezeichnet, gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$6)\quad A\mathfrak{R}\lg\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0}\right)=(\mathfrak{c}+mc)\lg\left(\frac{T}{T_0}\right)+\frac{xr}{T}-\frac{x_0r_0}{T_0}.$$

Hierin bedeutet c die specifische Wärme des Wassers, und da vorausgesetzt werden darf, dass die Masse m einen verhältnissmässig kleinen Bruchtheil von der ganzen Masse bildet, so darf man im vorliegenden Falle (nach § 207) ohne Bedenken: $c=1$ setzen. Nach Einführung der numerischen Werthe: $A=\frac{1}{424}$, $\mathfrak{R}=29{,}27$, $\mathfrak{c}=0{,}2375$, $c=1$ kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$7)\quad \lg\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0}\right)=3{,}44\,(1+4{,}21\,.\,m)\lg\left(\frac{T}{T_0}\right)+14{,}486\left(\frac{xr}{T}-\frac{x_0r_0}{T_0}\right).$$

Da bei Anwesenheit des Wassers der Dampf stets in gesättigtem Zustande sich befindet, so ist mit der Temperatur T zugleich der Dampfdruck f als gegeben zu betrachten, insofern derselbe aus der Tabelle des § 207 entnommen werden kann. Mittelst der beiden Gleichungen 1) und 7) können demnach die beiden unbekannten Grössen $\mathfrak{p}$ und x aus dem gegebenen Anfangszustande berechnet werden, sobald die End-Temperatur gegeben ist.

In obiger Gleichung bedeutet „lg" den „natürlichen" Logarithmus. Für den Fall, dass man es vorzieht mit „Brigg'schen" Logarithmen zu rechnen (welche mit „log" bezeichnet werden sollen), hat man die folgende Gleichung zu benutzen:

$$8)\quad \log\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0}\right)=3{,}44\,(1+4{,}21\,.\,m)\log\left(\frac{T}{T_0}\right)+6{,}291\left(\frac{xr}{T}-\frac{x_0r_0}{T_0}\right).$$

Erstes Zahlenbeispiel. Im vorigen Paragraphen ergab sich in Bezug auf die adiabatische Ausdehnnng eines Gemisches von 1 Kil. Luft und 0,014 57 Kil. Dampf als Resultat: dass die Abnahme des Druckes von 10 333 Kil. bis auf 8950 Kil. einem Sinken der Temperatur von 303° bis auf 290°,7 entsprach, bei welcher letzteren Temperatur der Dampf den Sättigungspunkt erreichte. Wenn man diesen Endzustand als Anfangszustand eines neuen (adiabatischen) Ausdehnungsprocesses betrachtet, so hat man: $p_0=8950$, $T_0=290{,}7$, $f_0=205$ und $\mathfrak{p}_0=8745$ zu setzen. Da anfangs noch kein Wasser vorhanden war, so ist ausserdem: $m=x_0=0{,}014\,57$ zu setzen.

Wenn also z. B. derjenige Werth von $\mathfrak{p}$ berechnet werden soll, welcher der Endtemperatur $T=273$ und dem zugehörigen Dampfdrucke: $f=62{,}5$ entspricht, so hat man (nach § 207) zu setzen:

$r_0 = 594{,}2$ und: $r = 606{,}5$. Nach Substitution der obigen Zahlenwerthe kann man alsdann den Gleichungen 1) und 8) die folgenden Formen geben:

$$9)\quad x = \frac{38{,}875}{\mathfrak{p}},$$

$$10)\quad \log \mathfrak{p} = 3{,}655 + 13{,}976 \,.\, x.$$

Indem man provisorisch $x = 0$ setzt, erhält man aus der letzteren Gleichung zunächst einen vorläufigen Annäherungswerth für $\mathfrak{p}$, worauf nach Gleichung 9) ein Annäherungswerth für x, und hiernach aus Gleichung 10) ein genauerer Werth von $\mathfrak{p}$ berechnet werden kann. Durch Wiederholung dieses Correctionsverfahrens findet man die Werthe:

$$\mathfrak{p} = 5640 \quad \text{und} \quad x = 0{,}006\,89.$$

Der Totaldruck des Gemisches sinkt also während der Ausdehnung bis auf die Grösse:

$$p = \mathfrak{p} + f = 5702{,}5.$$

Hieraus folgt: dass bei adiabatischer Ausdehnung eines Gemisches von 1 Kil. Luft und 0,014 57 Kil. Dampf eine Abnahme des Druckes von 10 333 Kil. bis auf 5702,5 Kil. verbunden ist mit einem Sinken der Temperatur von $+ 30^\circ$ (Celsius) bis auf Null Grad (Celsius), wobei von dem ursprünglichen Dampfgewichte der Theil: $x_0 - x = 0{,}007\,68$ Kil. in den tropfbar flüssigen Zustand übergeht, welcher letztere Uebergang während desjenigen Zeitabschnittes sich vollzieht, in welchem die Temperatur von + 17,7 Grad bis auf Null Grad Celsius sinkt.

Zweites Zahlenbeispiel. Die Werthe: $T_0 = 303$, $p_0 = 10\,333$, $x_0 = m = 0{,}026\,93$, $f_0 = 428{,}9$, $\mathfrak{p}_0 = 9904{,}1$, $r_0 = 585{,}62$, $T = 273$, $f = 62{,}5$, $r = 606{,}5$ entsprechen dem Falle, in welchem die Condensation schon bei der Anfangstemperatur von + 30 Grad Celsius begann, und für diesen Fall erhält man auf dieselbe Weise wie oben die Werthe: $\mathfrak{p} = 4208$, $x = 0{,}009\,24$, $p = 4270{,}5$.

Drittes Zahlenbeispiel. Die Werthe: $x_0 = 0$ und: $m = 0$ entsprechen der Voraussetzung: dass die Luft gar keinen Wasserdampf enthielt, und für diesen Fall findet man — entweder nach Gleichung 8), oder nach Gleichung 1) des vorigen Paragraphen, indem man in der letzteren: $\mu = 3{,}44$ setzt — dass dem Sinken der Temperatur von + 30 Grad bis auf Null Grad Celsius eine Abnahme des Druckes von 10 333 Kil. bis auf 7219 Kil. entspricht.

§ 225.

Adiabatische Ausdehnung eines Gemisches von Luft, Dampf, Wasser und Eis.

Die gleichzeitige Anwesenheit von Wasser und Eis bedingt eine unverändert bleibende Temperatur von Null Grad Celsius. Die adiabatische Ausdehnung ist daher in diesem Falle zugleich eine isothermische Ausdehnung, und die Grössen: $T = 273$, $f = 62{,}5$, $r = 606{,}5$ bleiben während der Ausdehnung constant.

Von der tropfbar flüssigen Masse wird ein Theil gefrieren, während gleichzeitig ein anderer Theil verdampft. Wenn bei einer solchen adiabatischen und zugleich isothermischen Ausdehnung eines Gemisches von: 1 Kil. Luft, x Kil. Dampf, y Kil. Eis und $m - x - y$ Kil. Wasser das Volumen der ganzen Masse um die Grösse dv zunimmt, so wird das Dampfgewicht um die Grösse dx und das Eisgewicht um die Grösse dy zunehmen, während das Wassergewicht um die Grösse $dx + dy$ abnimmt.

Bei isothermischer Volumenzunahme um die Grösse dv erfordert 1 Kil. trockener Luft (nach § 183) die Zuführung der Wärme-Quantität:

$$1)\quad dQ_1 = A\mathfrak{p}\,dv.$$

Die zur isothermischen Verdampfung von dx Kilogr. Wasser erforderliche Wärme-Quantität hat (nach § 203) die Grösse:

$$2)\quad dQ_2 = r\,dx.$$

Die beim Gefrieren von dy Kilogr. Wasser frei werdende Wärme-Quantität hat (nach § 217) die Grösse:

$$3)\quad dQ_3 = l\,dy.$$

Indem man diese letztere gleich der Summe jener beiden ersteren setzt, erhält man die Gleichung:

$$4)\quad l\,dy = A\mathfrak{p}\,dv + r\,dx.$$

Da bei niedrigem Drucke das specifische Volumen des Dampfes ausserordentlich viel grösser ist als dasjenige des Wassers und des Eises, so darf der von letzteren beiden Bestandtheilen des Gemisches eingenommene Raum als verschwindend klein vernachlässigt werden. Da ferner von den beiden gasförmigen Bestandtheilen ein jeder den ganzen Raum gerade so ausfüllt, wie wenn der andere nicht vorhanden wäre, so ist die Grösse v — als Volumen der ganzen Masse — zugleich anzusehen als derjenige Raum, welcher von den x Kilogrammen Dampf ausgefüllt wird, und ebenso auch als der-

jenige Raum, welcher von dem 1 Kilogramm Luft ausgefüllt wird. Für die Grösse $\mathfrak{p}$ kann daher auch der aus der Gleichung: $\mathfrak{p} v = \mathfrak{R} T$ zu entnehmende Werth eingesetzt werden, und wenn mit u das specifische Volumen des Dampfes (bei der Temperatur von Null Grad Celsius) bezeichnet wird, so ist:

$$5)\quad v = ux \quad \text{und} \quad dv = u\,dx, \quad \text{also:} \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

zu setzen. Hiernach kann man dem oben für dQ_1 substituirten Ausdrucke auch die folgende Form geben:

$$6)\quad A\mathfrak{p}\,dv = A\mathfrak{R}T\frac{dv}{v} = A\mathfrak{R}T\frac{dx}{x}.$$

Wenn man diesen letzteren Ausdruck in Gleichung 4) einsetzt und hernach die Integration derselben ausführt, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$7)\quad l\,dy = A\mathfrak{R}T\frac{dx}{x} + r\,dx,$$

$$8)\quad l\int_{y_0}^{y} dy = A\mathfrak{R}T\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} + r\int_{x_0}^{x} dx,$$

$$9)\quad l(y - y_0) = A\mathfrak{R}T\lg\left(\frac{x}{x_0}\right) + r(x - x_0).$$

Dem Wachsen des Dampfgewichtes von x_0 bis x entspricht ein Wachsen des Eisgewichtes von y_0 bis y, oder ein Gefrieren des Wassergewichtes: $y - y_0$. Wenn als Anfangszustand derjenige betrachtet wird, bei welchem das Wassergewicht die Grösse a und das Eisgewicht die Grösse $y_0 = 0$ hatte, oder derjenige Zustand, bei welchem das erste Wassertheilchen gerade im Begriffe war zu gefrieren; als Endzustand aber derjenige, bei welchem das Gefrieren des letzten Wassertheilchens gerade beendigt war, so ist:

$$10)\quad y + x = m = a + x_0$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für y zu entnehmenden Werthes kann man der Gleichung 9) auch die folgende Form geben:

$$11)\quad al = A\mathfrak{R}T\lg\left(\frac{x}{x_0}\right) + (r + l)(x - x_0).$$

Nach Einführung der numerischen Werthe: $T = 273$, $l = 80$, $r = 606{,}5$, $A = \frac{1}{424}$, $\mathfrak{R} = 29{,}27$ kann man die Grösse x nunmehr berechnen aus der Gleichung:

$$12)\quad \lg\left(\frac{x}{x_0}\right) + 36{,}427\,.\,(x - x_0) = 4{,}245\,.\,a,$$

oder auch — falls man vorzieht, statt der „natürlichen" die „Brigg'schen" Logarithmen zu benutzen — aus der folgenden Gleichung:

$$13)\quad \log\left(\frac{x}{x_0}\right) + 15{,}907\,(x - x_0) = 1{,}8435\,.\,a.$$

Zahlenbeispiel. Im vorigen Paragraphen ergab sich in Bezug auf die adiabatische Ausdehnung eines Gemisches von 1 Kil. Luft und 0,014 57 Kil. Dampf als Resultat: dass der Druckabnahme von 10 333 bis auf 5702,5 ein Sinken der Temperatur von + 30 Grad Celsius bis auf Null Grad Celsius entsprach, wobei von dem Dampfgewichte der Theil: 0,014 57 — 0,006 89 = 0,007 68 Kil. in den tropfbar flüssigen Zustand überging, während der Rest von 0,006 89 Kil. im dampfförmigen Zustande verblieb. Wenn man diesen Endzustand als Anfangszustand des neuen Ausdehnungsprocesses betrachtet, so hat man die Werthe: $x_0 = 0{,}006\,89$ und $a = 0{,}007\,68$ in Gleichung 13) zu substituiren, welcher man alsdann die folgende Form geben kann:

$$14)\quad \log x + 15{,}907\,.\,x = 0{,}961\,976 - 3.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich der Werth: $x = 0{,}007\,07$, und nach Substitution desselben erhält man aus der Gleichung 7) des § 222 den Werth: $\omega = 0{,}01124 = \frac{f}{p}\cdot$ Der Totaldruck sinkt also während der Ausdehnung von der Grösse 5702,5 bis auf die Grösse:

$$15)\quad p = \frac{f}{\omega} = \frac{62{,}5}{0{,}01124} = 5560 \text{ Kil.},$$

wobei von der anfangs vorhanden gewesenen Wassermasse: 0,0075 Kil. gefrieren und 0,000 18 Kil. in Dampf verwandelt werden.

§ 226.

Adiabatische Ausdehnung eines Gemisches von Luft, Dampf und Eis.

Wenn bei noch weiter fortgesetzter adiabatischer Ausdehnung die Temperatur unter Null Grad Celsius gesunken ist, so wird nunmehr der Dampf direct in Eis sich verwandeln. Um für diesen Fall die einer gegebenen Temperatur-Abnahme entsprechende Druckverminderung zu berechnen, hat man in der Gleichung 6) des § 224 an die Stelle der Verdampfungswärme und der specifischen Wärme des Wassers resp. die Verdampfungswärme und die specifische Wärme des Eises zu setzen. Wenn

also die letztere mit ζ bezeichnet wird, so erhält man die Gleichung:

$$1)\quad A\mathfrak{R}\lg\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0}\right) = (\mathfrak{c} + m\,.\,\zeta)\lg\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{x(r+l)}{T} - \frac{x_0(r_0+l)}{T_0},$$

welcher man nach Substitution der numerischen Werthe: $A = \frac{1}{424}$, $\mathfrak{R} = 29{,}27$, $\mathfrak{c} = 0{,}2375$, $\zeta = 0{,}5$, $l = 80$, indem man zugleich den „natürlichen" Logarithmus durch den „Brigg'schen" Logarithmus ausdrückt, auch die folgende Form geben kann:

$$2)\quad \log\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0}\right) = 3{,}44\,(1 + 2{,}105\,.\,m)\log\left(\frac{T}{T_0}\right) + 6{,}291\left\{\frac{x(r+80)}{T} - \frac{x_0(r_0+80)}{T_0}\right\}.$$

Die Gleichung 1) des § 224 ist auch hier noch als gültig zu betrachten. Indem man demgemäss:

$$3)\quad x = \frac{f}{\varepsilon\mathfrak{p}}$$

setzt, kann man die beiden unbekannten Grössen $\mathfrak{p}$ und x aus den obigen beiden Gleichungen nunmehr auf dieselbe Weise wie in § 224 berechnen, sobald die Endtemperatur T gegeben ist, insofern mit letzterer zugleich die aus § 207 zu entnehmenden Werthe der Grössen f und r gegeben sind.

Zahlenbeispiel. Wenn der Endzustand des im vorigen Paragraphen berechneten Ausdehnungsprocesses hier als Anfangszustand gewählt wird, und diejenige Druck-Abnahme berechnet werden soll, welche dem ferneren Sinken der Temperatur von Null Grad Celsius bis auf — 30 Grad Celsius entspricht, so hat man die folgenden Werthe zu substituiren: $T_0 = 273$, $p_0 = 5560$, $f_0 = 62{,}5$, $\mathfrak{p}_0 = 5497{,}5$, $x_0 = 0{,}00707$, $r_0 = 606{,}5$, $m = 0{,}01457$, $T = 243$, $f = 5{,}25$, $r = 627{,}34$. Den obigen beiden Gleichungen kann man nach Substitution dieser Werthe alsdann die folgenden Formen geben:

$$4)\quad \log\mathfrak{p} = 3{,}449 + 18{,}3123\,.\,x,$$

$$5)\quad x = \frac{3{,}265}{\mathfrak{p}}.$$

Durch Anwendung des in § 224 erklärten Verfahrens findet man hieraus die Werthe: $\mathfrak{p} = 2947$ Kil. und $x = 0{,}001108$ Kil. Der Totaldruck sinkt also bis auf die Grösse: $p = 2952{,}25$ Kil.

Aus den letzteren vier Paragraphen ergiebt sich demnach als Gesammtresultat: dass bei adiabatischer Ausdehnung eines Gemisches von 1 Kil. Luft und 0,014 57 Kil. Wasserdampf dem Sinken der Temperatur von + 30 Grad Celsius bis auf — 30 Grad Celsius ein Abnehmen des Druckes von 10 333 Kil. bis auf 2952,25 Kil. entsprechen wird, und dass nach Beendigung des Ausdehnungsprocesses das Gemisch aus 1 Kil. Luft, 0,001 108 Kil. Dampf und 0,013 462 Kil. Eis bestehen wird.

Bei adiabatischer Ausdehnung der trockenen Luft würde der gleichen Temperatur-Aenderung ein Sinken des Druckes von 10 333 Kil. bis auf 4836 Kil., und der gleichen Druck-Aenderung ein Sinken der Temperatur von + 30 Grad bis auf — 62,44 Grad entsprechen.

§ 227.

Annähernde Gültigkeit des Poisson'schen Gesetzes während der Condensation.

In § 223 würde gezeigt: dass bei adiabatischer Ausdehnung feuchter Luft die einer gegebenen Temperatur-Aenderung entsprechende Druck-Aenderung — so lange keine Condensation des Wasserdampfes erfolgt — berechnet werden kann nach der Poissonschen Gleichung:

$$1)\quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\mu},$$

in welcher für den Exponenten μ der aus Gleichung 4) des § 223 zu entnehmende Werth einzusetzen ist.

In dem Augenblicke, wo die Condensation beginnt, ändert sich plötzlich das Ausdehnungsgesetz, insofern die nunmehr frei werdende latente Wärme des Wasserdampfes ein langsameres Sinken der Temperatur bedingt.

Anstatt für den nun folgenden Ausdehnungsprocess die Gleichungen des § 224 zu benutzen, kann man jene plötzliche Aenderung des Ausdehnungsgesetzes auch auffassen als eine sprungweise eintretende Vergrösserung des Exponenten μ, und bei gehöriger Berücksichtigung dieser Aenderung wird man demgemäss auch während der Condensation noch die Gleichung 1) zur Berechnung der Druckabnahme benutzen dürfen.

Streng genommen müsste man hierbei Rücksicht darauf nehmen: dass während des neuen Ausdehnungsprocesses die Grösse des Exponenten μ eine allmähliche Aenderung erleidet, und müsste für jedes der folgenden Temperatur-Intervalle den nume-

rischen Werth desselben besonders berechnen. Da jedoch diese stetige Aenderung der Grösse μ verhältnissmässig langsam erfolgt, und überdies das ganze Temperatur-Intervall zwischen dem Sättigungspunkte und dem Gefrierpunkte in der Regel einen verhältnissmässig kleinen Bruchtheil von der absoluten Temperatur bildet, so darf man bei Auswahl eines passenden Mittelwerthes die Grösse μ annäherungsweise hierbei als eine constante Grösse behandeln.

Man findet jenen Mittelwerth, indem man zunächst nach den Gleichungen des § 224 den genaueren Werth von p berechnet, und hernach denjenigen Werth aufsucht, welcher in Gleichung 1) für μ substituirt werden müsste, um das gleiche Resultat zu liefern.

Beispiel. In § 224 wurde bei der Berechnung des ersten Zahlenbeispieles gefunden: dass der Abnahme des Totaldruckes von 8950 Kil. bis 5702,5 Kil. ein Sinken der absoluten Temperatur von 290°,7 bis 273° entspricht. Für diesen Fall würde also der Mittelwerth von μ zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$2) \quad \frac{5702,5}{8950} = \left(\frac{273}{290,7}\right)^{\mu}, \quad \text{oder:} \quad \mu = 7,175.$$

Um einen Maassstab zu gewinnen für die Schätzung des Fehlers, welchen man begeht, indem man die Grösse μ während der ganzen Temperatur-Aenderung als constant ansieht, hat man sich das ganze Temperatur-Intervall in zwei oder mehrere Theile zerlegt zu denken und den Mittelwerth von μ für jeden Theil einzeln genommen zu berechnen. Aus den Gleichungen des § 224 würde in Bezug auf das obige Zahlenbeispiel sich ergeben, dass dem Zwischenwerthe: $T = 283°$ der Druck: $p = 7300$ Kil. entspricht. Hiernach findet man durch Anwendung der obigen Methode: dass dem Sinken der Temperatur von 290°,7 bis auf 283° der Mittelwerth: $\mu_1 = 7,58$, und dem ferneren Sinken der Temperatur von 283° bis auf 273° der Mittelwerth: $\mu_2 = 6,87$ entspricht. Um für einen bestimmten gegebenen Zustand den genauen Werth von μ zu erhalten, würde man die obige Berechnungsmethode auf ein unendlich kleines Temperatur-Intervall anzuwenden haben. In Bezug auf das obige Zahlenbeispiel würde man alsdann finden, dass der Exponent μ continuirlich abnimmt von dem Werthe: $\mu = 7,8$ bis zu dem Werthe: $\mu = 6,4$, während die Temperatur von 290,7 bis auf 273 sinkt.

In derselben Weise wie hier das Poisson'sche Gesetz auf ein Gemisch von Luft, Dampf und Wasser angewendet wurde, kann

dasselbe auch auf ein Gemisch von Luft, Dampf und Eis angewendet werden. In Bezug auf die in § 226 weiter fortgeführte Untersuchung des obigen Falles würde man z. B. finden: dass dem Sinken der Temperatur von 273° bis auf 263° der Mittelwerth $\mu = 6{,}4$, und dem ferneren Sinken der Temperatur von 263° bis auf 243° der Mittelwerth $\mu = 5{,}0$ entspricht.

Die Grösse des Exponenten μ wächst mit dem Feuchtigkeitsgehalte der Luft. Für die im zweiten Zahlenbeispiele des § 224 berechnete adiabatische Ausdehnung einer Luftmasse, welche bei dem Anfangsdrucke von 10 333 Kil. und der Anfangstemperatur von + 30° Celsius mit Wasserdampf gesättigt war, würde man auf dieselbe Weise wie oben den Mittelwerth: $\mu = 8{,}474$ finden, während für vollkommen trockene Luft: $\mu = 3{,}44$ zu setzen ist.

Einen die Anwendung der obigen Methode ausschliessenden Ausnahmefall bildet die in § 225 behandelte, während des Gefrierens der Wassertheilchen stattfindende Zustandsänderung, insofern bei dieser Zustandsänderung eine Druckabnahme stattfindet, ohne von einer Temperaturabnahme begleitet zu sein. Für diesen Fall würde der Exponent der Poisson'schen Gleichung den Werth: $\mu = \infty$ annehmen.

§ 228.

Indifferenter Gleichgewichtszustand der dampfhaltigen Atmosphäre.

Da der Druck der atmosphärischen Luft mit zunehmender Höhe über der Erdoberfläche abnimmt, so können die in § 223 für die adiabatische Ausdehnung der dampfhaltigen Luft gefundenen Gleichungen angewendet werden auf ein in der ruhenden Atmosphäre langsam und gleichförmig emporsteigendes Lufttheilchen. Die steigende Bewegung des sich selbst überlassenen Lufttheilchens wird eine gleichförmige sein, wenn bei jeder Lage desselben Auftrieb und Gewicht einander das Gleichgewicht halten. Diese Bedingung wird erfüllt sein, wenn die Temperatur des aufsteigenden Lufttheilchens stets übereinstimmt mit der Temperatur der benachbarten ruhenden Luft. Da bei Gleichheit der Temperaturen keine Wärme-Uebertragung stattfindet, so wird in diesem Falle zugleich die Bedingung für die adiabatische Ausdehnung erfüllt sein. Das gleichförmige Emporsteigen und die adiabatische Ausdehnung sind daher an die gemeinschaftliche Bedingung geknüpft: dass in der ruhenden Atmosphäre die Temperatur mit zunehmender Höhe genau nach demselben Gesetze abnimmt, nach

welchem die Temperatur eines aufsteigenden Lufttheilchens abnehmen würde. Wenn diese Bedingung überall erfüllt ist, so befindet sich die Atmosphäre im indifferenten Gleichgewichtszustande. Der Gleichgewichtszustand würde dagegen ein labiler oder stabiler sein, wenn die Temperatur nach oben hin resp. rascher oder langsamer abnähme, als die Temperatur des aufsteigenden Lufttheilchens abnehmen würde.

Unter Voraussetzung des indifferenten Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre wird man demnach für die Beziehung zwischen Druck und Temperatur die Poisson'sche Gleichung:

$$1)\quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\mu}$$

als gültig betrachten dürfen, wobei der Exponent μ — je nach dem Zustande der Atmosphäre — entweder nach den Gleichungen des § 223 oder nach der im vorigen Paragraphen erklärten Methode zu berechnen sein wird. Die obige Gleichung kann auch als Differenzialgleichung in der folgenden Form benutzt werden:

$$2)\quad \frac{dp}{p} = \mu \frac{dT}{T},$$

zu welcher man gelangt, indem man die vorige Gleichung differenziirt, und die so entstandene Gleichung nachher durch erstere dividirt.

§ 229.

Höhe der unteren Wolkengrenze.

Wenn mit p der Tótaldruck in der Höhe z über dem Meeresspiegel bezeichnet wird, und mit γ das Gewicht eines Cubikmeters der dampfhaltigen Luft an dieser Stelle, so entspricht der Höhenzunahme dz die Druckänderung:

$$1)\quad dp = -\gamma\, dz.$$

So lange die Luft nicht mit Wasserdampf gesättigt ist, kann das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz als gültig betrachtet werden, und nach Substitution des aus § 222 (Gleichung 10) für die Grösse γ zu entnehmenden Werthes erhält man die Gleichung:

$$2)\quad dp = -\frac{p}{RT}\cdot dz.$$

Mit Zuziehung der am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Poisson'schen Differenzialgleichung kann man dieser Gleichung nunmehr auch die folgende Form geben:

$$3) \quad dz = -\mu R \, dT,$$

und wenn man dieselbe alsdann integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen z_0 und z, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen T_0 und T — so erhält man die Gleichung:

$$4) \quad z - z_0 = \mu R (T_0 - T).$$

Aus dieser Gleichung, welche zeigt, dass die Temperaturabnahme der Höhenzunahme proportional ist, ergiebt sich für diejenige Höhenzunahme, welcher eine Temperaturabnahme von 1 Grad entspricht, der constante Werth:

$$5) \quad \lambda = \mu R.$$

Unter Voraussetzung des indifferenten Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre würde man hiernach die Höhendifferenz zweier Stationen aus den daselbst beobachteten Temperaturen berechnen können, indem man die Differenz der letzteren mit dem Factor λ multiplicirt.

Wenn unter T die dem Dampfgehalte der Luft entsprechende Sättigungstemperatur verstanden wird, so bedeutet nunmehr z diejenige Höhe, in welcher die Condensation des Dampfes oder die Nebelbildung beginnt. Mit Zuziehung der in § 222 und § 223 resp. für die Grössen R und μ gefundenen Gleichungen kann man daher die Gleichung 4) dazu benutzen, die Höhe der unteren Wolkengrenze über der Erdoberfläche zu berechnen.

Beispiel. In § 223 ergab sich bei der Berechnung der adiabatischen Ausdehnung eines Gemisches von 1 Kil. Luft und 0,014 57 Kil. Wasserdampf als Resultat: dass das Abnehmen des Druckes von 10 333 Kil. bis auf 8950 Kil. verbunden war mit dem Sinken der Temperatur von 303° bis auf 290°,7, bei welcher letzteren der Dampf den Sättigungspunkt erreichte. Nach § 222 und § 223 entsprechen dem hier angenommenen Dampfgehalte resp. die Werthe: $R = 29,53$ und $\mu = 3,46$. Wenn also angenommen wird, dass in der Höhe des Meeresspiegels der Druck 10 333 Kil. und die Temperatur 303° beträgt, so ist $z_0 = 0$ zu setzen, und man erhält für die Höhe der unteren Wolkengrenze über dem Meeresspiegel den Werth:

$$z = 3,46 \, . \, 29,53 \, (303 - 290,7) = 1257^{\text{m}}.$$

Um die Höhendifferenz direct aus dem gegebenen Druckverhältniss zu berechnen, hat man in Gleichung 4) für T den aus der Poisson'schen Gleichung zu entnehmenden Werth zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

$$6)\quad z - z_0 = \mu R T_0 \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right\},$$

welcher man für den umgekehrten Fall, in welchem die Höhendifferenz gegeben ist, und das Druckverhältniss berechnet werden soll, auch die folgende Form geben kann:

$$7)\quad \frac{p}{p_0} = \left\{ 1 - \frac{(z - z_0)}{\mu R T_0} \right\}^{\mu}.$$

Die Anwendung dieser letzteren Gleichung auf das obige Zahlenbeispiel würde wiederum zu dem schon in § 223 gefundenen Resultate führen; d. h. es würde sich ergeben, dass an der unteren Wolkengrenze der Druck: 8950 Kil. beträgt.

§ 230.

Regenwolken-Gebiet.

Da das specifische Gewicht des Wassers grösser ist als das specifische Gewicht der Luft, so wird ein in der ruhenden Atmosphäre schwebendes Wasserkügelchen, sich selbst überlassen, allmählich zur Erdoberfläche herabsinken. Die Geschwindigkeit des Herabsinkens wird jedoch um so kleiner sein, je kleiner der Durchmesser desselben ist. Wenn also in einem aufsteigenden Gemische von Luft, Dampf und Wasser das letztere in äusserst fein zertheiltem Zustande sich befindet, so darf man annehmen, dass die Wassertheilchen in der Luftmasse suspendirt bleibend an der aufsteigenden Bewegung derselben theilnehmen. Unter dieser Voraussetzung wird es daher zulässig sein, die in § 224 für die adiabatische Ausdehnung eines Gemisches von Luft, Dampf und Wasser gefundenen Gleichungen auch für die aufsteigende Bewegung desselben in der ruhenden Atmosphäre als gültig anzusehen. Zur Ableitung des Gesetzes, nach welchem innerhalb des Regenwolken-Gebietes der Druck mit der Höhe sich ändert, wird man demnach die Gleichung 4) des § 224 benutzen dürfen, welcher man auch die folgende Form geben kann:

$$1)\quad 0 = (\mathfrak{c} + m c)\, dT + d(x r) - A \mathfrak{R} T \frac{d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} - x r \frac{dT}{T}.$$

Für das letzte Glied dieser Gleichung ergiebt sich aus dem Clapeyron-Clausius'schen Gesetze (§ 202) der Werth:

$$2)\quad x r \frac{dT}{T} = A x u\, df.$$

Da das Volumen des Wassers als verschwindend klein vernachlässigt werden darf, so kann die Grösse:

$$3)\quad xu = v$$

als Volumen der Dampfmasse, zugleich aber auch als das Volumen des ganzen Gemisches angesehen werden, und da von den beiden gasförmigen Bestandtheilen ein jeder den ganzen Raum gerade so ausfüllt, wie wenn der andere nicht vorhanden wäre, so ist die Grösse v zugleich als das Volumen des 1 Kil. trockener Luft zu betrachten. Nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze ist daher:

$$4)\quad \mathfrak{p}v = \Re T$$

zu setzen, und wenn man die obigen Werthe in Gleichung 1) substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$5)\quad 0 = (\mathfrak{c} + mc)\,dT + d(xr) - Av\,(d\mathfrak{p} + df).$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung 1) des vorigen Paragraphen kann man hierin:

$$6)\quad d\mathfrak{p} + df = dp = -\gamma\,dz$$

setzen, und da die Grösse γv (als Gewicht des ganzen Gemisches) gleich $1 + m$ ist, so kann man der Gleichung 5) auch die folgende Form geben:

$$7)\quad 0 = (\mathfrak{c} + mc)\,dT + d(xr) + A\,(1 + m)\,dz.$$

Wenn man diese letztere Gleichung nunmehr integrirt und zugleich für die drei Constanten: $\mathfrak{c}$, c, A ihre numerischen Werthe einsetzt, so erhält man für die Beziehung zwischen Höhendifferenz und Temperaturdifferenz die nachstehende Gleichung:

$$8)\quad 0 = (0{,}2375 + m)\,(T - T_0) + xr - x_0 r_0 + \left(\frac{1+m}{424}\right)(z - z_0).$$

Da das Gesetz, nach welchem der Druck mit der Temperatur abnimmt, bereits in § 224 aufgefunden wurde, so ist mit der obigen Gleichung zugleich die Beziehung zwischen Druck-Aenderung und Höhen-Aenderung gegeben.

Wenn man $T = 273$ setzt, so bedeutet nunmehr z diejenige Höhe, in welcher die Wassertheilchen zu gefrieren beginnen, oder die Höhe der oberen Grenze des Regenwolken-Gebietes, und wenn zugleich unter z_0 die Höhe der unteren Wolkengrenze verstanden wird, so kann man die ganze Dicke der Regenwolkenschicht berechnen aus der Gleichung:

$$9)\quad z - z_0 = \left(\frac{424}{1+m}\right)\left\{(0{,}2375 + m)\,(T_0 - 273) + x_0 r_0 - x\,.\,606{,}5\right\}.$$

Zahlenbeispiel. Im vorigen Paragraphen ergab sich für die untere Wolkengrenze die Höhe von 1257 Metern, und nach § 224 (erstes Zahlenbeispiel) sind für diesen Fall die Werthe: $T_0 = 290,7$, $m = x_0 = 0,014\,57$, $r_0 = 594,2$, $x = 0,006\,89$ zu substituiren. Hiernach erhält man aus obiger Gleichung für die ganze Dicke der Regenwolkenschicht den Werth: $z - z_0 = 3736$ Meter, und für die Höhe der oberen Grenze der Regenwolkenschicht den Werth: $z = 4993$ Meter.

§ 231.

Uebergangsschicht zwischen Regen- und Schnee-Wolken-Gebiet.

Während des Gefrierens der Wassertheilchen bleibt die Temperatur unverändert gleich Null Grad (Celsius). In der Uebergangsschicht ist daher überall: $dT = 0$, folglich nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze auch: $d(\mathfrak{p}v) = 0$, oder:

$$1) \quad \mathfrak{p}\,dv = -v\,d\mathfrak{p}$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Werthes kann man der Gleichung 4) des § 225 die folgende Form geben:

$$2) \quad 0 = l\,dy - r\,dx + Av\,d\mathfrak{p}.$$

Da bei constanter Temperatur auch der Dampfdruck constant bleibt, so ist $df = 0$, also $d\mathfrak{p} = dp$ zu setzen. Nach der Gleichung 1) des § 229 kann daher:

$$3) \quad d\mathfrak{p} = -\gamma\,dz$$

gesetzt werden, und da: $\gamma v = 1 + m$ ist, so kann man statt dessen auch setzen:

$$4) \quad d\mathfrak{p} = -\frac{(1+m)\,dz}{v}.$$

Wenn man diesen Werth in Gleichung 2) substituirt und dieselbe alsdann integrirt, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$5) \quad 0 = l\,dy - r\,dx - A(1+m)\,dz,$$

$$6) \quad 0 = l(y - y_0) - r(x - x_0) - A(1+m)(z - z_0).$$

Um die ganze Höhe der Uebergangsschicht zu berechnen, hat man hierin nach der in § 225 gegebenen Erklärung: $y_0 = 0$ und: $y = a + x_0 - x$ zu setzen; man erhält dann die Gleichung:

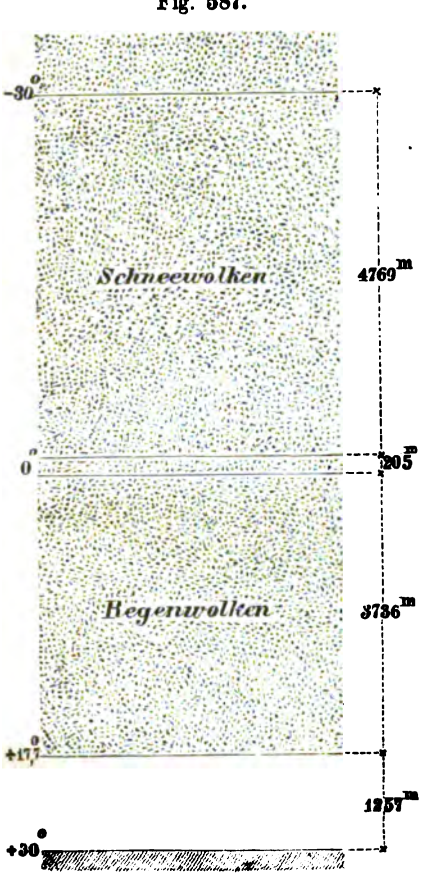
$$7) \quad 0 = la - (r + l)(x - x_0) - A(1+m)(z - z_0),$$

welcher man nach Einführung der in § 225 angegebenen numerischen Werthe auch die folgende Form geben kann:

$$8)\quad z - z_0 = \frac{424\{80 \,.\, a - 686{,}5 \,.\, (x - x_0)\}}{1 + m}.$$

Zahlenbeispiel. Das im vorigen Paragraphen berechnete Zahlenbeispiel bezog sich auf einen Zustand der Atmosphäre, welchem nach § 225 die folgenden Werthe entsprechen: $m = 0{,}014\,57$, $x_0 = 0{,}006\,89$, $a = 0{,}007\,68$, $x = 0{,}007\,07$. Hiernach erhält man aus Gleichung 8) für die Dicke der Uebergangsschicht den Werth: $z - z_0 = 205^m$, und da im vorigen Paragraphen für die Höhe der unteren Grenze über dem Meeresspiegel der Werth: $z_0 = 4993^m$ gefunden wurde, so liegt die obere Grenze in der Höhe: $z = 5198^m$ über dem Meeresspiegel.

Fig. 587.



Die Resultate der in den letzten drei Paragraphen in Bezug auf den vorliegenden Fall ausgeführten Rechnungen sind in Fig. 587 übersichtlich zusammengestellt. Die eingeschriebenen Zahlen gelten für den indifferenten Gleichgewichtszustand der Atmosphäre und zwar speciell für denjenigen Zustand, in welchem die Atmosphäre sich befindet, wenn an der Erdoberfläche die Temperatur: + 30° Celsius, der Totaldruck: 10 333 Kil. und der Dampfdruck: 236,4 Kil. beträgt.

§ 232.

Schneewolken-Gebiet.

Um das Gesetz zu finden, nach welchem innerhalb der Schneewolkenregion der Druck mit zunehmender Höhe abnimmt, hat man:

ζ statt c und $r + l$ statt r, ebenso auch $r_0 + l$ statt r_0 zu setzen in den Gleichungen 7) und 8) des § 230. Man erhält alsdann zunächst für die Beziehung zwischen Höhendifferenz und Temperaturdifferenz die folgende Gleichung:

$$1)\quad 0 = (c + m\zeta)(T - T_0) + x(r + l) - x_0(r_0 + l) + A(1 + m)(z - z_0),$$

und da das Gesetz, nach welchem der Druck mit der Temperatur abnimmt, bereits in § 226 gefunden wurde, so ist hiermit zugleich die Beziehung zwischen Druckdifferenz und Höhendifferenz gefunden.

Wenn unter z_0 die Höhe der unteren Grenzfläche des Schneewolkengebietes, oder die Höhe der oberen Grenze der Uebergangsschicht verstanden wird, so ist $T_0' = 273$ und $r_0 = 606,5$ zu setzen. Nach Einführung der bereits in § 226 für die Constanten angegebenen numerischen Werthe kann man der obigen Gleichung alsdann die folgende Form geben:

$$2)\quad z - z_0 = \frac{424}{(1+m)}\{(0,2375 + 0,5 . m)(273 - T) + x_0 . 686,5 - x(r + 80)\}.$$

Zahlenbeispiel. Um für den in Fig. 587 angenommenen Zustand der Atmosphäre die Höhe derjenigen Stelle zu berechnen, an welcher die Temperatur: $-30°$ (Celsius) beträgt, würde man nach § 226 die Werthe: $m = 0,014\,57$, $T = 243$, $x_0 = 0,007\,07$, $x = 0,001\,108$, $r = 627,34$ zu substituiren haben. Für die Höhe dieser Stelle über der oberen Grenzfläche der Uebergangsschicht ergiebt sich alsdann aus obiger Gleichung der Werth: $z - z_0 = 4769^m$, und da nach Fig. 587 für diesen Fall: $z_0 = 5198^m$ zu setzen ist, so erhält man für die ganze Höhe jener Stelle über der Meeresfläche den Werth: $z = 9967^m$. Nach § 226 hat in dieser Höhe der Totaldruck die Grösse: $p = 2952,25$ Kil., und der Dampfdruck die Grösse: $f = 5,25$ Kil.

§ 233.

Temperaturfläche der feuchten Luft.

Wenn 1 Kilogramm feuchter Luft, enthaltend ξ Kilogr. Wasserdampf und $1 - \xi$ Kilogr. Luft, in einem Cylinder zwischen dem festen Boden desselben und einem beweglichen Kolben eingeschlossen sich befindet, so kann für alle möglichen Zustandsänderungen dieses Gemisches die Beziehung zwischen den drei Grössen: p, v, T mittelst der Temperaturfläche auf folgende Weise geometrisch dargestellt werden.

Nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze gilt für trockene Luft die Gleichung:

$$1)\quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = 29{,}27\,.\,T,$$

in welcher $\mathfrak{q}$ das Gewicht eines Cubikmeters trockener Luft bedeutet. Da in jenem Gemische die $1 - \xi$ Kilogr. Luft den ganzen Raum v in derselben Weise ausfüllen, wie wenn der Dampf nicht vorhanden wäre, so ist:

$$2)\quad \mathfrak{q}v = 1 - \xi$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für die Grösse $\mathfrak{q}$ zu entnehmenden Werthes kann man der Gleichung 1) auch die folgende Form geben:

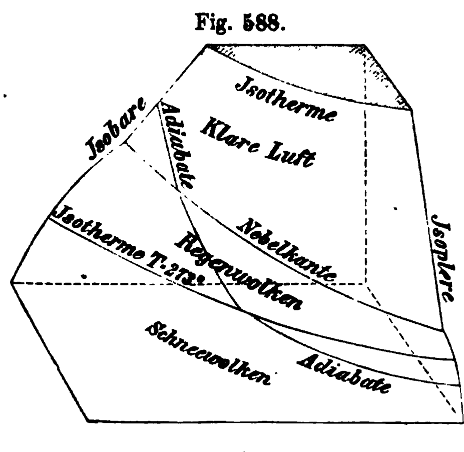
$$3)\quad \mathfrak{p}v = 29{,}27\,(1 - \xi)\,T.$$

Der Totaldruck p setzt sich zusammen aus dem Luftdrucke $\mathfrak{p}$ und dem Dampfdrucke f, hat also die Grösse:

$$4)\quad p = \mathfrak{p} + f.$$

Nach der in den vorigen Paragraphen angewendeten Bezeichnungsweise ergiebt sich für das Verhältniss des Dampfgewichtes zum Luftgewichte die Gleichung:

Fig. 588.



$$5)\quad x = \frac{\xi}{1 - \xi},$$

oder:

$$\xi = \frac{x}{1 + x}.$$

Wenn also z. B. der Dampfgehalt diejenige Grösse hat, welcher bei dem Drucke: $p = 10\,333$ Kil. die Sättigungstemperatur: $T = 303$ Grad entspricht, so ergeben sich nach § 222 die folgenden numerischen Werthe:

$$x = 0{,}026\,94, \quad \xi = 0{,}026\,23, \quad \omega = 0{,}041\,51, \quad R = 29{,}74.$$

Die Gleichung 3) behält für alle Zustandsänderungen ihre Gültigkeit. Für das Gemisch im Ganzen ist dagegen die Mariotte-Gay-Lussac'sche Gleichung nur so lange gültig, als keine Condensation stattfindet. Die Temperaturfläche besteht demnach aus zwei ver-

schiedenen Gebieten, welche in der Nebelkante an einander grenzen. Für das oberhalb der Nebelkante liegende Gebiet gilt die Gleichung:

$$6)\quad pv = 29{,}74\,.\,T.$$

Das unterhalb der Nebelkante liegende Gebiet kann man construiren nach der Gleichung 3) oder:

$$7)\quad (p - f)\,v = 28{,}502\,.\,T,$$

indem man darin für die Grösse f den der Temperatur T entsprechenden Druck des gesättigten Wasserdampfes substituirt (Fig. 588).

Die Durchschnittslinie der nach obigen beiden Gleichungen zu construirenden krummen Flächen ist die Nebelkante, in welcher z. B. die den nachfolgenden Werthen-Systemen entsprechenden Punkte liegen:

$T =$	303	293	283	273	243
$p =$	10 333	5690	3000	1505	126,4
$v =$	0,872	1,5307	2,805	5,394	57,16.

Die Isobare hat oberhalb der Nebelkante eine geradlinige, unterhalb derselben dagegen eine krummlinige Form. Der Isobare: $p = 10\,333$ Kil. gehören z. B. die nachfolgenden Punkte an:

$T =$	333	303	273	243
$v =$	0,9585	0,872	0,7576	0,6706.

Die Isoplere hat ebenfalls in dem oberen Gebiete eine geradlinige, in dem unteren eine krummlinige Form. Der Isoplere: $v = 5{,}394$ gehören z. B. die folgenden Punkte an:

$T =$	333	303	273	243
$p =$	1836	1670	1505	1289.

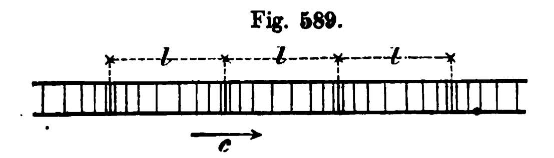
Die in Fig. 588 angegebene Adiabate hat drei Eckpunkte; der obere liegt in der Nebelkante, die anderen beiden liegen in der Isotherme: $T = 273^\circ$, und das zwischen den beiden letzteren liegende Stück der Adiabate fällt mit der Isotherme zusammen (vergl. § 225). Wenn jedoch die Adiabate eine solche Lage hat, dass ihr Durchschnittspunkt mit der Nebelkante unterhalb der Isotherme $T = 273^\circ$ liegt, so bildet dieser Durchschnittspunkt den einzigen Eckpunkt der Adiabate.

§ 234.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen.

Wenn l die Wellenlänge ist, und c die Geschwindigkeit, mit welcher die Schallwellen längs der in einem geradlinigen cylindrischen Rohre befindlichen Luftsäule fortschreiten (Fig. 589), so hat die Zeit, in welcher ein bestimmtes Lufttheilchen eine Doppel-Schwingung ausführt, oder die Periode, nach deren jedesmaligem Ablaufe in dem schwingenden Lufttheilchen ein und derselbe Zustand wieder eintritt, die Grösse:

Fig. 589.



$$1)\quad T = \frac{l}{c}.$$

Die Geschwindigkeit c ist aufzufassen als diejenige Geschwindigkeit, mit welcher ein bestimmter Dichtigkeitszustand längs der Achse des Rohres fortschreitet. Die Wegeslänge x, welche dieser Zustand während der Zeit t längs der Achse des Rohres durchläuft, hat die Grösse:

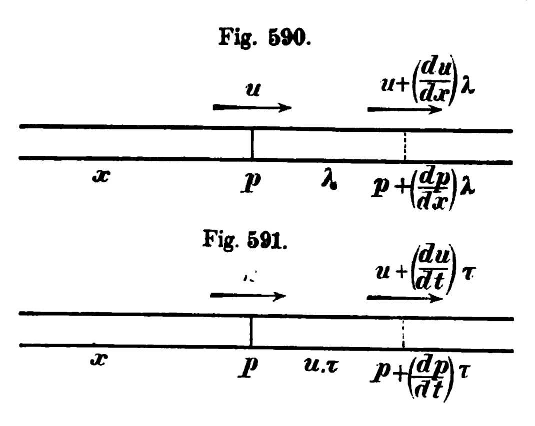
$$2)\quad x = ct,$$

und während die Zeit t um die Grösse τ zunimmt, rückt dieser Zustand um die Strecke $c\tau$ vorwärts.

In einem und demselben Zeitpunkte befindet sich an den verschiedenen Stellen des Rohres die Luftsäule in verschiedenen Zuständen. Für einen bestimmten Werth von t sind daher die Geschwindigkeit u, welche ein schwingendes Lufttheilchen zu dieser Zeit erreicht hat, und der Druck p, welcher in demselben zu dieser Zeit stattfindet, lediglich als Functionen der Abscisse x zu betrachten. Die partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dp}{dx}$ können hiernach gedeutet werden als auf solche Aenderungen von x sich beziehend, bei welchen die Grösse t constant bleibt.

Der durch die Werthe von u und p charakterisirte Zustand eines bestimmten schwingenden Lufttheilchens hängt ausserdem von der Zeit t ab, und die partiellen Differenzialquotienten jener beiden Grössen, nach t genommen, können gedeutet werden als auf solche Zustandsänderungen sich beziehend, welche in einem bestimmten Lufttheilchen während der Aenderung von t eintreten.

Die Beziehungen, welche zwischen den auf solche Weise definirten partiellen Differenzialquotienten jener beiden veränderlichen Grössen stattfinden, können aus den Figuren **590** und **591** entnommen werden. In Fig. **590** sind die Aenderungen angegeben, welche die Grössen u und p erleiden, wenn bei unverändert bleibendem Werthe von t die Abscisse x um die unendlich kleine Strecke λ vergrössert wird. In Fig. **591** sind die Aenderungen angegeben, welche die Grössen u und p für ein bestimmtes Lufttheilchen erleiden, während die Zeit t um die unendlich kleine Grösse τ zunimmt, wobei zugleich der Ort des Lufttheilchens um die Strecke $u \,.\, \tau$ vorrückt.



Der am Ende des Zeitraums $t + \tau$ in dem Lufttheilchen eingetretene Zustand war während des letztverflossenen Zeitabschnitts τ um die Strecke $c \,.\, \tau$ vorwärts gerückt. Derselbe Zustand war daher an einer um die Strecke $c \,.\, \tau$ rückwärts gelegenen Stelle bereits zur Zeit t eingetreten. Wenn also:

$$3)\quad \lambda = u\tau - c\tau$$

gesetzt wird, so muss die in Fig. **590** angegebene Zustandsänderung mit der in Fig. **591** angegebenen Zustandsänderung übereinstimmen. Für die Beziehungen zwischen den partiellen Differenzialquotienten erhält man hiernach die Gleichungen:

$$4)\quad \left(\frac{du}{dx}\right)(u - c)\tau = \left(\frac{du}{dt}\right)\tau,$$

$$5)\quad \left(\frac{dp}{dx}\right)(u - c)\tau = \left(\frac{dp}{dt}\right)\tau,$$

und wenn ferner vorausgesetzt wird, dass die Schwingungsweite sehr klein ist im Verhältniss zur Wellenlänge l, oder dass die Geschwindigkeit u stets sehr klein ist im Verhältniss zur Geschwindigkeit c, so kann statt dessen annäherungsweise auch gesetzt werden:

$$6)\quad -c\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt},$$

$$7)\quad -c\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}.$$

Nach Fig. **590** ist die Geschwindigkeitsdifferenz $\left(\frac{du}{dx}\right)\cdot\lambda$ als relative Geschwindigkeit des Vorderendes der Luftsäule von der Länge λ in Bezug auf das Hinterende derselben, oder als die Geschwindigkeit des Wachsens der Länge λ zu betrachten; folglich bedeutet $\frac{du}{dx}$ die Geschwindigkeit, mit welcher die Verlängerung pro Längeneinheit zunimmt, oder die Geschwindigkeit der Zunahme des Ausdehnungsverhältnisses. Wenn also mit v das Volumen der Luftmasse pro Kilogramm an dieser Stelle bezeichnet wird, so ist:

$$8)\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{v}\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Ausdrucks erhält man aus Gleichung 6) für die Beschleunigung des Lufttheilchens den Werth:

$$9)\quad \frac{du}{dt} = -\frac{c}{v}\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

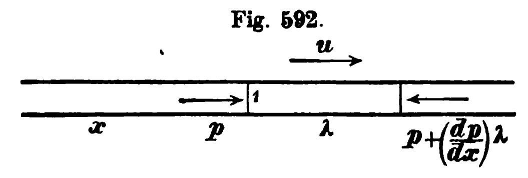
Wenn mit γ das Gewicht der Luftmasse pro Cubikmeter an dieser Stelle bezeichnet wird, so ist:

$$10)\quad v = \frac{1}{\gamma},\quad \text{oder:}\quad dv = -\frac{d\gamma}{\gamma^2}$$

zu setzen, und nach Substitution dieser Werthe nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$11)\quad \frac{du}{dt} = \frac{c}{\gamma}\cdot\left(\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

Fig. 592.



Nach Figur **592** erhält man für die Beschleunigung des Lufttheilchens, indem man die beschleunigende Kraft durch die Masse desselben dividirt, die Gleichung:

$$12)\quad \frac{du}{dt} = -\frac{\left(\frac{dp}{dx}\right)\lambda}{\frac{\gamma}{g}\cdot 1\,.\,\lambda},$$

welcher man nach Substitution des aus Gleichung 7) für $\frac{dp}{dx}$ zu entnehmenden Werthes auch die folgende Form geben kann:

$$13) \quad \frac{du}{dt} = \frac{g}{\gamma c} \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right).$$

Durch Gleichsetzung der in den Gleichungen 11) und 13) für die Beschleunigung gefundenen Ausdrücke erhält man alsdann die Gleichung:

$$14) \quad \frac{c}{\gamma} \cdot \left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \frac{g}{\gamma c} \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right), \quad \text{oder:} \quad 15) \quad c = \sqrt{g\left(\frac{dp}{d\gamma}\right)}.$$

Während der schwingenden Bewegung des Lufttheilchens findet ein abwechselndes Zunehmen und Abnehmen der Dichtigkeit desselben statt. In Folge dessen wird auch die Temperatur des Lufttheilchens abwechselnd zunehmen und abnehmen. In einem und demselben Zeitpunkte werden daher den verschiedenen Werthen von x verschiedene Temperaturen entsprechen, und in Folge dessen müsste ein Wärme-Uebergang von den wärmeren zu den kälteren Lufttheilchen stattfinden. Da jedoch jene Erwärmungen und Abkühlungen in raschem Wechsel auf einander folgen, so darf man annäherungsweise annehmen, dass eine solche Wärme-Uebertragung während der Dichtigkeitsänderungen nicht stattfindet. Dem Differenzialquotienten $\frac{dp}{d\gamma}$ darf daher diejenige Bedeutung beigelegt werden, welche dem Gesetze der adiabatischen Zustandsänderung entspricht. Nach dem Poisson'schen Gesetze (§ 180) ist also:

$$16) \quad p = \text{Const.}\, \gamma^k, \quad dp = k\, \text{Const.}\, \gamma^{k-1} d\gamma, \quad \text{oder:} \quad \frac{dp}{d\gamma} = k\frac{p}{\gamma}$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Ausdruckes erhält man für die Schallgeschwindigkeit die Gleichung:

$$17) \quad c = \sqrt{gk\frac{p}{\gamma}},$$

welcher man mit Zuziehung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes auch die folgende Form geben kann:

$$18) \quad c = \sqrt{gkRT}.$$

Für die Geschwindigkeit des Schalles in trockener atmosphärischer Luft von der Temperatur $T = 273^\circ$ (oder Null Grad Celsius) erhält man hieraus, indem man $R = 29{,}27$ und $k = 1{,}41$ setzt, den Werth: $c = 332^m{,}5$. Für Wasserstoff erhält man auf gleiche Weise, indem man $R = 422{,}612$ setzt, den Werth: $c = 1263^m{,}3$.

Nachtrag zu § 142.

Den Gleichungen 6), 7) und 8) des § 142 kann man (in Berücksichtigung der den Constanten A und n beigelegten Bedeutungen, indem man zugleich die Constante $y_0 - R = h$ setzt, auch die folgenden Formen geben:

$$1)\quad H = \frac{R}{2}(R - 2q) + \frac{y^2 - h^2}{2},$$

$$2)\quad K = R(R - 2q) + (R - q)\,h + qy,$$

$$3)\quad \varrho = \frac{K^2}{Ky - Hq},$$

und wenn man dieselben auf den speciellen Fall anwendet, in welchem $q = \frac{R}{2}$ ist, so erhält man die Gleichungen:

$$4)\quad H = \frac{y^2 - h^2}{2},$$

$$5)\quad K = \frac{R}{2}(y + h),$$

$$6)\quad \varrho = R = \text{Const.}$$

Hieraus folgt, dass die auf S. 390 und S. 391 angeführten drei Fälle keineswegs die einzigen Fälle sind, in welchen die dort berechnete Kettenlinie die Form einer Kreislinie annimmt. Die obigen Gleichungen zeigen vielmehr, dass die Kettenlinie immer dann eine Kreislinie wird, wenn das Gewicht der Kette pro Längeneinheit dieselbe Grösse hat wie der Wasserdruck, welcher der Druckhöhe $\frac{R}{2}$ entspricht — wie auch immer die Werthe der beiden Constanten y_0 und R gewählt werden mögen.

In den obigen Gleichungen bedeutet h die (positive oder negative) Höhe des Wasserspiegels über dem Mittelpunkte des Kreises. Wenn $h \substack{> -\frac{R}{2} \\ < 0}$ ist, so giebt es in der Kettenlinie (an jeder von beiden Seiten) stets einen Punkt, in welchem $K = 0$ wird, in welchem also ein Uebergang von Druckspannung in Zugspannung stattfindet. Denn nach Gleichung 5) wird $K = 0$, wenn $y = -h$ ist

Wenn $h = 0$ ist, so liegt dieser Punkt in der Wasserspiegel-Ebene (Fig. 475). Wenn $h = -\frac{R}{2}$ ist, so fällt derselbe mit dem tiefsten Punkte der Kette zusammen (S. 390). Wenn $h = -\frac{R}{4}$ ist, so liegt die betreffende Stelle in der Tiefe $\frac{R}{4}$ unter dem Wasserspiegel. **Oberhalb** dieser Stelle ist die Spannung der Kette stets eine **Zug**-Spannung, **unterhalb** derselben dagegen eine **Druck**-Spannung.

Wenn $R \gtrless 2q$, oder $A \gtrless 2n$ ist, so nimmt die (in § 142 für den Fall $n < 1$ berechnete) Kettenlinie entweder die Form einer „**Wellenlinie**" (d. h. einer Linie mit Wendepunkten) oder die Form einer „**Schleifenlinie**" (d. h. einer Linie, welche sich selbst schneidet) an. Wenn $n > \frac{1}{2}$ ist, so wird die Kettenlinie eine Wellenlinie oder eine Schleifenlinie, jenachdem A grösser oder kleiner als $2n$ ist. Wenn dagegen $n < \frac{1}{2}$ ist, so wird die Kettenlinie eine Wellenlinie oder eine Schleifenlinie, jenachdem A grösser oder kleiner als $\frac{1}{2(1-n)}$ ist. Die Kettenlinie wird unter allen Umständen eine Wellenlinie, wenn $A > \frac{1}{2(1-n)}$, eine Schleifenlinie, wenn $A < 2n$ ist.

Soll zugleich der obere Scheitelpunkt — und mit demselben die ganze Kettenlinie — unterhalb der Wasserspiegel-Ebene liegen, so müssen ausserdem die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

für die Wellenlinie die Bedingung: $n > \frac{1}{2}$,

für die Schleifenlinie die Bedingung: $A < \frac{1}{4}\left(\frac{1+2n}{1-n}\right)$.

Während im Allgemeinen die beiden Constanten A und n von einander vollkommen unabhängig sind, ergiebt sich für den singulären Fall: $n = 1$, dass eine Kettenlinie überhaupt nur dann möglich ist, wenn entweder $A = 2$ oder $A = \infty$ ist.

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.



